ДНІПРОПЕТРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

На правах рукопису

КАРМАЗІНА ВАЛЕНТИНА ВАСИЛІВНА

# ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ЩІЛЬНОСТІ ТА ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ СПЛАЙНАМИ

01.01.01. - математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового
ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дніпропетровськ-1994

Дисертація є рукопис.

Робота виконана на кафедрах вищої математики, прикладної математики та обчислювальної техніки Дніпродзержинського індустріального інституту

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор Лигун А.О.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук, професор Тіман М.П., доктор фізико-математичних наук, доцент Кисельова О.М.

Провідна установа - Інститут математики АН України. (м.Київ)

Захист дисертації відбудеться "10" 06 1994 р. о 15.30 годині на засіданні спеціалізованої Вченої ради К 03.01.04 при Дніпропетровському держуніверситеті за адресою :

320625 м.Дніпропетровськ, пр Гагаріна 72, Дніпропетровський держуніверситет, корп. 14, ауд.405

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Дніпропетровського державного університету

Автореферат розісланий "6" 05 1994 р.

Вчений секретар
спеціалізованої Вченої ради Давидов О.В.

## Загальна характеристика роботи.

Актуальність теми. Проблеми наближення та відновлення функцій сплайнами активно досліджувалися багатьма математиками як з теоретичної так і з практичної точки зору. Останнім часом у роботах І.Шенберга, К.Де Бора, М.П.Корнійчука та інших авторів були вивчені питання про якість відновлення функцій за допомогою локальних сплайнів. У тому числі у работах І.Шенберга та К.Де Бора були побудовані методи відновлення функції щільності та функції розподілу імовірностей (які є додатними операторами) та запропоновані деякі їх застосування. У роботах М.П.Корнійчука, А.О.Лигуна, О.І.Гребеннікова, В.Л.Мирошніченко були досліджені властивості локальних сплайнів близьких до інтерполяційних. Ці сплайни більш зручні у практичному застосуванні, ніж інтерполяційні, а якість апроксімації вони мають таку ж ефективну як інтерполяційні.

Ось чому істотним виявляється проблема побудування та дослідження аналогів цих сплайнів (це будуть локальні сплайни близькі до інтерполяційних у середньому) для відновлення функції щільності та функції розподілу імовірностей. Далі вони будуть використані як проміжні наближення (як теоретична функція щільності) при відновленні функції щільності сплайн-експоненційними або сплайн-нормальними розподілами.

З дещо іншої точки зору розібрані питання відновлення функції щільності та функції розподілу у роботах H.P.Galliher, R.C.Wheeler, А.Балог, В.І.Зубова, Н.А.Філадельфіної, L.Boneva, D.Kendall, I.Stefannov, А.Ф.Приставки, О.В.Райко, І.Л.Єлисеєнко та ранніх роботах автора. В цих роботах були введені, обгрунтовані різні типи кусково-неперервних функцій розподілу та функцій щільності, приведені алгоритми пошуку вузлів та параметрів сплайн-нормальних і сплайн-экспоненційних розподілів. У переважній більшості випадків ці алгоритми ефективні тільки при малій кількості вузлів (один, два). Незважаючи на це, вони добре себе зарекомендували при розв'язанні проблем надійности та масового обслуговування, планування та обробки експерименту, розпізнавання образів та статистичного моделювання.

Мета роботи. Дослідити апроксимативні та геометричні характеристики відновлення функції щільності і функції розподілу імовірностей за допомогою поліноміальних локальних сплайнів підвищенної точності другого і третього порядків близьких до інтерполяційних у середньому.

Дослідити задачу про асимптотично оптимальний вибір вузлів при відновленні функції щільності та функції розподілу імовірностей за допомогою сплайн-експоненційних та сплайн-нормальних розподілів та розглянути алгоритми визначення асимптотично оптимальних вузлів та параметрів,відповідних сплайнів.

Методи дослідження. В роботі використані сучасні методи теорії наближення функцій,зокрема методи точного розв'язання екстремальних задач теорії наближення функцій,асимптотичні методи дослідження екстремальних задач, а також деякі визначення і властивості з теорії імовірностей та математичної статистики. При перевірці на адекватність була використана ЕОМ.

Наукова новизна та значення роботи. Основні результати дисертації є новими. Їх зміст полягає в побудуванні эфективно реалізуємих на ЕОМ методів відновлення функції щільності і функції розподілу імовірностей за допомогою сплайн-експоненційних та сплайн-нормальних розподілів з вільними вузлами. При цьому як проміжні наближення були використані локальні поліноміальні сплайни 2 и 3 порядків з рівновіддаленими вузлами.

Доведено ряд рівностей про норми сплайн-операторів 2 и 3 порядків близьких до інтерполяційних у середньому та відповідних їм операторів порожденних похідними від сплайнів. Обчислені асимптотично точні оцінки похибки відхилення цих сплайнів від теоретичної функції щільності розподілу імовірностей та априорні оцінки (деякі з них точні) відхилення функції щільності від відповідних сплайнів. Аналогічні оцінки отримані і для відхилення похідної функції щільності від похідної сплайна.

Досліджені у роботі сплайни ми можемо використовувати при знаходженні поправок типа Шеппарда (поправки на групування неперервних випадкових величин) як для початкових моментів,що у ряді випадків збігаються до поправок Шеппарда,так і для інших,наприклад, експоненційних моментів.

Знайдені асимптотично оптимальні послідовності розбиттів при відновленні функції щільності і функції розподілу сплайн-експоненційними та сплайн-нормальними розподілами з вільними вузлами.

Результати дисертації мають в основному теоретичний характер, але формулювання приведені так,що дозволяють легко виконати їх реалізацію на ЕОМ.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у 8 роботах ( [5]-[11] ), список яких наведено в кінці автореферату.

Структура и об'єм роботи. Дисертація складається із вступу, двох розділів та списку літератури, що містить 48 найменувань. Загальний обсяг 157 сторінок машинопису.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались і одержали позитивну оцінку на наукових семінарах кафедри теорії функцій та кафедри математичного аналізу Дніпропетровського держуніверситету, кафедри чисельних методів математичної фізики Київського держуніверситету, відділу оптимізації Інституту кібернетики АН України (м.Київ); на науковому міжвузівському семінарі по нелінійним чебишевським наближенням та негладкій оптимізації у Ленінградському держуніверситеті; на республіканській науковій конференції, присвяченій 70-річчю М.П.Корнійчука по теорії наближення (м.Київ, 1990р.); на третій регіональній конференції "Теория аппроксимации и задачи вычислительной математики" (м.Новосибірськ, 1991р.); на міжнародній науковій конференції "Теорія наближення та задачі обчислювальної математики" (м.Дніпропетровськ, 1993р.).

## Зміст роботи.

У вступі наведено обсяг результатів по розглянутим темам досліджень, обгрунтовується актуальність, визначається мета і задачі дисертаційної роботи, сформульовано основні положення, які виносяться на захист та короткий огляд змісту дисертації.

Нехай задана емпірична функція щільності розподілу $p_i$ з кроком $h$, тобто задано розбиття $\Delta_h$ і вектор

$p=(\dots p_{-1}, p_0, p_1, \dots)$ такий, що $\quad h\sum_{i\in\mathbb{Z}} p_i = 1,\ \ p_i \ge 0,\ (i\in\mathbb{Z}),$

та лише скінченне число координат вектора $p$ відрізняється від нуля.

В першому розділі були розглянуті сплайни типу $S_{r,k}(p,t)$ ($r=1,2,3,4,\ k=0,1,2$), які являють собою лінійну комбінацію B-сплайнів і на кожному з інтервалів $(ih,(i+1)h)$ дорівнюють алгебраїчному многочлену ступеня не вище $r$. Ці сплайни є аналог локальних сплайнів близьких до інтерполяційних у середньому.

У §1.1 наведені деякі необхідні означення та властивості базисних сплайнів.

Позначимо через $\Delta_h^r$ розбиття всієї осі точками $t_i = ih$ ($i\in\mathbb{Z}$), якщо r непарне та точками $t_{i+1/2} = (i+1/2)h$ ($i\in\mathbb{Z}$), якщо r парне.

В-сплайни визначаються наступними рекурентними рівностями

$$B_{r,h}(t)=\frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t+h/2} B_{r-1,h}(t)dt \quad (r=1,2\ldots), \qquad (1)$$

де

$$B_{0,h}(t)=\begin{cases} 1, & |t|<h/2, \\ 0, & |t|\geq h/2. \end{cases}$$

У §1.2 розглянуті сплайни , визначені на усій осі рівністю

$$S_{r,0}(\gamma,t)= \sum_{i:|t-ih|\leq rh} \gamma_i \cdot B_{r,h}(t-ih) . \qquad (2)$$

Ці сплайни при $\gamma_i= f(ih)$ $(i\in\mathbb{Z})$ називаються локальними сплайнами Шенберга,а при

$$\gamma_i= \frac{1}{h}\int_{I_i} f(t)\,dt \quad (i\in\mathbb{Z})$$

ці сплайни досліджувались Де Бором.

Тут і далі відтинок $[(i-0,5)h,(i+0,5)h]$ позначається як $I_i$, а відтинок $[(i-1)h,ih]$- як $I_{i-0,5}$.

У цьому параграфі наводяться також необхідні надалі для досліджень зображення та властивості сплайнів вигляду (2).

В §1.3 впроваджені локальні сплайни $S_{r,1}(\gamma,t)$, які формально можна одержати з (2) заміною вектора $\gamma$ на вектори

$$\gamma-\frac{1}{8}\Delta^2\gamma,\ \gamma-\frac{1}{6}\Delta^2\gamma,\ \gamma-\frac{5}{24}\Delta^2\gamma,\ \gamma-\frac{1}{4}\Delta^2\gamma$$

при $r$=1,2,3,4 відповідно. Указується, що середнє значення сплайнів $S_{r,1}(\gamma)$ на $I_i$ відрізняється від $\gamma_i$ набагато менше, ніж у сплайнів $S_{r,0}(\gamma)$ ($r$=1,2,3,4).

В §1.4 досліджується проблема про норми сплайн-операторів .

Нехай задана емпірична функція щільності розподілу $(p_i)_{i\in Z}$ з кроком h і така, що $h\sum_{i\in\mathbb{Z}} p_i=1$, $p_i\geq 0$, і

$$p_i=\bar{p}_i+\varepsilon_i, \text{ де } \bar{p}_i=\frac{1}{h}\int_{I_i} p(t)\,dt ,$$

p(t)- теоретична функція щільності розподілу, $\varepsilon_i$- похибки.

Тоді

$$p(t)-S_{r,k}(p,t)=p(t)-S_{r,k}(\bar{p},t)-S_{r,k}(\varepsilon,t)$$

і $$|\, p(t)-S_{r,k}(p,t)\,|\le|\, p(t)-S_{r,k}(\bar{p},t)\,|+\varepsilon\|S_{r,k}\|,$$

де $|\varepsilon_i|<\varepsilon$ $(i\in\mathbb{Z})$.

Таким чином якість відновлення теоретичної функції щільності розподілу за допомогою сплайнів зводиться до дослідження похибки відновлення та обчислення норм відповідних сплайн-операторів.

Позначимо через

$$\|A\|_{X\to Y}=\sup\left\{\|A(x)\|_Y:\|x\|_X\le 1\right\}.$$

норму лінійного оператора A, який відображає лінійний нормований простір X з нормою $\|\cdot\|_X$ в лінійний нормований простір Y з нормою $\|\cdot\|_Y$.

Основним результатом цього параграфа є наступна теорема.

**Теорема 1.** *Нехай* $\|S^{(\nu)}_{r,k}\|h^{\nu}=C^{\nu}_{r,k}$ *, тоді*

$C^0_{1,0}=1$, $C^0_{1,1}=3/2$, $C^1_{1,0}=1$, $C^1_{1,1}=3$, $C^0_{2,0}=1$,

$C^0_{2,1}=4/3$, $C^0_{2,2}=3/2$, $C^1_{2,0}=2$, $C^1_{2,1}=\frac{10}{3}$, $C^1_{2,2}=\frac{36}{9}$,

$C^2_{2,0}=4$, $C^2_{2,1}=\frac{20}{3}$, $C^2_{2,2}=\frac{76}{9}$, $C^0_{3,0}=1$, $C^0_{3,1}=\frac{41}{32}$,

$C^0_{3,2}=\frac{2297}{1536}$, $C^1_{3,0}=3/2$, $C^1_{3,1}=\frac{13}{6}$, $C^1_{3,2}=\frac{2867779}{1073376}$, $C^2_{3,0}=2$,

$C^2_{3,1}=\frac{22}{3}$, $C^2_{3,1}=\frac{179}{18}$, $C^0_{4,0}=1$, $C^0_{4,1}=5/4$, $C^1_{4,0}=4/3$,

$C^1_{4,1}=\frac{3664}{1920}$, $C^2_{4,0}=5/2$, $C^2_{4,1}=\frac{35}{8}$, $C^3_{4,0}=8$, $C^3_{4,1}=39/4$.

У §1.5 досліджується проблема точності відноблення функції щільності розподілу за допомогою сплайнів другого порядку.

Типовим результатом цього параграфа є наступне твердження: *Нехай* $p\in C^3$ *, тоді при* $h\to 0$ *має місце асимптотично точна нерівність*

$$\|p-S_{2,1}(p)\|_C \le \frac{h^3}{18}\|p^{(3)}\|_C + \frac{4\varepsilon}{3} + o(h^3). \qquad (3)$$

Аналогічні нерівності отримані для сплайнів $S_{2,0}(p,t)$ і $S_{2,2}(p,t)$, а також одержані подібні оцінки відхилень величин

$$\|p^{(\nu)}-S^{(\nu)}_{2,k}(p)\|_C, \text{ для } \nu=1,2 \text{ і } k=0,1,2.$$

У §1.6 отримані повні аналоги оцінок (3) для сплайнів $S_{3,k}(p,t)$.

У §1.7 наведені застосування сплайнів $S_{r,k}(p,t)$ для знаходження поправок на групування.

Нехай вектор $p=(p_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ відомий та визначені початкові моменти

$$m_k=\int_{-\infty}^{\infty} t^k p(t)dt,$$

$$m_{k,r}=\int_{-\infty}^{\infty} t^k S_{r,1}(p,t)\,dt, \qquad (r=1,2,3,4)$$

та

$$\mu_k(p)=h^{k+1}\sum_{i\in\mathbb{Z}} p_i\cdot i^k.$$

Доведено, наприклад, що

$$m_{2,r}=\mu_2(p)-\frac{h^2}{12}\mu_0(p).$$

Аналогичні співвідношення отримані і для $m_{1,r}, m_{3,r}, m_{4,r}\,(r=1,2,3,4)$.

Величини $m_k-\mu_k(p)$ називаються поправками Шеппарда на групування неперервних випадкових величин.

Доведено, що $m_k-\mu_k(p)$ та $m_{k,r}-\mu_k(p)$ збігаються при $r=1,2,3,4$, тобто відновлення функції щільності розподілу за допомогою сплайнів $S_{r,k}(p,t)$ дозволяє одержувати початкові моменти з урахуванням поправок Шеппарда за допомогою використовуємих нами сплайнів. Обчислені також поправки на групування для експоненційних моментів.

У другому розділі досліджуються проблеми асимптотичного вибору вузлів при відновленні функції щільності та функції розподілу сплайн-нормальними та сплайн-експоненційними функціями розподілу з вільними вузлами.

У §2.1 наводяться необхідні надалі визначення та постановки задач.

Нехай нам відома (задана) функція щільності розподілу $p(t)$ Як функцію $p(t)$ будемо використовувати сплайни, розглянуті в першому розділі. Враховуючи, що сплайни це гладкі функції, вважаємо, що $p(t)$ також гладка.

Нехай $[a,b]$ - це носій функції $p(t)$ та $\Delta_n=\{a=t_{0,n}<t_{1,n}<t_{2,n}<\dots<t_{n-1,n}<t_{n,n}=b\}=\{t_{i,n}\}_{i=0}^{n}$ - розбиття відтинка $[a,b]$.

Позначимо як $S_{r,k}(\Delta_n)$ множину усіх сплайнів порядку $r$ дефекту $k$ по розбиттю $\Delta_n$ при фіксованих $r$ і $k$.

Для $r=1$ і 2 функцію $ES(t)$ будемо називати експоненційним сплайном порядку $r$ дефекту $k$ по розбиттю $\Delta_n$, якщо вона може бути зображена у вигляді

$$ES(t)=e^{-s(t)}\quad,\ s\in S_{r,k}(\Delta_n)$$

та задовольняє умовам

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} ES(t)\,dt=1 \qquad (\mathbb{R}_+=[0,\infty))$$

при $r=1$ і

$$\int\limits_{\mathbb{R}} ES(t)\,dt=1$$

при $r=2$.

Позначимо через $ES_{r,k}(\Delta_n)$ множину таких експоненційних сплайнів.

Вважаємо, що при $r=1$, $a=0$ та для $t>b$ функція $s(t)$ визначена рівністю

$$s(t)=s(b-0)+s'(b-0)(t-b)\ ,$$

а при $r=2$ для $t<a$ та для $t>b$ функція $s(t)$ визначена рівностями

$$s(t)=s(a+0)+s'(a+0)(t-a)+\frac{1}{2}s''(a+0)(t-a)^2 \quad (t<a)$$

$$s(t)=s(b-0)+s'(b-0)(t-b)+\frac{1}{2}s''(b-0)(t-b)^2 \quad (t>b).$$

Нехай $X$ є $\mathbb{R}$ або $\mathbb{R}_+$, та $X$ є простір з скінченною нормою

$$\|f\| = \max\left\{ \left| \int_{-\infty}^{t} f(u)\,du \right|,\ t\in \mathbb{R} \right\}, \tag{4}$$

$$\|f\| = \max\left\{ \left| \int_{0}^{t} f(u)\,du \right|,\ t\in \mathbb{R}_+ \right\}, \tag{5}$$

$$\|f\| = \max\left\{ |f(t)|,\ t\in \mathbb{R} \right\}, \tag{6}$$

або

$$\|f\| = \left( \int_{\mathbb{R}} f^2(t)\,dt \right)^{1/2}. \tag{7}$$

Нехай $ES(p,t)=S(p,\Delta_n,t)$ будь-який спосіб відновлення функції щільності $p(t)$ (як $ES(p,t)$ надалі будуть фігурувати сплайн-експоненційні ($r=1$) або сплайн-нормальні ($r=2$) розподіли).

Величина $\|p-ES(p)\|$

(де $\|f\|$ - одна з норм (4)-(7)) характеризує похибку відновлення теоретичної функції щільності $p(t)$ методом $ES(p,t)$.

Розбиття $\Delta_n^*$ називається оптимальним (найкращим) для функції $p=p(t)$ (та, для методу $ES(p,t)$ і норми $\|\cdot\|$, звичайно), якщо

$$\|p-S(p,\Delta_n^*)\| = \inf\left\{ \|p-S(p,\Delta_n)\| \;\middle|\; \Delta_n \right\}.$$

Послідовність розбиттів $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ зветься асимптотично оптимальною для функції $p(t)$, якщо при $n\to\infty$

$$\|p-S(p,\Delta_n^*)\| = \min\left\{ \|p-S(p,\Delta_n)\| \;|\Delta_n \right\}(1+o(1)).$$

В роботах Приставки А.Ф., Райко О.В. та інших, а також в ранніх роботах автора розглянуті різні прямі методи пошуку оптимальних вузлів, які зводилися до тієї або іншої алгоритмізації екстремальної задачі

$$\inf_{\substack{t_{i,n} \\ (i=1,2,\dots,n-1)}} \| p - S(p,\Delta_n) \|$$

Цей підхід ефективно реалізовано на ЕОМ тільки для невеликої кількості вузлів (один, два) та не дозволяє знайти оптимальні вузли в явному вигляді для більшого числа вузлів.

Задачі пошуку послідовностей асимптотично оптимальних вузлів при відновленні функцій за допомогою сплайнів різного вигляду були розглянуті в роботах Б.О.Попова, А.О.Лигуна А.О.Шумейко, А.Д.Малишевой та інш. В основному це задачі відновлення функцій поліномними та параметричними сплайнами. Ставиться задача про асимптотично оптимальний вибір вузлів послідовності $\{\Delta_n^*\}$ при відновленні функції щільності сплайн-експоненційними та сплайн-нормальними розподілами.

У §2.2. було розглянуто відновлення функції розподілу сплайнами з фіксованими вузлами. Як такий сплайн була розглянута функція $SN(\Delta_n,t)$.

Функцію $SN(\Delta_n,t)$ неперервну на усій осі, будемо називати сплайн- нормальним розподілом, якщо на кожному в інтервалів $I_{i+1/2}=(t_i,t_{i+1})$ $(i=0,\dots,n-1)$ вона має вигляд

$$SN(\Delta_n,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\int_{-\infty}^{t} exp\left(-\frac{(u-m_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)du=\Phi\left(\frac{t-m_i}{\sigma_i}\right),$$

де

$$\Phi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\xi} exp\left(\frac{u^2}{2}\right)du.$$

Параметри $(m_i,\sigma_i)$ визначаються як розв'язок екстремальної задачі

$$\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(\varphi(t)\ \frac{t-m_i}{\sigma_i}\right)^2 dt \longrightarrow min$$

при умовах неперервності $SN(\Delta_n,t)$ в узлах $t_i$.

Тут $\varphi(t)=\Phi(\bar{F}(t))$. $\bar{F}(t)$ - це емпірична функція розподілу.

Розв'язок цієї екстремальної задачі зводиться до класичної задачі оптимізації квадратичного функціонала при лінійних обмеженнях, яка розв'язується методом Лагранжа.

Доведено, що такий підхід дозволяє краще відновлювати функцію розподілу в околі кінців інтервала $[t_0, t_n]$. Розглянута модифікація запропонованного підходу, яка в деякому розумінні позбавлена цього недоліка. Обгрунтування такого підходу полягає в слідуючому

Якщо $\bar{F}(t) \approx SN(\bar{F}, \Delta_n, t)$, то $\varphi(t) \approx \Phi^{-1}(SN(\bar{F}, \Delta_n, t))$ та

$\Phi^{-1}(SN(\bar{F}, \Delta_n, t)) = l(\mu(\bar{F}), \Delta_n, t)$ – є неперервна на $[a, b]$ ломана з вузлами в точках $t_i$, інтерполююча значення $\mu_i$ в узлах $t_i$ $(i=0,1,\dots,n)$. Таким чином, якщо $\delta(t) = \varphi(t) - l(\mu(\bar{F}), \Delta_n, t)$ та

$\Delta(t) = \bar{F}(t) - SN(\bar{F}, \Delta_n, t)$ то, ввежаючи що $\delta(t)$ мале, одержуємо

$$\Delta(t) \approx \bar{F}'(t)\delta(t). \qquad (8)$$

Тоді задача відновлення функції розподілу сплайн-нормальними розподілами з фіксованими вузлами зводиться до наступної екстремальної задачі:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\bar{F}'(t))^2 (\varphi(t) - l(\mu(\bar{F}), \Delta_n, t))^2 dt \to min$$

при таких же обмеженнях.

Сплайн-нормальний розподіл побудований першим методом позначається $SN_1(\bar{F}, \Delta_n, t)$, а другим – $SN_2(\bar{F}, \Delta_n, t)$.

Тут же описаний підхід до відновлення функції розподілу сплайн-нормальними розподілами з фіксованими вузлами, коли задана емпірична функція щільності.

У §2.3 розв'язується задача оптимального вибору вузлів при відновленні функції розподілу сплайн-нормальними розподілами.

Послідовність $\{\Delta_n^*\}_{n=1}$ будемо називати асимптотично оптимальною для $\bar{F}(t)$, якщо при $n \to \infty$ виконується співвідношення

$$\inf_{\Delta_n} R(\bar{F}, \Delta_n) = R(\bar{F}, \Delta_n^*) \cdot (1 + o(1)),$$

$$R(\bar{F},\Delta_n)=\int_a^b (\bar{F}'(t))^2\,(\varphi(t)-z(\mu(\bar{F}),\Delta_n,t))^2\,dt,$$

Основою для такого визначення асимптотично оптимальної послідовності розбиттів $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ є співвідношення (8).

**Теорема 2.** *Нехай* $\alpha<\frac{1}{5}$, $\bar{F}(t)\in C^3_{[a,b]}$ *та послідовність розбиттів* $\left\{\{t^*_{i,n}\}_{i=0}^{n}\right\}_{n=1}^{\infty}=\{\Delta^*_n\}_{n=1}^{\infty}$ *визначається з рівностей*

$$\int_a^{t^*_{i,n}}\left[\theta(t)+(\tfrac{1}{n})^{\alpha}\right]dt=\frac{i}{n}\int_a^b\left[\theta(t)+(\tfrac{1}{n})^{\alpha}\right]dt\qquad(i=0,1,\dots,n).$$

*де*

$$\theta(t)=((\varphi''(t))\cdot\bar{F}'(t))^{2/5}.$$

*Тоді послідовність розбиттів* $\{\Delta_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ *буде асимптотично оптимальною для* $\bar{F}(t)$ *і при цьому буде виконуватись співвідношення*

$$R(\bar{F},\Delta_n^*)=\frac{1}{320\cdot n^4}\left[\int_a^b\theta(t)\,dt\right]^5+o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

У §2.4 була розглянута задача відновлення функції щільності розподілу експоненційними сплайнами з фіксованими вузлами.

Функцію $SE(t)$ будемо називати сплайн-експоненційним розподілом щільності імовірностей по розбиттю $\Delta_n$, якщо вона неперервна на $[t_0,t_n]$ та на кожному інтервалі $(t_i,t_{i+1})$ має вигляд

$$SE(\Delta_n,t)=exp(-a_i t+b_i)\qquad(i=0,1,\dots n-1).$$

Так же, як і в §2.2 для будь-якого фіксованого розбиття $\Delta_n$ будується сплайн-експоненційний розподіл $SE_1(\bar{p},\Delta_n,t)$ та досліджується його апроксимаційні характеристики. Тут же викладено інший підхід відновлення функції щільності сплайн-експоненційними розподілами.

Нехай $x(t)= -ln\ \bar{p}(t)$ ,

$$t_{-1,n}= 2a- t_{1,n}\ ,\quad t_{n+1,n}= 2b- t_{n-1,n}\ ,$$

$$h_{i+1/2,n}= t_{i+1,n}- t_{i,n}\qquad (i=-1,0,1,\dots n),$$

$$\lambda_{i,n} = h_{i+1/2,n}(h_{i-1/2,n}+ h_{i+1/2,n})^{-1}\quad (i= 0,1,\dots,n),$$

$$\bar{x}_{i,n}= x_{i,n}- \frac{1}{6}\Big((1- \lambda_{i,n})(x_{i+1,n}- x_{i,n})- - \lambda_{i,n}(x_{i,n}- x_{i-1,n})\Big)\quad (i= 0,1,\dots,n),$$

$$x_{-1,n}= 2x_{0,n}(2- \lambda_{1,n})+ x_{1,n}\left(1- \frac{2}{\lambda_{1,n}}\right)+ 2x_{2,n}\left(\frac{1- \lambda^2_{1,n}}{\lambda_{1,n}}\right)$$

$$x_{n+1,n}= 2x_{n-2,n}\frac{\lambda^2_{n-1,n}}{(1- \lambda_{n-1,n})} + x_{n-1,n}\left(\frac{1+ \lambda_{n-1,n}}{\lambda_{n-1,n}- 1}\right)+$$

$$2x_{n,n}(1+ \lambda_{n-1,n})$$

$l_n(\bar{p},\Delta_n,t)$ – ломана з вузлами в точках $t_{i,n}$, яка проходить через точки $(t_{i,n};\bar{x}_{i,n})$ $(i=0,1,\dots,n)$. Тоді функцію $exp\ (-l^*_n(\bar{p},t))$, де

$$l^*_n(\bar{p},t)= l_n(\bar{p},\Delta_n,t)+ \delta_0$$

$$\delta_0= ln \int_a^b exp\ (-l_n(\bar{p},\Delta_n,t))\ dt\ ,$$

будемо називати сплайн-експоненційним відновленням функції щільності $\bar{p}(t)$ та позначати $SE_2(\bar{p},\Delta_n,t)$.

Встановлено, що

$$\int_{t_0}^{t_n} SE_2(\bar{p},\Delta_n,t)\,dt = 1$$

та рівномірно по $i$

$$\int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} (\bar{p}(t) - SE_2(\bar{p},\Delta_n,t))\,dt = O(h_n^5) \quad (i = 1,2,\dots,n).$$

В цьому параграфі досліджується проблема якості відновлення функції щільності розподілу за допомогою $SE_2(\bar{p},\Delta_n,t)$.

На основі цих результатів в §2.5 розв'язується задача асимптотично оптимального вибору вузлів при відновленні функції щільності сплайн-експоненційними розподілами та доводиться наступне твердження.

**Теорема 3.** *Нехай чотири рази неперервно диференційована функція щільності* $\bar{p}(t)$ *така, що*

$$\bar{p}(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in (a,b),$$

$$R(t) = \left| \frac{\bar{p}''(t)\cdot\bar{p}(t) - (\bar{p}'(t))^2}{\bar{p}(t)} \right|^{\frac{1}{2}} \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [a,b]$$

*та вузли* $t^*_{i,n}$ *обрані з умови*

$$\int_a^{t^*_{i,n}} R(t)\,dt = \frac{i}{n}\int_a^b R(t)\,dt \quad (i = 0,1,2,\dots,n).$$

*Тоді*

$$\max_{t\in[a,b]} |\bar{p} - SE_2(\bar{p},\Delta^*_n)| = \frac{1}{12n^2}\left(\int_a^b R(t)\,dt\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

*та для будь-якої послідовності* $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ *і будь-якого сплайн-експоненційного відновлення* $SE_2(\bar{p},\Delta_n,t)$, *такого, що*

$$\int_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} \bar{p}(t)\,dt = \int_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} SE_2(\Delta_n, t)\,dt + O(h^4_{i+1/2,n}) \quad (i=0,1,\dots,n-1),$$

та рівномірно по $i$

*виконується нерівність*

$$\max_{t\in[a,b]} |\bar{p}(t) - SE_2(\bar{p},\Delta_n,t)| \geq \frac{1}{12n^2}\left(\int_a^b R(t)\,dt\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Інакше кажучи, якщо вузли вибрані з зазначених умов, то серед усіх послідовностей сплайн-експоненційних відновлень $SE_2(\bar{p},\Delta_n,t)$, з точністю до $O(h^4_{i+1/2,n})$ відновлюючих інтеграли по частковим проміжкам, асимптотично найкращою є послідовність $SE_2(\bar{p},\Delta^*_n,t)$.

В параграфі 2.6. наведені результати перевірки адекватності розглянутих моделей.

На закінченні висловлюю щиру вдячність науковим керівникам Лигуну Анатолію Олександровичу та Приставка Олександру Пилиповичу за постановку задач, постійну увагу та підтримку в роботі.

Основні положення дисертації
опубліковані в наступних роботах.

1. Литвин В.В.(Кармазина В.В.)Некоторые свойства составного нормального распределения//Применение математических методов к решению производственно-экономических задач.-Днепропетровск: ДГУ.-1973.-Вып.2.-с.216-220.
2. Приставка А.Ф., Кармазина В.В. Алгоритм построения нормального и сплайн-нормального распределения одномерной случайной величины.- Киев: РФАП ИК АН УССР,1974.-N 85.-13 с.
3. Приставка А.Ф.,Кармазина В.В. Проверка гипотезы о нормальном и сплайн-нормальном распределении одномерной случайной величины//Математические методы решения задач оптимального управления на ЭВМ.- Днепропетровск;ДГУ, 1974. -С.46-55.

4. Кармазина В.В., Приставка А.Ф. Последовательная процедура определения состояния систем при сплайн-гауссовой аппроксимации плотностей распределения признаков // Оценки характеристик качества сложных систем и системный анализ.-М.- 1980.- с.65-66.
5. Кармазина В.В.,Шумейко А.А.,Приставка А.Ф. Об одном способе восстановления функций плотности распределения с помощью сплайнов / Днепродзержинский индустриальный институт.-Днепродзержинск,1988.-11с.- Деп. в УкрНИИНТИ 5.11.88, N2836-Ук88.
6. Лигун А.А.,Кармазина В.В.,Шумейко А.А. Асимптотически оптимальный выбор узлов при восстановлении функции распределения и функции плотности экспоненциальными сплайнами / Днепродзержинский индустриальный институт.-Днепродзержинск,1989.- 49с. - Деп. в УкрНИИНТИ 3.05.89,N 1205-Ук89.
7. Лигун А.А.,Кармазина В.В. О восстановлении эмпирической функции плотности распределения с помощью гистосплайнов второго порядка / Днепродзержинский индустриальный институт.-Днепродзержинск,1989.- 30с.- Деп. в УкрНИИНТИ 8.06.89,N 1559-Ук89.
8. Лигун А.А.,Кармазина В.В. Восстановление функций плотности распределения и их производных с помощью кубических гистосплайнов / Днепродзержинский индустриальный институт.-Днепродзержинск,1989.- 38с.- Деп. в УкрНИИНТИ 13.11.89,N 2561-Ук89.
9. Лигун А.А.,Кармазина В.В. Восстановление эмпирической функции плотности распределения локальными сплайнами // Современные вопросы теории приближения и комплексного анализа.-К.:Институт математики АН УССР -1990.-с.78-88.
10. Кармазина В.В. Выбор узлов при восстановлении функций плотности распределения экспоненциальными сплайнами//Тез. республик. конф. Экстремальные задачи теории приближения и их приложения, Киев.29-31 мая. 1990 г.-К.: Институт математики АН УССР-1990.-с.70-71.
11. Лигун А.А.,Кармазина В.В. Восстановление функции распределения вероятностей с помощью сплайн-нормальных распределений // Моделирование в механике.- Новосибирск, 1991.- т.5(22),N5, -с.61-69.

Kap



тип. ДГУ зак. 254-100

4. Кармазина В.В., Приступа А.Ф. Последовательные процедуры определения состояния систем при оценке гауссовой аппроксимацией плотностей распределения временем // Оценка характеристик качества сложных систем и системный анализ.-М.- 1980.-ч.4 с.55-65.
5. Кармазина В.В., Кузьменко А.А., Приступа А.Ф. Об одном способе восстановления функций плотности распределения с помощью сплайнов / Днепродзержинский индустриальный институт.-Днепродзержинск,1988.-11с.- Деп. в УкрНИИНТИ 5.11.88, N2826-Ук88.
6. Китун А.А., Кармазина В.В., Кузьменко А.А. Асимптотически оптимальный алгоритм восстановления функции распределения и функции плотности эрмитовыми сплайнами / Днепродзержинский индустриальный институт.-Днепродзержинск,1989.- 15с.- Деп. в УкрНИИНТИ 7.08.89.
7. Китун А.А., Кармазина В.В. Об оптимальной аппроксимации функций плотности распределения с помощью эрмитовых сплайнов третьей степени / Днепродзержинский индустриальный институт.-Днепродзержинск,1989.- 20с.- Деп. в УкрНИИНТИ 14.09.89.
8. Китун А.А., Кармазина В.В. Восстановление функций плотности распределения и их производных с помощью эрмитовых сплайнов / Днепродзержинский индустриальный институт.-Днепродзержинск,1989.-10с.- Деп. в УкрНИИНТИ 18.12.89.
9. Китун А.А., Кармазина В.В. Асимптотически оптимальные эрмитовые сплайны плотностей распределения локальной оценкой // Современные вопросы теории приближения и комплексного анализа.-К.:Институт математики АН УССР,1990.- с.78-88.
10. Кармазина В.В. Выбор узлов при восстановлении функций плотности распределения вероятностей эрмитовыми сплайнами//Тез. республ. конф. "Актуальные вопросы теории приближения и приложения", Киев,17-20 мая,1990.-Киев: Институт математики АН УССР,1990.-с.70-71.
11. Китун А.А., Кармазина В.В. Восстановление функций распределения и плотностей с помощью эрмитовых сплайнов нормальных распределений // Моделирование в экономике.- Новосибирск,1991.- (122),N5, -с.61-69.