НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

МАРКІН Марат Веніамінович

ГЛАДКІСТЬ І ЕРГОДИЧНІСТЬ СЛАБКИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

01.01.01 — математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 1994

Дисертацією є рукопис

Роботу виконано у відділі диференціальних рівнянь в частинних похідних Інституту математики АН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук ,професор
ГОРБАЧУК М.Л. .

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук
ВАЙНЕРМАН Л.И.

кандидат фізико-математичних наук
КНЮХ Б.І.

Провідна установа: Львівський державний університет

Захист відбудеться "14" червня 1994р.
о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.01 при Інституті математики АН України за адресою:

252061, Київ-4, ГСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці інституту.

Автореферат розіслано "12" травня 1994р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради,
доктор фізико-математичних
наук ГУСАК Д.В.

1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Об'єктом досл'джень даної дисертаційної роботи є диференціально-операторне рівняння

$$y'(t) = Ay(t),\ t \in [0,T)\ (0<T\leq+\infty), \qquad (*)$$

де A - щільно визначений лінійний замкнений оператор у банаховому просторі $\mathfrak{X}$.

Починаючи з 40-х років XX століття, питанням постановки різних задач для рівняння (*) з необмеженим оператором A, а також дослідженню структури і поведінки їх розв'язків присвячено багато робіт, оглядів і фундаментальних монографій.

Слід зазначити, що дослідження переважно відносяться до того випадку, коли A є генератором півгрупи лінійних обмежених операторів у просторі $\mathfrak{X}$ з певними властивостями (теорі півгруп). Саме в цьому випадку задача Коші для рівняння (*) поставлена у певному сенсі коректно. Стосовно інших проблем для рівняння (*) (гладкість розв'язків, поведінка розв'язків на нескінченності та ін.) вимога того, щоб A був генератором півгрупи, є вже не настільки істотною.

У даній дисертаційній роботі досліджуються питання гладкості та ергодичності слабких розв'язків рівняння (*) без цієї вимоги.

Такі питання часто виникають у різних задачах математичної фізики. Тому тема дисертації є актуальною.

Мета роботи. Знайти необхідні і достатні умови на оператор A, при яких всі слабкі розв'язки рівняння (*) мають певну задану гладкість (диференційовність, нескінченна диференційовність, аналітичність тощо), а також знайти умови, при яких обмежені слабкі розв'язки рівняння (*) допускають певну стабілізацію на нескінченності.

Методи досліджень. У роботі використовуються методи спектральної теорії операторів, теорії півгруп і теорії функцій.

Наукова новизна. Всі основні результати дисертаційної роботи є новими.

- У випадку, коли у рівнянні (*) A - нормальний оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$, дано описання всіх слабких розв'язків рівняння (*) на $[0,T)$ $(0<T\leq+\infty)$, а також встановлено необхідні і

достатні умови на спектр A, при яких всі слабкі розв'язки рівняння (*) на $[0,+\infty)$ є

a) диференційовними, нескінченно диференційовними;

b) ультрадиференційовними вектор-функціями класів Жевре;

c) аналітичними, цілими вектор-функціями та їх підкласами на $[0,+\infty)$ або на $(0,+\infty)$.

- Одержано достатні умови існування узагальненої границі у сенсі Чезаро на нескінченності обмежених слабких розв'язків рівняння (*) на $[0,+\infty)$.

Апробація роботи. Результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на семінарі відділу рівнянь в частинних похідних Інституту математики АН України, на Всеукраїнській конференції "Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців вузів України" (м.Київ, 30 березня - 1 квітня 1994 р.) і на Всеукраїнській конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (м.Дрогобич, 25-27 січня 1994 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в чотирьох роботах, список яких наведений наприкінці автореферату.

Структура дисертації. Дисертація викладена на 147 сторінках і і складається зі вступу, двох розділів, списку деяких стандартних позначень та списку літератури, що містить 69 найменувань.

2. ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі сформульовано тему дисертаційної роботи, дано огляд основних результатів, що виносяться на захист.

Темою досліджень у розділі I є питання підвищення гладкості слабких розв'язків рівняння

$$y'(t) = Ay(t) \tag{*}$$

з нормальним оператором A в комплексному гільбертовому просторі $(\mathfrak{H},(\cdot,\cdot),\|\cdot\|)$.

Мета - знайти умови на оператор A, при яких всі слабкі розв'язки рівняння (*) на $[0,+\infty)$ мають певний ступінь гладкості: сильно диференційовні на $[0,+\infty)$ або на $(0,+\infty)$, допускають аналітичні продовження, тощо.

Під слабким розв'язком рівняння (*) зі щільно визначеним лінійним замкненим оператором A в банаховому просторі $(\mathfrak{X},\|\cdot\|)$

на проміжку $[0,T)$ $(0<T\le+\infty)$ розуміють вектор-функцію

$$y\colon [0,T) \to \mathfrak{X},$$

сильно неперервну на $[0,T)$, таку що для довільного $g^* \in D(A^*)$ (A^* - оператор, спряжений з A, діючий у спряженому просторі $\mathfrak{X}^*$) числова функція $\langle y(\cdot),g^*\rangle$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ - дуальність просторів $\mathfrak{X}$ і $\mathfrak{X}^*$) неперервно диференційовна на $[0,T)$ і

$$\frac{d}{dt}\langle y(t),g^*\rangle = \langle y(t),A^*g^*\rangle,\ t \in [0,T).$$

Слабкі розв'язки рівняння (*) на півосі $[0,+\infty)$ умовимось називати глобальними.

Під слабкою задачею Коші для рівняння (*) на $[0,T)$ $(0<T\le +\infty)$ розуміють задачу на відшукання слабкого розв'язку $y(\cdot)$ рівняння (*) на $[0,T)$, що задовольняє початкову умову

$$y(0) = f \in \mathfrak{X}.$$

На протязі всього описання результатів розділу I, кажучи про рівняння (*), якщо не зазначено інакше, будемо вважати A нормальним оператором.

Встановлено описання всіх слабких розв'язків рівняння (*) на $[0,T)$ $(0<T\le+\infty)$.

<u>Теорема I.5.1.</u> Нехай A - нормальний оператор у комплексному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$.

Вектор-функція $y\colon [0,T) \to \mathfrak{H}$ $(0<T\le+\infty)$ є слабким розв'язком рівняння (*) на $[0,T)$ тоді і лише тоді, коли

$$y(0) \in \bigcap_{0<t<T} D(e^{At}) \text{ і } y(t) = e^{At}y(0),\ t \in [0,T).$$

Операторна експонента e^{At} $(t\ge 0)$ визначається у сенсі спектрального операційного числення для нормальних операторів.

З теореми I.5.1 випливає, що множиною початкових значень всіх слабких розв'язків рівняння (*) на $[0,T)$ $(0<T\le+\infty)$ є

$$\bigcap_{0<t<T} D(e^{At}),$$

зокрема, множиною початкових значень всіх глобальних слабких розв'язків рівняння (*) є множина

$$\bigcap_{t>0} D(e^{At}),$$

і для довільного $f \in \bigcap_{0<t<T} D(e^{At})$ слабка задача Коші для рівняння (*) на $[0,T)$ має єдиний розв'язок

$$y(t) = e^{At}f,\ t \in [0,T).$$

Для рівняння (*) у випадку, коли A генерує C_0- півгрупу операторів у банаховому просторі $\mathfrak{X}$, питання про описання всіх слабких розв'язків і розв'язність слабкої задачі Коші було досліджено Болом (Ball J.M.).

Якщо нормальний оператор A генерує C_0-півгрупу, то $D(e^{At})= \mathfrak{H}$ $(t\geq 0)$, і результат теореми I.5.1 збігається з результатом Бола.

При дослідженні питань сильної гладкості слабких розв'язків рівняння (*) важливу роль відіграє така лема.

Лема I.7.1. Нехай A - нормальний оператор у комплексному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$.

Якщо кожний глобальний слабкий розв'язок рівняння (*) сильно диференційовний в точці t=0, то для довільного $\omega \in \mathbb{R}$ множина

$$\sigma(A) \cap \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < \omega\right\}$$

обмежена.

Першим важливим результатом стосовно гладкості глобальних слабких розв'язків рівняння (*) є наступна теорема.

Теорема I.7.1. Нехай A - нормальний оператор у комплексному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$.

Кожний глобальний слабкий розв'язок рівняння (*) є нескінченно сильно диференційовним на $[0,+\infty)$ тоді і тільки тоді, коли існує $b>0$ таке, що спектр оператора A, за винятком, можливо, його обмеженої частини, міститься в множині

$$E_b := \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z\geq 0,\ |\operatorname{Im} z| \leq e^{b\operatorname{Re} z}\right\}.$$

Виявляється, що визначальну роль у диференціальних властивостях глобальних слабких розв'язків рівняння (*) грає точка t=0, а саме, має місце таке твердження.

Твердження I.7.1. Нехай A - нормальний оператор у комплексному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$.

Сильна диференційовність всіх глобальних слабких розв'язків рівняння (*) в точці t=0 тягне за собою їх нескінченну сильну диференційовність на $[0,+\infty)$.

Далі проводиться аналіз сильної диференційовності глобальних слабких розв'язків на відкритій півосі $(0,+\infty)$.

Теорема I.7.2. Нехай A - нормальний оператор у комплексному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$.

Кожний глобальний слабкий розв'язок рівняння (*) є нескінченно сильно диференційовним на $(0,+\infty)$ тоді і лише тоді, коли для будь-якого $b_->0$ і деякого $b_+>0$ спектр оператора A, за винятком, можливо, його обмеженої частини міститься в множині

$$E_{b_-,b_+} := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im} z| \le \begin{cases} e^{b_-(-\mathrm{Re} z)}, & \mathrm{Re} z<0, \\ e^{b_+ \mathrm{Re} z}, & \mathrm{Re} z \ge 0 \end{cases} \right\}.$$

Якщо нормальний оператор A генерує C_0- півгрупу, то результат теореми І.7.2 збігається з тим, що встановив Пазі (Pazy A.) для генераторів сильно диференційовних C_0- півгруп (C^∞-півгруп) у банаховому просторі.

Виявляється, що для нормального оператора A так само, як і для генератора сильно диференційовної C_0- півгрупи, диференціальні властивості глобальних слабких розв'язків рівняння (*) на $(0,+\infty)$ поліпшуються скачково, а саме, має місце таке твердження.

<u>Твердження І.7.2.</u> Нехай A - нормальний оператор у комплексному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$.

Сильна диференційовність всіх глобальних слабких розв'язків рівняння (*) на $(0,+\infty)$ (один раз) тягне за собою їх нескінченну сильну диференційовність на $(0,+\infty)$.

Перш ніж перейти до описання дослідження питань ультрадиференційовності глобальних слабких розв'язків рівняння (*), нагадаємо, що класом ультрадиференційовних вектор-функцій Жевре порядку β $(0\le\beta<+\infty)$ типу Рум'є і відповідно типу Бьорлінга на проміжку J $\big[$де J - це будь-який з проміжків $[0,T)$, $(0,T)$ $(0<T\le+\infty)\big]$ називається підклас множини всіх нескінченно сильно диференційовних вектор-функцій

$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(J,\mathfrak{H}) := \Big\{ g(\cdot) \in C^\infty(J,\mathfrak{H}) \mid$ для будь-якого сегмента $[a,b] \subset J$ для деякого $\alpha=\alpha([a,b])>0$ існує таке $C=C([a,b],\alpha)>0$, що

$$\sup_{a\le t<b} \|g^{(n)}\| \le C\alpha^n n^{\beta n},\ n \in \mathbb{Z}_+ \Big\},$$

відповідно,

$\mathfrak{G}_{(\beta)}(J,\mathfrak{H}) := \Big\{ g(\cdot) \in C^\infty(J,\mathfrak{H}) \mid$ для будь-якого сегмента $[a,b] \subset J$

для довільного $\alpha>0$ існує таке $C=C([a,b],\alpha)>0$, що $\sup\limits_{a\le t<b} \|g^{(n)}\| \le C\alpha^n n^{\beta n},\ n\in \mathbb{Z}_+\Big\}$ (якщо $\beta=0$, $n^{\beta n}=1$).

Зазначимо, що, коли $\beta=1$, клас $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(J,\mathfrak{H})$ $(\mathfrak{G}_{(\beta)}(J,\mathfrak{H}))$ складається з усіх аналітичних на J (цілих) вектор-функцій.

Встановлено такі теореми.

Теорема I.8.1. Нехай A - нормальний оператор у комплексному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$.

Кожний глобальний слабкий розв'язок рівняння (*) належить до класу $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}([0,+\infty),\mathfrak{H})(\mathfrak{G}_{(\beta)}([0,+\infty),\mathfrak{H}))$ з $\beta\ge 1$ тоді і лише тоді, коли існує таке $b>0$, що спектр оператора A, за винятком, можливо, його обмеженої частини, міститься в множині

$$P_b := \left\{z\in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}z\ge 0,\ |\operatorname{Im}z|\le b(\operatorname{Re}z)^{\beta}\right\}.$$

Зокрема, для $\beta=1$ ця теорема дає необхідні і достатні умови того, щоб всі глобальні слабкі розв'язки рівняння (*) були аналітичними (цілими) вектор-функціями.

Теорема I.8.2. Нехай A - нормальний оператор у комплексному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$.

Кожний глобальний слабкий розв'язок рівняння (*) належить до класу $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}((0,+\infty),\mathfrak{H})$ з $\beta\ge 1$ $(\mathfrak{G}_{(\beta)}((0,+\infty),\mathfrak{H})$ з $\beta>1)$ тоді і лише тоді, коли для деякого $b_->0$ (для будь-якого $b_->0$) і деякого $b_+>0$ спектр оператора A, за винятком, можливо, його обмеженої частини, міститься в множині

$$P_{b_-,b_+} := \left\{z\in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}z| \le \begin{cases} b_-(-\operatorname{Re}z)^{\beta}, & \operatorname{Re}z<0,\\ b_+(\operatorname{Re}z)^{\beta}, & \operatorname{Re}z\ge 0\end{cases}\right\}.$$

Зокрема, для $\beta=1$ ця теорема дає необхідні і достатні умови аналітичності всіх глобальних слабких розв'язків на $(0,+\infty)$.

Якщо нормальний оператор A генерує C_0- півгрупу, результат теореми I.8.2 для класу типу Рум'є $(\mathfrak{G}_{\{\beta\}}((0,+\infty),\mathfrak{H}))$, коли $\beta=1$, збігається з результатами Хілле-Філліпса та Іосіди відносно генераторів аналітичних півгруп, коли $\beta>1$, - з відповідними результатами Крандала (Crandall M.G.) - Пазі та Ушіджіми (Ushijima T.).

Далі аналізуються властивості глобальних слабких розв'язків, коли всі вони є аналітичними на $[0,+\infty)$ або на $(0,+\infty)$ вектор-функціями.

Виявляється, що визначальну роль в аналітичних властивостях глобальних слабких розв'язків знову ж таки грає точка $t=0$, а саме, має місце таке твердження.

Твердження I.9.1. Нехай A - нормальний оператор у комплексному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$.

Якщо всі глобальні слабкі розв'язки рівняння (*) допускають аналітичні продовження в окіл нуля (кожний розв'язок - у свій окіл), то всі вони є цілими вектор-функціями.

Встановлено справедливість також наступного твердження.

Твердження I.9.2. Нехай A - нормальний оператор у комплексному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$.

Якщо всі глобальні слабкі розв'язки рівняння (*) допускають аналітичні продовження в окіл відкритої півосі $(0,+\infty)$ (кожний розв'язок - у свій окіл), то існує такий кут $\theta \in (0,\frac{\pi}{2}]$, що всі вони аналітично продовжуються у відкритий сектор

$$\sum\nolimits_{\theta} := \left\{z \in \mathbb{C} \mid |\arg z| < \theta\right\}$$

(вважається, що значення $\arg z$ беруться з проміжку $(-\pi,\pi]$).

З теорем I.8.1, I.8.2 ($\beta=1$) і твердження I.9.2 випливає такий наслідок.

Наслідок 9.1. Нехай A - самоспряжений оператор ($A=A^*$) у комплексному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$.

Тоді кожний глобальний слабкий розв'язок рівняння (*) аналітично продовжується у відкриту праву півплощину

$$\left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\right\}.$$

Якщо до того ж оператор A напівобмежений знизу ($A \geq \gamma I$ з деяким $\gamma \in \mathbb{R}$), то кожний глобальний слабкий розв'язок рівняння (*) є цілою вектор-функцією.

З теореми 8.1 (випадок $\beta=1$) випливає, що нормальний оператор A не повинен бути обмеженим, навіть коли всі глобальні слабкі розв'язки рівняння (*) є цілими вектор-функціями (на відміну від генератора C_0- півгрупи). Але виявляється: якщо при цьому накласти певні обмеження на їх зростання на нескінченності, це призведе до обмеженості оператора A. Саме, доведено наступне твердження.

Теорема I.9.1. Нехай A - нормальний оператор у комплексному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$.

Якщо кожний глобальний слабкий розв'язок $y(\cdot)$ рівняння (*) є цілою вектор-функцією, такою, що

$$\|y(z)\| = O(|z|^{\rho}), \ |z| \to +\infty,$$

з деяким $\rho=\rho(y(\cdot)) > 0$,

то оператор A обмежений.

У розділі II досліджується ергодична поведінка на нескінченності обмежених слабких розв'язків рівняння (*) з щільно визначеним лінійним оператором A в комплексному банаховому просторі $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$. Мета - встановити умови, які б формулювалися тільки у термінах простору $\mathfrak{X}$ та оператора A і були б достатніми для існування границі чезарівських середніх кожного обмеженого слабкого розв'язку $y(\cdot)$ рівняння (*) $(\sup\limits_{t\geq 0} \|y(t)\| < +\infty)$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t y(\tau)d\tau.$$

Шоу (Shaw S.-Y.) встановив, що для генератора A рівномірно обмеженої C_0- півгрупи $\left\{e^{At} \mid t\geq 0\right\}$ $\left[\sup\limits_{t\geq 0} \|e^{At}\|_{\mathfrak{L}(\mathfrak{X})} < +\infty\right]$ довільна орбіта

$$e^{At}f, \ t\geq 0, \ f \in \mathfrak{X},$$

тобто довільний глобальний слабкий розв'язок рівняння (*) (див. стосовно результату Бола) має ергодичну границю

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t e^{A\tau} f d\tau$$

тоді і лише тоді, коли має місце розклад простору $\mathfrak{X}$ у пряму суму підпросторів

$$\mathfrak{X} = \operatorname{Ker}A \dotplus \overline{R(A)}. \qquad (1)$$

При цьому:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t e^{A\tau} f d\tau = Pf,$$

де P - проектор на підпростір $\operatorname{Ker}A$ паралельно підпростору $\overline{R(A)}$.

До того ж, якщо простір $\mathfrak{X}$ рефлексивний, розклад (1) виконується автоматично.

Наша постановка задачі більш загальна: зокрема, не вимагається, щоб A генерував C_0 - півгрупу.

Встановлено наступні результати.

Теорема II.2.1. Якщо простір $\mathfrak{X}$ скінченномірний, то для кожного обмеженого глобального слабкого розв'язку $y(\cdot)$ рівняння (*) існує ергодична границя

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t y(\tau)d\tau = P(0)y(0),$$

де $P(0)$ - спектральний проектор Ф.Рісса числа 0.

Якщо до того ж $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} \subseteq \{0\}$ ($i\mathbb{R}$ - уявна вісь), то існує звичайна границя

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = P(0)y(0).$$

Теорема II.3.1.

1. Якщо існує і обмежений обернений оператор A^{-1}, то для кожного обмеженого глобального слабкого розв'язку $y(\cdot)$ рівняння (*) існує ергодична границя

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t y(\tau)d\tau = 0.$$

2. Якщо має місце розклад простору $\mathfrak{X}$ у пряму суму двох підпросторів

$$\mathfrak{X} = \operatorname{Ker}A \dotplus R(A), \tag{2}$$

то для кожного обмеженого глобального слабкого розв'язку $y(\cdot)$ рівняння (*) існує ергодична границя

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t y(\tau)d\tau = Py(0),$$

де P - проектор на підпростір $\operatorname{Ker}A$ паралельно підпростору $R(A)$.

Твердження 2 теореми II.3.1 для випадку скінченномірного простору $\mathfrak{X}$ не повинно суперечити теоремі II.2.1. Так і є, бо розклад (2) обумовлює збіжність спектрального проектора нуля $P(0)$ і проектора P на $\operatorname{Ker}A$ паралельно $R(A)$.

Спираючись на характеристичну властивість рефлексивних просторів, яка полягає в тому, що обмежена множина рефлексивного банахового простору є відносно слабо компактною, доведено наступну теорему.

<u>Теорема II.4.1.</u> Нехай простір $\mathfrak{X}$ рефлексивний.

1. Якщо існує обернений оператор A^{-1}, то для кожного слабкого розв'язку $y(\cdot)$ рівняння (*) існує слабка ергодична границя

$$W - \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t y(\tau)d\tau = 0.$$

2. Якщо має місце розклад (1) простору $\mathfrak{X}$, то для кожного обмеженого глобального розв'язку $y(\cdot)$ рівняння (*) існує слабка ергодична границя

$$W - \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t y(\tau)d\tau = Py(0),$$

де P - проектор на підпростір $\mathrm{Ker}A$ паралельно підпростору $\overline{R(A)}$.

Якщо простір $\mathfrak{X}$ - рефлексивний і A - генератор рівномірно обмеженої C_o- півгрупи, то згідно Шоу можна стверджувати, що збіжність чезарівських середніх буде сильною.

Виявляється, що збіжність чезарівських середніх поліпшується, також стає сильною, коли простір $\mathfrak{X}$ гільбертовий і оператор A нормальний. А саме, має місце таке твердження.

<u>Теорема II.5.1.</u> Нехай простір $\mathfrak{X}$ гільбертовий, і оператор A нормальний.

Тоді для кожного обмеженого глобального слабкого розв'язку $y(\cdot)$ рівняння (*) існує (сильна) ергодична границя

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t y(\tau)d\tau = Py(0),$$

де P - ортопроектор на підпростір $\mathrm{Ker}A$.

Якщо до того ж $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} \subseteq \{0\}$, то існує звичайна границя

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = Py(0).$$

Безпосередньо з цієї теореми випливає такий наслідок.

<u>Наслідок II.5.1.</u> Нехай простір $\mathfrak{X}$ - гільбертовий, A - самоспряжений оператор ($A=A^*$).

Тоді для кожного обмеженого глобального слабкого розв'язку $y(\cdot)$ рівняння (*) існує границя

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = Py(0),$$

де P - ортопроектор на підпростір $\mathrm{Ker}A$.

Це є узагальненням комплексного варіанту аналогічного результату Гаро (Haraux), який було встановлено ним для $A=A^{*}\leq 0$.

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівникові професору М.Л. Горбачуку.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Горбачук М.Л., Маркін М.В.
   Про гладкість слабких розв'язків диференціально-операторного рівняння першого порядку в гільбертовому просторі // Доп. АН України. Сер. А. - 1994.- N4.
2. Мирослав Горбачук, Марат Маркін
   Гладкість слабких розв'язків диференціально-операторних рівнянь // Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (Україна, Дрогобич, 25-27 січ. 1994р.). - Київ: Ін-т математики АН України, 1994. - С.41.
3. Маркин М.В. О поведении на бесконечности ограниченных решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.- Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991. - С.56-63.
4. Маркін М.В. Ергодичність слабких розв'язків диференціально-операторного рівняння першого порядку. - Київ, 1994. - 43с.- (Препр /АН України. Ін-т математики; 94.10).

Мар

Підп. до друку 05.05.94. Формат 60×84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 0,93. Ум. фарбо-відб. 0,7. Обл.-вид. арк. 0,6.
Тираж 100 пр. Зам. 121 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3