МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
Львівський державний університет ім. Івана Франка

На правах рукопису

Лопушанський Олег Васильович

ПІВОБМЕЖЕНІ ТА ОБМЕЖЕНІ ОПЕРАТОРИ В СПЕКТРАЛЬНІЙ ТЕОРІЇ ЛОКАЛЬНО ОПУКЛИХ АЛГЕБР

(01.01.01 - математичний аналіз)

Автореферат дисертації
на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

ЛЬВІВ - 1994

Робота виконана в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.Підстригача АН України

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Радино Яків Валентинович (Мінськ)

доктор фізико-математичних наук
Вайнерман Леонід Иосипович (Київ)

доктор фізико-математичних наук
Зарічний Михайло Михайлович (Львів)

Провідна установа - Математичне відділення Фізико-технічного інституту низьких температур АН України (Харків)

Захист відбудеться "16" червня 1994 р. о 15 год. 30 хв. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 04.04.01 при Львівському державному університеті ім. Івана Франка за адресою :

290001, м.Львів, вул. Університетська 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці Львівського держуніверситету (м.Львів, вул.Драгоманова, 5)

Автореферат розісланий "13" травня 1994 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Микитюк Я.В.

<u>Актуальність теми</u>. Зростання інтересу до теорії ненормованих локально опуклих (ЛО) алгебр викликане систематичним використанням ряду таких алгебр в різних областях математики. В топології - це алгебри неперервних функцій $C(\Omega)$ на некомпактних Ω, в комплексному аналізі і теорії операторів - алгебри голоморфних функцій в областях C^n, в гармонійному аналізі і диференціальних рівняннях - алгебри основних функцій $C^\infty(R^n)$, $\mathcal{D}(R^n)$, згорткові алгебри узагальнених функцій $\mathcal{E}'$ з компактними носіями і $\mathcal{D}'_+$, $\mathcal{S}'_+$ - з носіями в конусах R^n, в квантовій теорії поля - алгебри необмежених операторів.

Найбільш вивченими є алгебри із структурою проективної або індуктивної границі вигляду $\lim\text{-}pr\ X_p$, $\lim\text{-}ind\ X_p$, де (X_p) - банахові алгебри. На такі класи із збереженням значних аналогій переноситься ряд основних положень спектральної теорії банахових алгебр, зокрема, перетворення Гельфанда, функціональне числення. Однак, ряд алгебр необмежених операторів, згадані вище алгебри $\mathcal{E}'$, $\mathcal{D}'_+$, $\mathcal{S}'_+$, не зводяться до такого вигляду. У зв'язку з тим актуальною є проблема розробки спектральної теорії для ЛО алгебр загального вигляду, зокрема, побудови функціонального числення, яке дозволяє визначати від необмежених операторів банахових просторів широкі класи функцій (зокрема, цілі функції).

Питанням спектральної теорії ненормованих ЛО алгебр і операторному численню присвячена обширна література. Алгебри вигляду $\lim\text{-}pr\ X_p$ почали вивчати в 50-х роках Р.Аренс і Е.Майкл; сучасний огляд результатів можна знайти в книзі Хелемского А.Я. (Банаховы и полинормированные алгебры. -М.:Наука, 1989). Теорія алгебр типу $\lim\text{-}ind\ X_p$, в рамках більш загальної концепції борнологічних алгебр, подана в роботах Л.Вальброока. Основні результати, а також їх застосування наведене в книзі Радино Я.В. (Линейные уравнения и борнология.-Минск:Изд-во Белорусского ун-та, 1982). Варіант спектральної теорії ЛО алгебр, яка виходить за рамки вказаних класів алгебр, розвинений в 60-х роках Г.Алланом. Однак, функціональне числення, побудоване на базі цієї теорії, не дозволяє визначати, наприклад, цілі функції від необмежених операторів.

Функціональне числення необмежених операторів в банахових просторах лежить в основі операторних методів, які мають широке коло застосувань. Розвитку операторних методів дослідження лінійних рівнянь присвячені роботи С.Г.Крейна, М.Л.Горбачука і інших авторів, нелінійних рівнянь - роботи В.О.Марченка, В.П.Маслова.

Мета роботи. Розробка спектральної теорії ненормованих ЛО алгебр (а саме, загальних питань, теорії перетворення Гельфанда, функціонального числення) і її застосування до алгебр, породжених необмеженими операторами в банахових просторах.

Наукова новизна. В дисертаційній роботі розроблений новий підхід до спектральної теорії ЛО алгебр, який полягає у виділенні в заданій алгебрі підалгебр із структурою проективної границі банахових алгебр (півобмежених елементів) і побудові розширень з таких підалгебр перетворення Гельфанда і голоморфного функціонального числення на елементи з півобмеженими резольвентами. При цьому показано, що в банахових просторах підалгебри півобмежених елементів природнім чином виникають в результаті звужень необмежених замкнених операторів на асоційовані з ними підпростори ультрагладких векторів. Це дало можливість поширити операторне числення, зокрема, генераторів C_0-півгруп, на класи функцій, які голоморфні в околах обмежених частин спектрів операторів і довести для них аналоги теорем про відображення спектру.

Методика дослідження. В роботі суттєвим чином використовуються методи топологічно-борнологічної двоїстості локально опуклих просторів, зокрема, техніка проективних та індуктивних границь, тензорних добутків, а також теорія банахових алгебр. Основні результати з операторного числення базуються на теорії неквазіаналітичних та квазіаналітичних класів функцій, аналітичній теорії однопараметричних півгруп.

Практична і теоретична цінність. Дисертація має теоретичний характер. Її результати можуть бути використані: при розробці операторних методів дослідження лінійних і нелінійних диференціальних і псевдодиференціальних рівнянь; дослідженні ряду задач комплесного аналізу, зокрема, оболонок голоморфності і згорткових рівнянь; для розвитку алгебраїчних методів статистичної механіки, а також в інших задачах.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідались і обговорювались на Всесоюзних школах по теорії операторів в функціональних просторах (Тернопіль, 1984 р.; Новгород, 1989 р.), Всесоюзній конференції по нелінійних проблемах диференціальних рівнянь і математичної фізики (Тернопіль, 1989 р.), Всесоюзній конференції "Нові підходи до розв'язку диференціальних рівнянь" (Дрогобич, 1991 р.), республіканських школах "Розривні динамічні системи" (Київ, 1989 р.), "Застосування топології в алгебрі і диференціальній геометрії" (Тарту, 1988 р., 1991 р.), Міжнародній конференції до 100-річчя С.Банаха (Львів, 1992 р.), Міжнародній математичній школі "Алгебраїчні і геометричні методи в математичній фізиці" (Кацивелі, 1993 р.), наукових сесіях Відділення математики АН України (Київ, 1992 р.), математичної комісії НТШ (Львів, 1993 р.), семінарі з функціонального аналізу Білоруського університету (1992 р.), семінарах Львівського університету з функціонального аналізу (1992 р., 1994 р.), диференціальних рівнянь (1992 р.) і з топології (1993 р.), семінарі Львівського математичного товариства (1994 р.).

Структура і обсяг роботи. Дисертаційна робота складається і вступу, 5-ти розділів: 1.Топологічні властивості множення; 2.Спектральна класифікація елементів локально опуклих алгебр; 3.Числення Рісса-Данфорда; 4.Піврегулярний спектр; 5.Функціональне числення на піврегулярному спектрі; додатку і списку літератури (170 назв.) Параграфи пронумеровані двома цифрами, теореми і інші твердження - трьома. Обсяг роботи 228 стор.

Основні положення, які виносяться на захист:

1.Голоморфне функціональне числення на піврегулярних, сумісних піврегулярних і регулярних спектрах елементів локально опуклих алгебр, теореми про відображення таких спектрів.

2.Перетворення Гельфанда на піврегулярних спектрах комутативних локально опуклих алгебр і його властивості.

3.Операторне числення на просторах ультрагладких векторів, теореми про щільність таких просторів для генераторів C_0-півгруп, теореми про відображення спектрів необмежених операторів в банахових просторах.

4.Основні структурні теореми про півобмежені і рівномірно півобмежені елементи локально опуклих алгебр та оператори локально опуклих просторів.

5.Борнологічне узагальнення теореми Банаха-Штейнгауза та основані на ньому ознаки гіпонеперервності і неперервності операції множення в локально опуклих алгебрах.

6.Властивості однопараметричних півгруп в локально опуклих алгебрах (теореми про неперервність і експоненціальне зображення типу Хілла-Іосіди).

ЗМІСТ РОБОТИ

Операція множення в ЛО алгебрах за означенням є неперервною окремо по кожному співмножнику. У 1-му розділі наведені результати про умови гіпонеперервності, обмеженості, секвенціальної неперервності і неперервності операції множення.

Нехай далі $\mathfrak{X}$ - гаусдорфова ЛО алгебра з одиницею 1 ($\mathfrak{U}$ - ЛО простір) над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, $P=\{p,q,r,\ldots\}$ -набір півнорм, який визначає топологію $\mathfrak{X}$ (відп. $\mathfrak{U}$). Припускаємо, що набір P напрямлений частинним порядком $\{p\le q:\ p(x)\le q(x),\ \forall x\in\mathfrak{X}\}$.

<u>Опуклою</u> <u>борнологією</u> $\mathfrak{X}$ називається будь-яка сукупність β обмежених множин $\{S,K,\ldots\}$ із $\mathfrak{X}$, яка містить всі їх підмножини і задовольняє умовам: $\lambda S\in\beta,\ \forall\lambda\in\mathbb{C}$; $S+K\in\beta$; $\overline{\langle S\rangle}\in\beta$; $\mathfrak{X}=\bigcup\limits_{S\in\beta} S$, де $\langle S\rangle$ -опукла оболонка S і риска позначає замикання. Через s - позначаємо сукупність скінчених множин в $\mathfrak{X}$ (<u>точкову</u> <u>борнологію</u>), через b - обмежених (<u>борнологія</u> <u>фон</u> <u>Неймана</u>), через k - <u>компактно-опуклу</u> <u>борнологію</u>, породжену опуклими компактами. Для борнологій β і β'' в $\mathfrak{X}$ - $\inf(\beta;\beta'')$ породжується $\{|\overline{\langle S\cup S''\rangle}|:S\in\beta,S''\in\beta''\}$, $\sup(\beta,\beta'')$ -$\{|\overline{\langle S\cap S''\rangle}|:S\in\beta,S''\in\beta''\}$, де $|K|$ - урівноважена оболонка K. Далі обмежені множини S із $\mathfrak{X}$ такі, що $S=|\overline{\langle S\rangle}|$ названі <u>дисками</u>. Диску S відповідає в $\mathfrak{X}$ векторний підпростір $\mathbb{C}\cdot S$, який разом з нормою $\|x\|_S=\inf\{\lambda>0:x\in\lambda S\}$ позначається через $\mathfrak{X}(S)$. Борнологія β називається <u>банаховою</u> (<u>бочковою</u>), якщо простори $\{\mathfrak{X}(S):\ S=|\overline{\langle S\rangle}|\in\beta\}$ банахові (бочкові); β - банахова тоді і тільки тоді, коли $\forall\ S=|\overline{\langle S\rangle}|\in\beta$ послідовності Коші простору $\mathfrak{X}(S)$ збігаються в $\mathfrak{X}$. Зокрема, k, s - банахові. Очевидно, банахові борнології є бочковими.

Наступне узагальнення теореми Банаха-Штейнгауза відноситься до основних результатів розділу 1. Нехай $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{G}$ -ЛО простори, $\mathfrak{L}(\mathfrak{U},\mathfrak{G})$ -простір (алгебра, при $\mathfrak{U}=\mathfrak{G}$) лінійних неперервних операторів з $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{G}$. Кожній борнології β з $\mathfrak{U}$ відповідає в $\mathfrak{L}(\mathfrak{U},\mathfrak{G})$ топологія рівномірної збіжності на β (далі, (β)-топологія), що позначаємо через $L_\beta(\mathfrak{U},\mathfrak{G})$. Якщо кожна множина U із $\mathfrak{U}$ з властивостями: (a) $U=|\langle U\rangle|$; (b) $\forall S\in\beta,\ \exists\lambda>0$: $S\subset\lambda U$; є околом нуля, то $\mathfrak{U}$ називається (β)-бочковим простором (бочковим, при $\beta=s$).

ТЕОРЕМА 1.3.2. *Нехай $\beta_{\mathfrak{U}}$ - найслабша бочкова борнологія $\mathfrak{U}$ і $\omega=\inf(\beta;\beta_{\mathfrak{U}})$. Якщо простір $\mathfrak{U}$ є (ω)-бочковим, то борнологія фон Неймана простору $L_\beta(\mathfrak{U},\mathfrak{G})$ складається з одностайно неперервних множин.*

Кожному елементу a ЛО алгебри $\mathfrak{X}$ відповідають оператори a_-: $\mathfrak{X}\ni x\to ax\in\mathfrak{X}$ (a_+: $\mathfrak{X}\ni x\to xa\in\mathfrak{X}$) і відображення $\mathfrak{X}\ni a\to a_-\in L(\mathfrak{X})$ ($\mathfrak{X}\ni a\to a_+\in L(\mathfrak{X})$) називається лівим (правим) регулярним представленням $\mathfrak{X}$. Сукупність множин $\{S\}$ в $\mathfrak{X}$ таких, що $S_\pm=\{a_\pm\in L(\mathfrak{X}):\ a\in S\}$ одностайно неперервні над $\mathfrak{X}$, утворюють опуклі борнології - $\omega_\pm$. Виявляється, що звуження операції множення $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\ni(x,y)\to xy\in\mathfrak{X}$ на підмножини вигляду $S\times\mathfrak{X}$ і $\mathfrak{X}\times K$, де $S\in\omega_-$ і $K\in\omega_+$, є неперервними.

1.4.1. *Ліве (праве) регулярне представлення $\mathfrak{X}$ реалізує топологічний ізоморфізм в алгебру $L_{\omega_+}(\mathfrak{X})$ (антиізоморфізм в $L_{\omega_-}(\mathfrak{X})$).*

Множення в $\mathfrak{X}$ називається гіпонеперервним зліва (справа), якщо $\omega_-=b$ (відп., $\omega_+=b$). Якщо множення в $\mathfrak{X}$ гіпонеперервне зліва (справа), то воно обмежене і секвенціально неперервне. Наслідком теореми 1.3.2 є наступний критерій гіпонеперевності множення.

ТЕОРЕМА 1.4.3. *Нехай $\beta_{\mathfrak{X}}$ - найслабша бочкова борнологія $\mathfrak{X}$ і $\omega=\inf(\beta_{\mathfrak{X}};\omega_-)$ ($\omega=\inf(\beta_{\mathfrak{X}};\omega_+)$). Якщо $\mathfrak{X}$ - (ω)-бочкова алгебра, то множення в $\mathfrak{X}$ гіпонеперервне зліва (справа). Зокрема, множення бочкової алгебри гіпонеперервне зліва і справа.*

Множення борнологічної ЛО алгебри $\mathfrak{X}$ неперервне тоді і тільки тоді, коли воно обмежене, т.т., $S\cdot K\in b$, $\forall S,K\in b$.

1.4.10. *Якщо алгебра $\mathfrak{X}$ повна і борнологічна, то множення в $\mathfrak{X}$ неперервне.*

Останнє твердження підсилює відому теорему Р.Аренса про не -

перервність множення алгебри Фреше. Із сформульованих тверджень також випливає, що згортка в алгебрі $\mathcal{D}'_+$ обмежена в слабкій топології, в алгебрах $\mathcal{E}'$ і $\mathcal{S}'_+$ неперервна в сильних топологіях. Це дозволяє навести конструкцію ЛО поля часток вигляду $\mathcal{S}'_+/\mathcal{S}'_+$ з неперервним множенням для числення Мікусінського від багатьох змінних.

Якщо $\langle\mathfrak{U},\mathfrak{G}\rangle$ - відокремлювана дуальна пара ЛО просторів з білінійним функціоналом $\mathfrak{U}\times\mathfrak{G}\ni(x,y)\to\langle x,y\rangle\in\mathbb{C}$, β - борнологія в $\mathfrak{U}$ (в $\mathfrak{G}$), то на $\mathfrak{G}=\mathfrak{L}(\mathfrak{U},\mathbb{C})$ (відп., на $\mathfrak{U}=\mathfrak{L}(\mathfrak{G},\mathbb{C})$) задана (β)-топологія, яку позначимо через $\beta(\mathfrak{U},\mathfrak{G})$ (відп., $\beta(\mathfrak{G},\mathfrak{U})$). Далі $\mathfrak{G}_\beta=\mathfrak{G}_{\beta(\mathfrak{G},\mathfrak{U})}=\mathfrak{L}_\beta(\mathfrak{U},\mathbb{C})$ (відп., $\mathfrak{U}_\beta=\mathfrak{U}_{\beta(\mathfrak{U},\mathfrak{G})}=\mathfrak{L}_\beta(\mathfrak{G},\mathbb{C})$), зокрема, (β)-топологія при $\beta=s$ називається <u>слабкою</u>, при $\beta=k$ - <u>топологією Маккі</u>, при $\beta=b$ - <u>сильною</u>.

Нехай $\mathfrak{U}^*$ - спряжений простір до $\mathfrak{U}$ і $\mathfrak{U}^*_\beta=\mathfrak{L}_\beta(\mathfrak{U},\mathbb{C})$. Введемо простори $\mathfrak{U}^{**}(\beta)=\mathfrak{L}(\mathfrak{U}^*_\beta,\mathbb{C})$ і сформулюємо основний критерій (β)-бочковості.

ТЕОРЕМА 1.5.2. *Наступні умови еквівалентні*: (a) *простір* $\mathfrak{U}$ *є* (β)*-бочковим*; (b) *кожна обмежена підмножина в* $\mathfrak{U}^*_\beta$ *одностайно неперервна над* $\mathfrak{U}$; (c) *сильна топологія* $b[\mathfrak{U}^{**}(\beta),\mathfrak{U}^*_b]$ *індукує в* $\mathfrak{U}$ *задану*.

Якщо $\beta=b$, то простір $\mathfrak{U}^{**}=\mathfrak{U}^{**}(b)$ називається <u>другим сильним спряженим</u> до $\mathfrak{U}$. В загальному випадку $\mathfrak{U}\subset\mathfrak{U}^{**}(\beta)\subset\mathfrak{U}^{**}$. При $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}^{**}$, $\mathfrak{U}$ називається <u>піврефлексивним</u>. Якщо $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}_{b(\mathfrak{U}^{**},\mathfrak{U}^*_s)}$ - топологічний ізоморфізм, то $\mathfrak{U}$ - <u>рефлексивний</u>.

1.5.1. *Якщо ЛО алгебра* $\mathfrak{X}$ *- піврефлексивна і борнологічна, або рефлексивна, то множення в* $\mathfrak{X}$ *неперервне*.

Простір $\mathfrak{U}$ називається (β)-<u>повним</u> (<u>квазіповним</u>, при $\beta=b$), якщо кожна напрямленість Коші простору $\mathfrak{U}$, яка належить β, збігається в $\mathfrak{U}$. Нехай $\tilde{\mathfrak{U}}(\beta)=\bigcup_{s\in\beta}\tilde{S}$ - (β)-поповнення $\mathfrak{U}$, де $\tilde{S}$ - замикання S в поповненні $\tilde{\mathfrak{U}}$ простору $\mathfrak{U}$. Відзначимо, що (β)-поповнення $\tilde{\mathfrak{X}}(\omega_\pm)$ довільної ЛО алгебри $\mathfrak{X}$ завжди є алгебрами. Слабкі (β)-поповнення припускають наступний опис в термінах двоїстості.

ТЕОРЕМА 1.5.4. *Справедливі співвідношення*: (a) $[\tilde{\mathfrak{U}}_{s(\mathfrak{U},\mathfrak{U}^*)}](\beta)=$

$=\mathfrak{U}^{**}(\beta)=\bigcup_{s\in\beta} S^{oo}$, *де* S^{oo}- *біполяри відносно* $\langle\mathfrak{U}^{**}(\beta),\mathfrak{U}^{*}\rangle$; (b) $\mathfrak{U}^{**}(\beta)=$ $=\mathfrak{U}^{**}(k_{\beta})$, *де* k_{β} *- звуження на* $\mathfrak{U}_{s(\mathfrak{U},\mathfrak{U}^{*})}$ *борнології* k *простору* $[\mathfrak{U}^{**}(\beta)]_{s[\mathfrak{U}^{**}(\beta),\mathfrak{U}^{*}]}$; (c) *якщо* $\beta=b$, *то* $k_{\beta}=b$ *і* $\mathfrak{U}^{**}=[\tilde{\mathfrak{U}}_{s(\mathfrak{U},\mathfrak{U}^{*})}](b)$.

1.5.5. *Якщо на ЛО алгебрі* $\mathfrak{X}$ *задана топологія* $s(\mathfrak{X},\mathfrak{X}^{*})$, *то* $\tilde{\mathfrak{X}}(\omega_{\pm})=\mathfrak{X}^{**}(\omega_{\pm})$.

В 1.7 досліджуються простори гладких векторів замкненого оператора $\mathcal{A}$: $\mathcal{D}(\mathcal{A})\subset\mathfrak{U}\to\mathfrak{U}$ довільного ЛО простору $\mathfrak{U}$ із щільною областю визначення. Нехай $\mathfrak{E}^{1}(\mathcal{A})=\mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\mathfrak{E}^{n+1}(\mathcal{A})=\{u\in\mathfrak{E}^{n}(\mathcal{A}):\mathcal{A}u\in\mathfrak{E}^{n}(\mathcal{A})\}$, півнорми $\{q_{0,p}\}_{p\in P}$ і $\{q_{n,p}\}_{p\in P}$, де $q_{n,p}(u)=\{\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}\cdot[p(\mathcal{A}^{k}u)]^{r}\}^{1/r}$ і $q_{0,p}(u)=$ $=p(u)$ при $u\in\mathfrak{E}^{n}(\mathcal{A})$, $(1\le r<\infty)$, задають топологію на просторі $\mathfrak{E}^{n}(\mathcal{A})$ з відповідним індексом $n\in\mathbb{N}$. Тоді звуження оператора $\mathcal{A}$ породжують оператори $\mathcal{A}_{n}$ над $\mathfrak{E}^{n}(\mathcal{A})$ з областю визначення $\mathfrak{E}^{n+1}(\mathcal{A})$.

1.7.1.*Кожний оператор* $\mathcal{A}_{n}$ *над* $\mathfrak{E}^{n}(\mathcal{A})$ *замкнений і неперервний із* $\mathfrak{E}^{n+1}(\mathcal{A})$ *в* $\mathfrak{E}^{n}(\mathcal{A})$. *Якщо простір* $\mathfrak{U}$ *- повний (секвенціально повний, простір Фреше або Банаха), то простори* $\mathfrak{E}^{n}(\mathcal{A})$ *повні (відп.,секвенціально повні, Фреше або Банаха). Якщо* $\mathfrak{U}$ *- рефлексивний простір Фреше (Банаха), то кожен із просторів* $\mathfrak{E}^{n}(\mathcal{A})$ *є рефлексивним простором Фреше (відп.; Банаха).*

Нехай $\mathfrak{E}^{\infty}(\mathcal{A})=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathfrak{E}^{n}(\mathcal{A})=\lim\text{-}pr_{n\to\infty}\,\mathfrak{E}^{n}(\mathcal{A})$ - <u>простір гладких векторів оператора</u> $\mathcal{A}$, $\mathfrak{E}^{-\infty}(\mathcal{A})$ -спряжений простір до $\mathfrak{E}^{\infty}(\mathcal{A})$, $\mathfrak{E}^{-n}(\mathcal{A})$ -до $\mathfrak{E}^{n}(\mathcal{A})$.

1.7.4. *Якщо на* $\mathfrak{E}^{-\infty}(\mathcal{A})$ *і* $\mathfrak{E}^{-n}(\mathcal{A})$ *задані топології Маккі, то існує топологічний ізоморфізм* $\mathfrak{E}^{-\infty}(\mathcal{A})=\lim\text{-}ind_{n\to\infty}\,\mathfrak{E}^{-n}(\mathcal{A})$. *Якщо простір* $\mathfrak{U}$ *рефлексивний, то ізоморфізм реалізується для сильних топологій.*

Якщо $\mathcal{A}_{\infty}$ - звуження $\mathcal{A}$ на $\mathfrak{E}^{\infty}(\mathcal{A})$, то $\mathcal{A}_{\infty}\in\mathfrak{L}[\mathfrak{E}^{\infty}(\mathcal{A})]$. Виникає питання, коли алгебра $\mathfrak{L}[\mathfrak{E}^{\infty}(\mathcal{A})]$ нетривіальна. Наступна теорема є розвитком відомого результату І.М.Гельфанда про однопараметричні групи операторів банахових просторів і також базується на властивостях одностайної неперервності.

ТЕОРЕМА 1.7.3. *Якщо простір $\mathfrak{U}$ секвенціально повний і A - генератор одностайно неперервної півгрупи класу C_0, то вкладення $\mathfrak{E}^{\infty}(A)\subset \mathfrak{E}^{n+1}(A)\subset \mathfrak{E}^{n}(A)\subset\mathfrak{U}$ неперервні і щільні, зокрема, $\mathfrak{L}[\mathfrak{E}^{\infty}(A)]=(0)$*

У 2-му розділі наведені основні структурні теореми і приклади про півобмежені та рівномірно півобмежені елементи ЛО алгебр.

Елемент $x\in\mathfrak{X}$ називається <u>півобмеженим</u> (<u>зліва</u>), якщо $\forall p\in P$, $\exists\ \lambda=\lambda(p,x)>0$: $p(xy)\le\lambda p(y)$, $\forall y\in\mathfrak{X}$. Підалгебру півобмежених елементів $\mathfrak{X}$ позначимо через $\mathcal{A}_-(\mathfrak{X})$ і задамо на $\mathcal{A}_-(\mathfrak{X})$ топологію, яка визначається півнормами $(p_-)_{p\in P}$ вигляду $p_-(x)=\sup\limits_{p(x)\le 1} p(xy)$. Півнорми p_- субмультиплікативні: $p_-(xy)\le p_-(x)p_-(y)$, $\forall x,y\in\mathcal{A}_-(\mathfrak{X})$; і $\mathcal{A}_-(\mathfrak{X})$ -локально мультиплікативно-опукла (ЛМО) алгебра, неперервно вкладена в $\mathfrak{X}$.

Нехай $\mathcal{P}=(P)$ - напрямлені набори півнорм, які визначають топологію $\mathfrak{X}$. Наведемо конструкцію розкладу підалгебри $\mathcal{A}_-(\mathfrak{X})$ в проективну систему нормованих алгебр. Нехай $V_p=\{y\in\mathfrak{X}:p(y)\le 1\}$, тоді $V_{-p}=\{x\in\mathfrak{X}:xV_p\subset V_p\}$ - бочка така, що $V^2_{-p}\subset V_{-p}$ і $p_-(x)=\inf\{\lambda>0:x\in\lambda V_{-p}\}$ - функціонал Мінковського, визначений на множині $\mathbb{C}\cdot V_{-p}$. Зокрема, $\mathbb{C}\cdot V_{-p}$ -підалгебра в $\mathfrak{X}$, $Ker(p_-)$ -двосторонній ідеал і можна визначити фактор-алгебру $\mathcal{A}_{-p}(\mathfrak{X})=\mathbb{C}\cdot V_{-p}/Ker(p_-)$ з нормою $\|x_{-p}\|_{-p}=p_-(x)$, де $x_{-p}=x+Ker(p_-)$ -лишок елемента $x\in\mathbb{C}\cdot V_{-p}$ по ідеалу $Ker(p_-)$. Нарешті, $\mathcal{A}_-(\mathfrak{X})=\bigcap\limits_{p\in P}(\mathbb{C}\cdot V_{-p})$ і при $p\le q$ визначені неперервні гомоморфізми ${}^{-q}\pi_{-p}: \mathcal{A}_{-q}(\mathfrak{X})\ni x_{-q}\to x_{-p}\in\mathcal{A}_{-p}(\mathfrak{X})$, які породжують проективну границю $\lim\limits_{p\in P}\text{-}pr\ \mathcal{A}_{-p}(\mathfrak{X})$.

ТЕОРЕМА 2.1.2. *Відображення $\mathcal{A}_-(\mathfrak{X})\ni x\to(x_{-p})\in\lim\limits_{p\in P}\text{-}pr\ \mathcal{A}_{-p}(\mathfrak{X})$ реалізує топологічний ізоморфізм, в якому проективні границі, породжені різними наборами P із $\mathcal{P}$, ізоморфні.*

Як наслідок, одержуємо наступну ознаку півобмеженості.

2.1.4. *Елемент $x\in\mathfrak{X}$ півобмежений тоді і тільки тоді, коли $\forall p\in P$, $\exists\gamma=\gamma(x,p)>0$, $q\in P$: $p(x^k y)\le\gamma^k q(y)$, $\forall y\in\mathfrak{X}$, $k\in\mathbb{Z}_+$.*

Позначимо через $\tilde{\mathfrak{X}}$ і $\tilde{\mathcal{A}}_{-}(\mathfrak{X})$ поповнення відповідних ЛО просторів. Очевидно, $\tilde{\mathcal{A}}_{-}(\mathfrak{X})$ - повна ЛМО алгебра, однак в $\tilde{\mathfrak{X}}$ множення, взагалі кажучи, не визначене. Тим не менше, має місце неперервне вкладення $\tilde{\mathcal{A}}_{-}(\mathfrak{X})\subset\tilde{\mathfrak{X}}$. Алгебра $\mathfrak{X}$ називається <u>півповною</u> (<u>зліва</u>), якщо $\tilde{\mathcal{A}}_{-}(\mathfrak{X})=\mathcal{A}_{-}(\mathfrak{X})$

2.1.6. ***Алгебра $\mathfrak{X}$ півповна тоді і тільки тоді, коли кожна напрямленість Коші із $\mathcal{A}_{-}(\mathfrak{X})$ збігається в $\mathfrak{X}$.***

Елемент $x\in\tilde{\mathcal{A}}_{-}(\mathfrak{X})$ називається <u>рівномірно</u> <u>півобмеженим</u> (<u>зліва</u>), якщо $\forall p\in P$, $\exists\lambda=\lambda(x)>0$ (залежне тільки від x) таке, що $\tilde{p}(xy)\le\lambda\tilde{p}(y)$, $\forall y\in\tilde{\mathfrak{X}}$, де $\tilde{p}$ - неперервне розширення p на $\tilde{\mathfrak{X}}$ ($\tilde{p}_{-}$ - на $\tilde{\mathcal{A}}_{-}(\mathfrak{X})$). Підалгебру рівномірно півобмежених елементів із $\tilde{\mathfrak{X}}$ позначимо через $\tilde{\mathcal{B}}_{-}(\mathfrak{X})$ і задамо на ній норму $\|x\|_{-P}=\sup\limits_{p\in P}\tilde{p}_{-}(x)$. Нехай $\mathcal{B}_{-}(\mathfrak{X})=\tilde{\mathcal{B}}_{-}(\mathfrak{X})\cap\mathfrak{X}$.

ТЕОРЕМА 2.2.1. *Підалгебра $\tilde{\mathcal{B}}_{-}(\mathfrak{X})$ - банахова і з точністю до топологічного ізоморфізму не залежить від вибору P із сукупності $\mathcal{P}$. Вкладення $\tilde{\mathcal{B}}_{-}(\mathfrak{X})\subset\tilde{\mathcal{A}}_{-}(\mathfrak{X})$ - неперервне і $\|1\|_{-P}=1$.*

2.2.2. ***Елемент $x\in\tilde{\mathcal{A}}_{-}(\mathfrak{X})$ рівномірно півобмежений тоді і тільки тоді, коли $\forall p\in P$, $\exists\gamma=\gamma(x)>0$, $q\in P$: $\tilde{p}(x^k y)\le\gamma^k\cdot\tilde{q}(y)$, $\forall y\in\tilde{\mathfrak{X}}$, $k\in\mathbb{Z}_+$.***

Елемент $x\in\mathfrak{X}$ називається <u>обмеженим</u>, якщо існує число $\gamma=\gamma(x)>0$ таке, що $\left\{\dfrac{x^k}{\gamma^k}\right\}_{k\in\mathbb{Z}+}\in b$; x -обмежений тоді і тільки тоді, коли $x\in\mathfrak{X}_m$, де $\mathfrak{X}_m=\{\cup\mathfrak{X}(S):\ S\in m(\mathfrak{X})\}$ і $m(\mathfrak{X})=\{S=\overline{|\langle S\rangle|}\in\mathfrak{X}:\ S^2\subset S\}$. Наступна теорема встановлює умови (а саме, гіпонеперервність зліва множення), при яких спектральна теорія Г.Аллана охоплюється нашим підходом.

ТЕОРЕМА 2.2.7. *Якщо множення в алгебрі $\mathfrak{X}$ гіпонеперервне зліва, то реалізується топологічний ізоморфізм $\tilde{\mathcal{B}}_{-}(\mathfrak{X})=\cdot\lim\text{-}\operatorname{ind}\limits_{S\in m(\mathfrak{X})}\tilde{\mathfrak{X}}(S)$, де $\tilde{\mathfrak{X}}(S)=\mathbb{C}\cdot\tilde{S}$, $\tilde{S}$ - замикання S в $\tilde{\mathcal{A}}_{-}(\mathfrak{X})$.*

2.2.8. ***Якщо $\mathfrak{X}$ псевдоповна*** (т.т., алгебри $\{\mathfrak{X}(S):S\in m(\mathfrak{X})\}$ -банахові) ***і множення в $\mathfrak{X}$ гіпонеперервне зліва, то $\mathcal{B}_{-}(\mathfrak{X})=\lim\text{-}\operatorname{ind}\limits_{S\in m(\mathfrak{X})}\mathfrak{X}(S)$ і алгебра $\mathcal{B}_{-}(\mathfrak{X})$ - банахова.***

Півобмежені і обмежені елементи алгебри $L_\mu(\mathfrak{U})$ не залежать від борнологій β ЛО простору $\mathfrak{U}$. Це формулюється наступним чином. Скажемо, що оператор $T\in\mathfrak{L}(\mathfrak{U})$ півобмежений, якщо $\forall p\in P$, $\exists\lambda=\lambda(p,T)>0$: $p(Tu)\le\lambda p(u)$, $\forall u\in\mathfrak{U}$. Підалгебру півобмежених операторів із $\mathfrak{L}(\mathfrak{U})$ позначимо через $\mathcal{A}(\mathfrak{U})$ і задамо на ній півнорми $\bar{P}=\{\bar{p}\}_{p\in P}$, де $\bar{p}(T)=\sup\limits_{p(u)\le 1} p(Tu)$, $T\in\mathcal{A}(\mathfrak{U})$ і $u\in\mathfrak{U}$.

ТЕОРЕМА 2.3.2. *Для будь-якої з борнологій β = k, s, b реалізується топологічний ізоморфізм $\mathcal{A}(\mathfrak{U})\simeq\mathcal{A}\_(\mathfrak{X})$, де $\mathfrak{X}=\mathfrak{L}_\beta(\mathfrak{U})$.*

Оператор $T\in\mathfrak{L}(\mathfrak{U})$ - рівномірно півобмежений, якщо $\forall p\in P$, $\exists\lambda=\lambda(T)>0$: $p(Tu)\le\lambda p(u)$, $\forall u\in\mathfrak{U}$. На підалгебрі $\mathcal{B}(\mathfrak{U})$ - рівномірно півобмежених операторів задаємо норму $\|T\|_P=\sup\limits_{p\in P}\bar{p}(T)$.

ТЕОРЕМА 2.3.4. *Нехай простір $\mathfrak{U}$ - повний. Для будь-якої з борнологій β = k, s, b реалізується топологічний ізоморфізм банахових алгебр $\mathcal{B}(\mathfrak{U})\simeq\mathcal{B}\_(\mathfrak{X})$, де $\mathfrak{X}=\mathfrak{L}_\beta(\mathfrak{U})$.*

2.3.5. *Для ЛО алгебри $\mathfrak{U}$ існує ізометрія $\mathcal{B}(\mathfrak{U})\simeq\mathfrak{L}_b[\mathcal{B}\_(\mathfrak{U})]$, де в $\mathfrak{L}_b[\mathcal{B}\_(\mathfrak{U})]$ задана норма* $\|T\|=\sup\limits_{x\in\mathcal{B}\_(\mathfrak{U})}\dfrac{\|Tx\|_{-P}}{\|x\|_{-P}}$ *і* $\|x\|_{-P}=\sup\limits_{p\in P} p\_(x)$.

Відзначимо топологічний ізоморфізм $lim\text{-}pr\mathcal{A}\_(\mathfrak{X}_p)\simeq\mathcal{A}\_(lim\text{-}pr\mathfrak{X}_p)$, а також алгебраїчну рівність $\mathcal{A}\_(\mathfrak{X}\otimes\mathfrak{Y})=\mathcal{A}\_(\mathfrak{X})\otimes\mathcal{A}\_(\mathfrak{Y})$, де $(\mathfrak{X}_p)$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ - ЛО алгебри і тензорні добутки проективні.

В 2.5-2.6 наведена одна загальна конструкція, яка довволяє поставити у відповідність необмеженому замкненому лінійному оператору A: $\mathcal{D}(A)\subset\mathfrak{U}\to\mathfrak{U}$ банахового простору $\mathfrak{U}=(\mathfrak{U},\|.\|)$ деякий півобмежений оператор. Нехай $\mathcal{D}(A)=\mathfrak{U}$, $M=(\mu_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ - послідовність додатніх чисел і $1\le r<\infty$. Для $\forall\nu>0$ визначимо підпростір $\mathcal{D}^\nu_r(A)=\{u\in\mathfrak{U}:\ \|u\|_{\nu,r}<\infty\}$, де $\|u\|_{\nu,r}=\left[\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{\|A^k u\|}{\nu^k\cdot\mu_k}\right)^r\right]^{1/r}$ - норма в $\mathcal{D}^\nu_r(A)$. Простори $\mathcal{D}^\nu_r(A)$ банахові (гільбертові, якщо $\mathfrak{U}$ гільбертів і $r=2$) і при $0<\nu\le\gamma<\infty$ справедливі неперервні вкладення $\mathcal{D}^\nu_r(A)\subset\mathcal{D}^\gamma_r(A)\subset\mathfrak{U}$. Індуктивна границя $\mathcal{D}^M_r(A)=\bigcup\limits_{\nu>0}\mathcal{D}^\nu_r(A)=\mathop{lim\text{-}ind}\limits_{\nu\to+\infty}\mathcal{D}^\nu_r(A)$ гаусдорфова і вкладення $\mathcal{D}^M_r(A)\subset\mathfrak{U}$ неперервне. Кожна обмежена підмножина простору $\mathcal{D}_r^M(A)$ міститься і обмежена в деякому просторі $\mathcal{D}_r^{\nu}(A)$. Позначимо через $\mathcal{D}_r^{-M}(A)$ і $\mathcal{D}_r^{-\nu}(A)$ - спряжені простори до $\mathcal{D}_r^M(A)$ і $\mathcal{D}_r^{\nu}(A)$.

2.5.4. *Якщо на просторах $\mathcal{D}_r^{-M}(A)$ і $\mathcal{D}_r^{-\nu}(A)$ задані їх сильні топології або топології Маккі, то існує топологічний ізоморфізм $\mathcal{D}_r^{-M}(A) = \lim\text{-}pr_{\nu\to+\infty}\ \mathcal{D}_r^{-\nu}(A)$, в якому проективна границя зведена. Зокрема, в сильній топології $\mathcal{D}_r^{-M}(A)$ - простір Фреше.*

Індуктивна границя $\mathcal{D}_r^M(A)$ називається <u>простором</u> <u>ультрагладких</u> <u>векторів</u> A, якщо існує число $d > 0$ таке, що $\mu_{k+1} \le d^k\cdot\mu_k$, $\forall k\in\mathbb{Z}_+$.

2.5.5. *Простір ультрагладких векторів $\mathcal{D}_r^M(A)$ інваріантний відносно оператора A і звуження $A_M = A_{|\mathcal{D}_r^M(A)}$ належить $\mathcal{L}[\mathcal{D}_r^M(A)]$.*

Зауважимо, що випадок $\mu_k = k!$ (аналітичних векторів) вперше розглянув Е.Нельсон і тут є обширна література; випадок $\mu_k = 1$ векторів експоненціального типу досліджений Я.В.Радино; Р.Білз вивчав абстрактні класи Жевре ($\mu_k = k^{\beta k}$, $\beta>1$). Загальні класи таких векторів (без виділення умови $\mu_{k+1} \le d^k\cdot\mu_k$) введені в роботах М.Л.Горбачука і В.І.Горбачук.

Наступні властивості просторів ультрагладких векторів необмеженого замкненого оператора встановлені в роботі [7].

ТЕОРЕМА 2.5.6. *Нехай $\mathcal{D}_r^M(A)$ - простір ультрагладких векторів оператора A. Тоді справедливі наступні твердження:* (a) *оператор A_{-M}, спряжений до A_M відносно дуальної пари $\langle\mathcal{D}_r^M(A), \mathcal{D}_r^{-M}(A)\rangle$, є півобмеженим над простором $\mathcal{D}_r^{-M}(A)$ із сильною топологією*; (b) *кожен підпростір $\mathcal{D}_r^{\nu}(A)$ інваріантний відносно оператора A і відповідне звуження $A_\nu = A_{|\mathcal{D}_r^{\nu}(A)}$ є обмеженим оператором над $\mathcal{D}_r^{\nu}(A)$.*

Побудуємо за послідовністю M функцію $\mu(\xi) = \sup_{n\ge0}\frac{\xi^n}{\mu_n}$ додатнього аргументу ξ. Якщо інтеграл $\int_\delta^\infty \frac{\log\mu(\xi)}{\xi^2}d\xi$, де $\delta>0$, розбіжний

(збіжний), то M називають <u>квазіаналітичною</u> (<u>неквазіаналітичною</u>) послідовністю.

ТЕОРЕМА 2.6.4. *Якщо $\mathcal{D}_r^M(A)$ - простір ультрагладких векторів A, A -генератор півгрупи (обмеженої групи) класу C_0 над $\mathfrak{U}$, M - неквазіаналітична послідовність (квазіаналітична і $\mu_k \geq 1$), то $\overline{\mathcal{D}_r^M(A)}=\mathfrak{U}$.*

Третій розділ присвячений побудові розширення голоморфного числення з нормованої підалгебри рівномірно півобмежених елементів на всю алгебру і вивченню його спектральних властивостей.

Групу оборотніх елементів алгебри $\mathfrak{X}$ позначаємо через $\mathfrak{X}^{-1}$, сферу Рімана - через $\dot{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$. Область визначення в $\dot{\mathbb{C}}$ резольвенти $R(x,\lambda)=(\lambda 1-x)^{-1}$ елемента $x\in\mathfrak{X}$ (резольвентна множина) має вигляд $R(x)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda 1-x\in\mathfrak{X}^{-1}\}\cup\{\infty\}$, зокрема, $R(x,\infty)=0$, оскільки при $\mu=\lambda^{-1}\in\mathbb{C}$, $R(x,\lambda)=\mu(1-\mu x)^{-1}$. Множина $sp(x)=\dot{\mathbb{C}}\setminus R(x)$ називається (алгебраїчним) <u>спектром</u> x в $\mathfrak{X}$. Нехай $\rho(x)$ -область (слабкої) голоморфності $R(x,\lambda)$. Доповнення $\sigma(x)=\dot{\mathbb{C}}\setminus\rho(x)$ називається далі <u>регулярним</u> <u>спектром</u> x в $\mathfrak{X}$. Відзначимо, що $\sigma(x)\neq\emptyset$, $\forall x\in\mathfrak{X}$ і $\sigma(x)=sp(x)$ у випадку, коли $\{\infty\}\in\rho(x)$. Якщо $\mathfrak{Z}$ - замкнена підалгебра в $\mathfrak{X}$ така, що $1\in\mathfrak{Z}$, $x\in\mathfrak{Z}$ і $\sigma_{\mathfrak{Z}}(x)$ - регулярний спектр x в $\mathfrak{Z}$, тоді $\sigma_{\mathfrak{Z}}(x)$ є об'єднання множини $\sigma(x)$ і деякої сукупності зв'язних компонент області $\rho(x)$. Границя множини $\sigma_{\mathfrak{Z}}(x)$ міститься в границі $\sigma(x)$. Коли область $\dot{\mathbb{C}}\setminus\sigma_{\mathfrak{Z}}(x)$ зв'язна, то справедлива рівність $\sigma(x)=\sigma_{\mathfrak{Z}}(x)$. Область $\rho(x)$ описується наступним чином.

ТЕОРЕМА 3.1.4. *Якщо множення в $\mathfrak{X}$ гіпонеперервне зліва, то $\forall x\in\mathfrak{X}$, $\rho(x)=int\{\lambda\in R(x):\ R(x,\lambda)\in\mathcal{B}_-(\mathfrak{X})\}$, де int - внутрішність в $\dot{\mathbb{C}}$, і в околі кожної скінченої (нескінченої) точки $\nu\in\rho(x)$ ряд $R(x,\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}[R(x,\nu)]^{k+1}(\nu-\lambda)^k$ (відп., $R(x,\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k\lambda^{-k-1}$) збігається в нормованій алгебрі $\mathcal{B}_-(\mathfrak{X})$.*

Як приклад, в згортковій алгебрі розподілів $\mathcal{D}'_+$ на $\mathbb{R}^1$ з носіями в $[0,+\infty)$ і слабкою топологією розглянуті розподіли вигляду:

$f_{-t}(\xi)=\dfrac{d^{[t]+1}}{d\xi^{[t]+1}}\left[\dfrac{\theta(\xi)\cdot\xi^{[t]-t}}{\Gamma([t]-t+1)}\right]$ при $t>0$, $f_{-t}(\xi)=\delta(\xi)$ при $t=0$; де $[t]$- ціла частина числа $t\geq 0$, $\xi\in\mathbb{R}$, $\theta(\xi)$ - характеристична функція півосі $[0,+\infty)$, $\Gamma(t)$ -гама-функція Ейлера. Регулярне представлення елемента f_{-t} над алгеброю $\mathcal{D}'_+$ діє як оператор дробового диференціювання порядку t і $R(f_{-t},\lambda)=\xi^{t-1}E_{t^{-1}}(\xi^t\cdot\lambda,\ t)$, де $E_{-\tau}(z,\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{\Gamma(k\tau+\tau)}$ - ціла функція Міттаг-Леффлера, отже $\sigma(f_{-t})=\{\infty\}$ при $t>0$ і $\sigma(f_{-0})=\{1\}$. В згортковій алгебрі $\mathcal{S}'_T$ T-періодичних розподілів повільного росту на $\mathbb{R}^1$: $\sigma(\frac{d}{d\xi})=\left\{\frac{2\pi ik}{T}:\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{\infty\}$; для оператора Даламбера $\Box$ в згортковій алгебрі $\mathcal{S}'(\overline{V^+_n})$ -розподілів повільного росту з носіями в замиканні конуса майбутнього V^+_n простору $\mathbb{R}^{n+1}$, маємо $\sigma(\Box)=\{\infty\}$.

Нехай $O_{\sigma(x)}=\underset{\Omega\supset\sigma(x)}{lim\text{-}ind}\ \mathcal{H}(\Omega)$ - алгебра паростків голоморфних функцій на регулярному спектрі $\sigma(x)$ елемента $x\in\mathfrak{X}$, де індуктивна границя взята по спадному фільтру відкритих околів Ω навколо $\sigma(x)$ і $\mathcal{H}(\Omega)$ -алгебри голоморфних функцій в Ω з топологією рівномірної збіжності на компактах. Основною в даному розділі є наступна

ТЕОРЕМА 3.3.1. *Якщо в алгебрі $\mathfrak{X}$ множення гіпонеперервне зліва, то існує неперервний гомоморфізм алгебр* Φ: $O_{\sigma(x)}\ni\phi\to\phi(x)\in\overline{\mathfrak{B}}_-(\mathfrak{X})$, *який задовольняє умові* $\Phi(1_{\sigma(x)})=1$, *де* $1_{\sigma(x)}$ - *одиниця в* $O_{\sigma(x)}$. *Зокрема, при* $\{\infty\}\in\rho(x)$ *і* $\phi(z)=z$, *одержуємо* $\Phi(z)=x$, *а при* $\rho(x)\neq\emptyset$ *і* $\lambda\in\rho(x)\setminus\{\infty\}$, $\Phi[(\lambda-z)^{-1}]=R(x,\lambda)$. *Якщо* $\sigma(x)=\dot{\mathbb{C}}$, *то* $O_{\dot{\mathbb{C}}}=\mathbb{C}$ *і* Φ: $\mathbb{C}\ni\lambda\to\lambda\cdot 1$.

Для кожної функції $\phi(z)\in\mathcal{H}(\Omega)$ значення Φ задається формулою $\phi(x)=\delta_\gamma\cdot\phi(\infty)+\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma R(x,\lambda)\phi(z)dz$, де $\delta_\gamma=1$ при $\{\infty\}\in\Omega$ і $\delta_\gamma=0$ при $\{\infty\}\notin\Omega$.

Справедлива також теорема про відображення регулярного спектру.

ТЕОРЕМА 3.4.1. *Якщо множення в $\mathfrak{X}$ гіпонеперервне зліва, то* $\forall\ x\in\mathfrak{X}$, $\phi\in O_{\sigma(x)}$, *маємо* $\sigma[\phi(x)]=sp[\phi(x)]=\phi[\sigma(x)]$, *де* $sp[\phi(x)]$ *і* $\sigma[\phi(x)]$ *відповідно спектр і регулярний спектр елемента* $\phi(x)$ *в підалгебрі алгебри* $\overline{\mathfrak{B}}_-(\mathfrak{X})$ *вигляду* $O_x=\{\phi(x):\ \phi\in O_{\sigma(x)}\}$. *Крім того,*

$(f \circ \phi)(x) = f[\phi(x)]$, $\forall f \in O_{\phi[\sigma(x)]}$.

Отже, дробове інтегрування порядку $t>0$ можна визначити, як регулярне представлення в алгебрі $\mathcal{D}'_+$ розподілу $f^{-1}_{-t}(\xi)=f_t(\xi)$, при цьому, $\sigma(f_t)=\{0\}$. Аналогічно, в алгебрі $\mathcal{Y}'(\overline{V^+_n})$ оператор $\square$ має обернений і $\sigma(\square^{-1})=\{0\}$

Регулярним спектральним радіусом елемента $x \in X$ називаємо число $|x|_\sigma = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$. Подібно, як в банаховому випадку, має місце

ТЕОРЕМА 3.5.1. *Якщо множення в X гіпонеперервне зліва і $\{\infty\} \in \rho(x)$, то $|x|_\sigma = \overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \|x^n\|^{1/n}_{-p}$. Зокрема, $\forall x \in X$, $\nu \in \rho(x) \setminus \{\infty\}$ радіус збіжності ряду $R(x,\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} [R(x,\nu)]^{k+1} \cdot (\nu-\lambda)^k$ дорівнює $|R(x,\nu)|^{-1}_\sigma$.*

Алгеброю Вальброока називається ЛО алгебра O з відкритою групою O^{-1} і неперервним обертанням $O^{-1} \ni x \to x^{-1} \in O$.

ТЕОРЕМА 3.5.3. *Якщо множення в алгебрі X гіпонеперервне зліва, то для кожного елемента $x \in X$ такого, що $\sigma(x) \neq \dot{\mathbb{C}}$ алгебра O_x відносно норми із $\tilde{\mathcal{B}}_-(X)$ є алгеброю Вальброока і $\forall y \in O_x$ справедливі співвідношення $\sigma_O(y)=sp_O(y)=\sigma_{\mathcal{B}}(y)=sp_{\mathcal{B}}(y)$, де $\sigma_O(y)$ і $sp_O(y)$ спектри в O_x, а $\sigma_{\mathcal{B}}(y)$ і $sp_{\mathcal{B}}(y)$ - в $\tilde{\mathcal{B}}_-(X)$.*

Звідси випливає, що якщо X - нормована алгебра з неперервним множенням, то реалізується ізоморфне вкладення $X \subset \tilde{\mathcal{B}}_-(X)$ і $\forall x \in X$: або $sp_X(x)=\dot{\mathbb{C}}$, або $sp_X(x)=\sigma_X(x)=sp_{\mathcal{B}}(x)$. Відзначимо неперервність $\sigma(x)$.

ТЕОРЕМА 3.5.5. *При умові гіпонеперервності зліва множення в X для кожного елемента $x \in X$ і відкритої множини Ω сфери $\dot{\mathbb{C}}$ таких, що $\Omega \supset \sigma(x) \neq \dot{\mathbb{C}}$, множина $\{y \in O_x : \sigma(x+y) \subset \Omega\}$ є відкритою. Якщо алгебра X псевдоповна, то відкритою також є множина $\{y \in \mathcal{B}_-(X) : \sigma(x+y) \subset \Omega\}$.*

У 4-му розділі викладений локально опуклий аналог спектральної теорії комутативних банахових алгебр І.М.Гельфанда. Він грунтується на понятті піврегулярного спектру, введеного в роботі [8]. Спочатку наведемо необхідні для цього узагальнення деяких класичних теорем. Характерами комутативної алгебри X називаємо її ненyльові лінійні мультиплікативні функціонали. Топологічним спектром X називається множина $\mathfrak{M}(X)$ -неперервних характерів з найслабшою гаусдорфовою топологією, відносно якої функції $\hat{x}$: $\mathfrak{M}(X)\ni h \to h(x)$ неперервні $\forall x\in X$. Перетворенням Гельфанда X називається гомоморфізм $\mathfrak{F}$: $X\ni x \to \hat{x}$ в алгебру $C[\mathfrak{M}(X)]$ -неперервних функцій на $\mathfrak{M}(X)$ з топологією рівномірної збіжності на компактах.

4.1.1. *Нехай κ -борнологія спряженого простору X^*_s, яка породжується всіма компактами. Якщо простір X^*_s є (κ)-повним і X - комутативна алгебра Маккі, то перетворення $\mathfrak{F}$ -неперервне. Зокрема, $\mathfrak{F}$ - неперервне для бочкових алгебр.*

Справедливий наступний аналог теореми Гельфанда-Мазура [2].

ТЕОРЕМА 4.2.2. *Якщо алгебра X є тілом і операція обертання $X^{-1}\ni x \to x^{-1}$ (слабо) неперервна, то X ізоморфна полю $\mathbb{C}$.*

Стандартним наслідком теореми є те, що замкнені максимальні ідеали комутативних алгебр X із (слабо) неперервним обертанням, зокрема ЛМО алгебр, мають вигляд $Ker(h)$, де $h\in\mathfrak{M}(X)$.

Виділимо алгебри, в яких (алгебраїчний) спектр елемента можна обчислювати обмежуючись топологічним спектром алгебри. Скажемо, що алгебра X з неперервним множенням і її поповнення $\tilde{X}$ утворюють пару Вінера, якщо $X^{-1}=X\cap\tilde{X}^{-1}$ [15].

4.2.6. *Нехай X -комутативна ЛМО алгебра. Алгебри X, $\tilde{X}$ утворюють пару Вінера тоді і тільки тоді, коли $sp(x)=\{h(x):h\in\mathfrak{M}(X)\}$, $\forall x\in X$*

Якщо X - ЛО алгебра з відкритою групою X^{-1} (Q-алгебра) або проективна границя таких алгебр, то X і $\tilde{X}$ - утворюють пару Вінера.

Наступне поняття є одним з основних в роботі. Кожному елементу $x\in X$ співставимо так звану область піврегулярності резольвенти, покладаючи: $\rho_-(x)=R_-(x)$ при $x\in X\backslash\mathcal{A}_-(X)$; $\rho_-(x)=R_-(x)\cup\{\infty\}$ при $x\in\mathcal{A}_-(X)$ де $R_-(x)=\{\lambda\in\mathbb{C}: R(x,\lambda)\in\mathcal{A}_-(X)\}$. Доповнення $\sigma_-(x)=\dot{\mathbb{C}}\backslash\rho_-(x)$ називається (лівим) піврегулярним спектром елемента x в алгебрі X.

ТЕОРЕМА 4.3.1. $\forall x\in\mathfrak{X}$, $\sigma\_(x)\neq\emptyset$.

В довільній ЛО алгебрі $\mathfrak{X}$ справедливе вкладення: $\overline{\sigma(x)\subset\sigma\_(x)}$, $\forall x\in\mathfrak{X}$. Для кожного $x\in\mathfrak{X}$ такого, що $\rho\_(x)\neq\emptyset$, має місце співвідношення $\sigma\_(x)=\{\mu-\lambda^{-1}:\ \lambda\in sp_{A\_(\mathfrak{X})}[R(x,\mu)]\}$, де $\mu\in\rho\_(x)$. Якщо множення в $\mathfrak{X}$ гіпонеперервне зліва, то $\overline{\sigma(x)}=\sigma\_(x)$.

Визначимо на сфері $\dot{\mathbb{C}}$ структуру комплексної алгебри, ототожнювчи $\dot{\mathbb{C}}$ з полем часток $\mathbb{C}/\mathbb{C}=\{\nu/\mu:\ \nu,\mu\in\mathbb{C}\}$, де $\nu/0=\infty$, $\forall\nu\neq0$ і $0\cdot\infty=0$. Позначимо $\mathfrak{X}\_=\{x\in\mathfrak{X}:\sigma\_(x)\neq\dot{\mathbb{C}}\}$. Піврегулярним характером комутативної алгебри $\mathfrak{X}$ називається будь-який нетривіальний неперервний гомоморфізм $h:\ x\to h(x)\in\dot{\mathbb{C}}$ з областю визначення $\mathfrak{X}\_$. Множина $\mathfrak{G}\_(\mathfrak{X})$ -піврегулярних характерів $\mathfrak{X}$ із найслабшою гаусдорфовою топологією, відносно якої функції $\hat{x}:\ h\to h(x)\in\dot{\mathbb{C}}$ неперервні на $\mathfrak{G}\_(\mathfrak{X})$, $\forall x\in\mathfrak{X}\_$, називається піврегулярним спектром алгебри $\mathfrak{X}$.

Якщо $C[\mathfrak{G}\_(\mathfrak{X}),\dot{\mathbb{C}}]$ -множина неперервних відображень із $\mathfrak{G}\_(\mathfrak{X})$ в $\dot{\mathbb{C}}$ з топологією рівномірної збіжності на компактах, то можна визначити аналог перетворення Гельфанда $\mathfrak{F}:\ \mathfrak{X}\_\ni x\to\hat{x}\in C[\mathfrak{G}\_(\mathfrak{X}),\dot{\mathbb{C}}]$.

4.4.3. *Перетворення Гельфанда $\mathfrak{F}\_$ ЛМО алгебри $A\_(\mathfrak{X})$ має єдине розширення $\mathfrak{F}$ на $\mathfrak{X}\_$, причому $\mathfrak{F}$ неперервне тоді і тільки тоді, коли неперервним є $\mathfrak{F}\_$. Зокрема, $\mathfrak{F}$ неперервне, якщо $\mathfrak{X}$ - алгебра Фреше.*

Піврегулярний спектр ЛО алгебр, подібно до банахового випадку, дає можливість обчислювати піврегулярні спектри елементів.

4.4.4. *Нехай алгебри $A\_(\mathfrak{X})$ і $\bar{A}\_(\mathfrak{X})$ утворюють пару Вінера або алгебра $\mathfrak{X}$ є півповною, тоді $\sigma\_(x)=\{h(x):\ h\in\mathfrak{G}\_(\mathfrak{X})\}$, $\forall x\in\mathfrak{X}\_$.*

Нехай $X=\{x_j\}_{j\in J}$ - елементи із $\mathfrak{X}\_$, $\dot{\mathbb{C}}^J$ - прямий добуток J копій сфер $\dot{\mathbb{C}}$. Якщо комутативна алгебра $\mathfrak{X}$ є півповною, то образ відображення $X\_:\mathfrak{G}\_(\mathfrak{X})\ni h\to\{h(x_j)\}\in\dot{\mathbb{C}}^J$ будемо називати сумісним піврегулярним спектром елементів X і позначати через $\sigma\_(X)$.

Обчислимо піврегулярні спектри деяких індуктивних і проективних границь систем комутативних ЛО алгебр.

4.5.4. *Якщо $(\mathfrak{Z}_q)$ - індуктивна система комутативних банахових алгебр відносно стискуючих вкладень, то реалізується гомеоморфізм $\mathfrak{S}_-(\text{lim-ind}\ \mathfrak{Z}_q) = \text{lim-pr}\ \mathfrak{M}(\mathfrak{Z}_q)$.*

Якщо $(\mathfrak{X}_q)$ - проективна система ЛО алгебр з неперервним множенням, то справедлива рівність $\text{lim-ind}\ \mathfrak{S}_-(\mathfrak{X}_q) = \mathfrak{S}_-(\text{lim-pr}\ \mathfrak{X}_q)$, в якій вкладення $\mathfrak{S}_-(\mathfrak{X}_q) \subset \mathfrak{S}_-(\text{lim-pr}\ \mathfrak{X}_q)$ неперервні. Застосування до проективної системи $(\mathcal{A}_{-p}(\mathfrak{X}))$, породженої підалгеброю $\mathcal{A}_-(\mathfrak{X})$, приводить до наступного результату.

ТЕОРЕМА 4.6.1. *Якщо перетворення Гельфанда $\mathfrak{F}: \mathfrak{X}_- \to C[\mathfrak{S}_-(\mathfrak{X}), \dot{\mathbb{C}}]$ неперервне і $\mathfrak{S}_-(\mathfrak{X})$ є (k)-простором, то реалізується гомеоморфізм $\mathfrak{S}_-(\mathfrak{X}) = \text{lim-ind}_{p \in P}\ \mathfrak{M}(\tilde{\mathcal{A}}_{-p}(\mathfrak{X}))$, де $\tilde{\mathcal{A}}_{-p}(\mathfrak{X})$ - поповнення $\mathcal{A}_{-p}(\mathfrak{X})$.*

Умови теореми очевидно виконуються для алгебр Фреше.

Нехай $\mathfrak{X}$ і $\mathfrak{Z}$ - комутативні ЛО алгебри, $\mathfrak{X} \otimes \mathfrak{Z}$ - проективний тензорний добуток і $\mathfrak{X} \tilde{\otimes} \mathfrak{Z}$ - його поповнення. Справедлива наступна

ТЕОРЕМА 4.7.1. *Якщо алгебри $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Z}$ повні і мають неперервне множення, то реалізується гомеоморфізм $\mathfrak{M}(\mathfrak{X} \tilde{\otimes} \mathfrak{Z}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{X}) \times \mathfrak{M}(\mathfrak{Z})$.*

В 5-му розділі розвинуте функціональне числення в ЛО алгебрах загального вигляду і наведена його реалізація в алгебрах необмежених операторів. Встановлені теореми про відображення спектрів, а також теорема типу Хілла-Іосіди для однопараметричних півгруп.

Нехай $x \in \mathfrak{X}_-$ і $\mu \in \rho(x) \setminus \{\infty\}$. Тоді $\sigma_-(x) = \bigcup_{q \in P} \sigma_{-q}$ і $\sigma_{-q} \subset \sigma_{-p}$ при $q \le p$, де $\sigma_{-q} = \{\mu - \lambda^{-1} : \lambda \in sp(y_{-q})\}$ і $sp(y_{-q})$ -спектр лишка резольвенти $y = R(x, \mu)$ в поповненні $\tilde{\mathcal{A}}_-(\mathfrak{X})$ фактор-алгебри $\mathcal{A}_-(\mathfrak{X})/Ker(q_-)$. Вказане розбиття $\sigma_-(x)$ на об'єднання компактів сфери $\dot{\mathbb{C}}$ залежить від вибору P і не залежить від точки $\mu \in \rho(x) \setminus \{\infty\}$. Визначимо алгебру $\overleftarrow{\mathcal{H}}[\sigma_-(x)] = \text{lim-pr}_{q \in P}\ \mathcal{O}(\sigma_{-q})$ -локальних паростків голоморфних функцій на $\sigma_-(x)$. Алгебра $\overleftarrow{\mathcal{H}}[\sigma_-(x)]$ не залежить від розбиття $\sigma_-(x)$. Крім того, реалізується гомеоморфізм $\mathfrak{M}(\overleftarrow{\mathcal{H}}[\sigma_-(x)]) = \sigma_-(x)$.

ТЕОРЕМА 5.1.1. *Якщо алгебра $\mathfrak{X}$ -півповна, то існує неперервний гомоморфізм Φ_-: $\overleftarrow{\mathcal{H}}[\sigma_-(x)]\ni\phi \to \phi(x)\in\mathcal{A}_-(\mathfrak{X})$ такий, що $\Phi_-(1_{\sigma_-(x)})=1$, де $1_{\sigma_-(x)}$ -одиниця алгебри $\overleftarrow{\mathcal{H}}[\sigma_-(x)]$. При $x\in\mathcal{A}_-(\mathfrak{X})$, $\Phi_-(z)=x$, де z -комплексна змінна. Якщо $x\in\mathfrak{X}\setminus\mathfrak{X}_-$, то Φ_- :$\mathbb{C}\ni z \to z\cdot 1$, оскільки $\sigma_-(x)=\dot{\mathbb{C}}$ і $\overleftarrow{\mathcal{H}}(\dot{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}$.*

В рамках даного функціонального числення справедлива теорема про відображення піврегулярного спектру.

ТЕОРЕМА 5.1.2. *Якщо алгебра $\mathfrak{X}$ півповна, то справедливі співвідношення $\sigma_-[\phi(x)]=\phi[\sigma_-(x)]$, $(f\circ\phi)(x)=\phi[f(x)]$, $\forall$ $x\in\mathfrak{X}$, $\phi\in\overleftarrow{\mathcal{H}}[\sigma_-(x)]$, $f\in\overleftarrow{\mathcal{H}}\{[\phi[\sigma_-(x)]\}$.*

Гомоморфізм Φ_- характеризує множину $\sigma_-(x)$ елементів x із $\mathfrak{X}_-$.

ТЕОРЕМА 5.1.4. *Якщо $\mathfrak{X}$ -алгебра Фреше і $\overleftarrow{\mathcal{H}}_x=\{\phi(x)$: $\phi\in\overleftarrow{\mathcal{H}}[\sigma_-(x)]\}$, то $\sigma_-(x)=sp_{\mathcal{H}}(x)$ -спектр елемента $x\in\mathcal{A}_-(\mathfrak{X})$ в підалгебрі $\overleftarrow{\mathcal{H}}_x$.*

Функціональне числення припускає багатовимірне узагальнення.

ТЕОРЕМА 5.1.5. *Нехай $\mathfrak{X}$ - півповна комутативна алгебра і $X = (x_1,\ldots,x_n)$ -скінчений набір елементів із $\mathfrak{X}_-$. Тоді сумісний піврегулярний спектр $\sigma_-(X)$ є об'єднанням компактів з прямого добутку сфер $\dot{\mathbb{C}}^n$, кожен з яких біголоморфно еквівалентний поліноміально опуклій множині із $\mathbb{C}^n$, алгебра $\overleftarrow{\mathcal{H}}[\sigma_-(X)]$ нетривіальна і існує неперервний гомоморфізм Φ_-: $\overleftarrow{\mathcal{H}}[\sigma_-(X)]\ni\phi \to \phi(X)\in\mathcal{A}_-(\mathfrak{X})$, який задовольняє співвідношенням $\sigma_-[\phi(X)]=\phi[\sigma_-(X)]$ і $\Phi_-(1_{\sigma_-(X)})=1$, де $1_{\sigma_-(X)}$-одиниця $\overleftarrow{\mathcal{H}}[\sigma_-(X)]$. При $X\subset\mathcal{A}_-(\mathfrak{X})$, маємо $\Phi_-(z_j)=x_j$, де z_j- j-та координата комплексної змінної $(z_1,\ldots,z_n)$.*

Техніка ультрагладких векторів необмеженого замкненого лінійного оператора A: $\mathcal{D}(A)\subset\mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ банахового простору $(\mathfrak{U},\|.\|)$ дозволяє навести застосування попередніх теорем до побудови функцій від A. Побудуємо простір $l_r[\mathcal{D}^n_r(A),\mathfrak{U}]= \left\{\sum_{n=1}^{\infty} u_n=u\in\mathfrak{U}\text{: } u_n\in\mathcal{D}^n_r(A), \sum_{n=1}^{\infty}\|u_n\|^r_n<\infty\right\}$ з нормою $|u|_r = \inf \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_n^r \right)^{1/r}$, де $\inf$ по всіх зображеннях $\sum u_n = u$.

5.2.2. *Має місце ізометричний ізоморфізм* $l_r[\mathcal{D}_r^n(A),\mathfrak{U}] = \overline{\mathcal{D}_r^M(A)}$, *де замикання в* $\mathfrak{U}$.

5.2.3. *Якщо* $\overline{\mathcal{D}_r^M(A)} = \mathfrak{U}$, *то вкладення спряжених просторів* $\mathfrak{U}^* \subset \mathcal{D}_r^{-M}(A)$ *неперервне у сильних топологіях і неперервне та щільне у топологіях Маккі. Якщо* $\mathfrak{U}$ *-гільбертів, то вкладення* $\mathfrak{U}^* \subset \mathcal{D}_2^{-M}(A)$ *неперервне та щільне у сильних топологіях.*

5.2.5. *Нехай* $\mathfrak{U}$ *- гільбертів простір,* $\mathcal{D}_2^M(A)$ *- простір ультрагладких векторів* A *і* $\overline{\mathcal{D}_2^M(A)} = \mathfrak{U}$. *Тоді* $\mathcal{D}_2^\nu(A) \subset \mathfrak{U}$ *- топологічний ізоморфізм,* $\forall \nu > 0$.

Припустимо далі, що $\mathcal{D}_r^M(A)$ - простір ультрагладких векторів A і $\overline{\mathcal{D}_r^M(A)} = \mathfrak{U}$. Нехай $\mathfrak{F}$ -клас функцій $f(z)$, для яких визначені оператори $f(A_n) \in \mathfrak{L}(\mathcal{D}_r^n(A))$. Тоді визначений оператор $f(A_M) : \mathcal{D}_r^M(A) \to \mathcal{D}_r^M(A)$, звуження якого на $\mathcal{D}_r^n(A)$ співпадає із $f(A_n)$. Замикання $f(A_M)$ над $\mathfrak{U}$ позначимо через $f(A)$.

ТЕОРЕМА 5.2.4. *Замикання* $f(A)$ *існує,* $\forall f \in \mathfrak{F}$. *Якщо* $f(A_n) = A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *то* $f(A) = A$.

Користуючись теоремами 2.3.3-4, можна обчислити підалгебри $\mathcal{A}[\mathcal{D}_r^{-M}(A)]$ і $\mathcal{B}[\mathcal{D}_r^{-M}(A)]$ алгебри $\mathfrak{L}_b[\mathcal{D}_r^{-M}(A)]$, де $\mathcal{D}_r^{-M}(A) = \lim\text{-}pr_{n\to\infty}\, \mathcal{D}_r^{-n}(A)$ -проективна границя спряжених банахових просторів. А саме, існують топологічний ізоморфізм $\mathcal{A}[\mathcal{D}_r^{-M}(A)] = \lim\text{-}pr_{n\to\infty}\, \mathfrak{L}_b[\mathcal{D}_r^n(A)]$ і неперервний ін'єктивний гомоморфізм $\mathcal{B}[\mathcal{D}_r^{-M}(A)] \to \mathfrak{L}_b[\mathfrak{U}]$. Відображення, яке їх породжує має вигляд $T_{-M} \to T_M$, де T_M -спряжений до оператора T_{-M} із $\mathcal{A}[\mathcal{D}_r^{-M}(A)]$ відносно двоїстості $\langle \mathcal{D}_r^M(A), \mathcal{D}_r^{-M}(A) \rangle$. Таким чином, абстрактні теореми 5.1.1-2 в даному випадку дають наступний результат.

5.3.4. *Існує неперервний гомоморфізм* $\phi \to \phi(A_M)$ *із алгебри функцій* $\overleftarrow{\mathcal{H}}[sp(A_M)]$ *в підалгебру* $\lim\text{-}pr_{n\to\infty}\, \mathfrak{L}_b[\mathcal{D}_r^n(A)]$ *алгебри* $\mathfrak{L}[\mathcal{D}_r^M(A)]$, *який переводить одиницю* $\overleftarrow{\mathcal{H}}[sp(A_M)]$ *в одиничний оператор із* $\mathfrak{L}(\mathfrak{U})$, *а* *комплексну змінну* z *в* A_M. *При цьому виконується співвідношення* $sp[\phi(A_M)]=\phi[sp(A_M)]$, *де спектри розглядаються в алгебрі* $\mathfrak{L}[\mathfrak{D}_\Gamma^M(A)]$.

Нехай $\sigma(A)$ -спектр оператора A над простором $\mathfrak{U}$. Справедлива

ТЕОРЕМА 5.3.3. $sp(\overline{A_M})=\sigma(A)$.

Сформулюємо теорему про відображення спектру оператора A.

ТЕОРЕМА 5.3.5. *Існує лінійне відображення* $\overleftarrow{\mathcal{H}}[sp(A_M)]\ni\phi\to\phi(A)$, *де* $\phi(A)$ *-замикання в* $\mathfrak{U}$ *оператора* $\phi(A_M)$, *і одиниця* $\overleftarrow{\mathcal{H}}[sp(A_M)]$ *переходить в одиничний оператор алгебри* $\mathfrak{L}(\mathfrak{U})$, *комплексна змінна* z *в оператор* A *і виконується співвідношення* $\sigma[\phi(A)]=\phi[\sigma(A)]$.!

Якщо $\overleftarrow{B\mathcal{H}}[sp(A_M)]$ *- підалгебра обмежених функцій із* $\overleftarrow{\mathcal{H}}[sp(A_M)]$, *то має місце гомоморфізм алгебр* $\overleftarrow{B\mathcal{H}}[sp(A_M)]\ni\phi\to\phi(A)\in\mathfrak{L}(\mathfrak{U})$.

В останніх двох параграфах функціональне числення застосовується до дослідження в ЛО алгебрах однопараметричних півгруп. Півгрупою в $\mathfrak{X}$ називається функція $0\le t\to x(t)\in\mathfrak{X}$, що задовольняє умовам: $x(t+\zeta)=x(t)x(\zeta)$, $x(0)=1$.

ТЕОРЕМА 5.4.1. *Якщо множення в алгебрі* $\mathfrak{X}$ *обмежене, то кожна півгрупа* $x(t)$ *в* $\mathfrak{X}$, *яка задовольняє в слабкій топології умові* $\lim\limits_{t\to+0} x(t)=1$, *неперервна*.

Слабка границя в $\mathfrak{X}$ вигляду $\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{x(t)-1}{t}=x$ (якщо така існує) називається далі <u>генератором</u> $x(t)$ в алгебрі $\mathfrak{X}$. Кожна неперервна півгрупа $x(t)$, яка має в $\mathfrak{X}$ слабкий генератор x, диференційована при $t\ge0$ і $\dfrac{dx(t)}{dt}=x\cdot x(t)=x(t)\cdot x$ у вихідній топології $\mathfrak{X}$.

ТЕОРЕМА 5.4.3. *Нехай* $\mathfrak{X}$ *- квазіповна алгебра з гіпонеперервним зліва множенням. Елемент* $x\in\mathfrak{X}$ *є генератором деякої обмеженої неперервної півгрупи* $x(t)$ *тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:* (a) $Re\ [\sigma(x)\cap\mathbb{C}]\le0$; (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\cdot R(x,n)=1$. *В цьому випадку півгрупа* $x(t)$ *визначається слабким генератором* x *єдиним чином і справедлива формула* $x(t)=\lim\limits_{n\to+\infty} exp[txnR(x,n)]$, *де збіжність рівномірна на* *компактах.*

Як приклад, в згортковій алгебрі $\mathcal{D}'_+$ розглянута півгрупа $0 \le t \to f_{-t}(\xi)$ - дробового диференціювання, яка є неперервна і має генератор $\delta'(\xi) + \Gamma'(1)\delta(\xi)$. Тому розв'язки задачі Коші $\frac{du(\xi,t)}{dt} = \delta'(\xi) * u(\xi,t) + \Gamma'(1) u(\xi,t)$, $u(\xi,0) = v(\xi) \in \mathcal{D}'_+$ в кожній точці $t \ge 0$ мають зміст похідної порядку t від функції $v(\xi)$.

В додатку викладені елементи теорії топологічно-борнологічної двоїстості, а також основні властивості проективних та індуктивних систем локально опуклих просторів на яких базуться доведення ряду основних теорем.

Результати дисертації опубліковані в наступних роботах автора:

1. Лопушанський О.В. Взаємозв'язок між функціями класу НВ і розв'язками лінійних диференціальних рівнянь другого порядку// Доп. АН УРСР.-1975.-№ 9.-С.783-785.

2. Лопушанский О.В. О преобразовании Гельфанда локально выпуклых алгебр// Укр.мат.ж.-1985.-№1.-С.120-123.

3. Лопушанський О.В. Про операторне числення на просторах векторів експоненціального типу// Доп. АН УРСР.Сер.А.-1990.-№2. -С.14-17.

4. Лопушанский О.В. Непрерывные полугруппы в локально выпуклых алгебрах// Укр.мат.журн.-1990.-т.43,-№2.-С.154-158.

5. Лопушанский О.В. Ограниченные решения задачи Коши в локально выпуклых алгебрах// Диф.уравнения.-1991.-т.27,-№2.С.367-379.

6. Лопушанский О.В. Неравномерные пополнения и гипонепрерывность умножения в локально выпуклых алгебрах// Сибир.мат.журн.-1991.-32,-№3.-С.89-96.

7. Лопушанський О.В. Операторне числення на ультрагладких векторах// Укр.мат.журн.-1992.-т.44,-№ 4.-С.502-513.

8. Лопушанський О.В. Спектральна теорія локально опуклих

алгебр// Доп. АН України.-1992.-№7.-С.3-8.

9. Лопушанский О.В. Об однозначных аналитических функциях с нулями в одной полуплоскости// Теор. и прикл. вопросы алгебры и диф. уравнений. -1976. -С.103-105.

10. Лопушанский О.В. О голомофности функций в заданой области// Мат. анализ и теория вероятностей. -1978. -С.100-103.

11. Лопушанский О.В. Свойства непрерывности умножения в топологических алгебрах// Мат.методы и физ.-мех.поля.-1985.-№21. -С.26-29.

12. Лопушанський О.В. Операторне числення від тензорно комутуючих операторів на просторах ультрагладких векторів// Мат. методы и физ.-мех. поля.- 1992.-№ 53.-С.189-194.

13. Лопушанський О.В. Локально опуклі алгебри I. Борнологічні властивості.-Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України. Препринт №1-93. -1993. -55 с.

14. Лопушанський О.В. Локально опуклі алгебри II. Півобмежені і обмежені оператори. -Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України. Препринт №5-93. -1993. -62 с.

15. Лопушанський О.В. Локально опуклі алгебри III. Функціональне числення на піврегулярному спектрі. -Львів: Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України. Препринт №6-93. -1993. -59с.

16. Лопушанский О.В. Борнологии Аллана в спектральной теории локально выпуклых алгебр. -Львов: Ин-т прикл.пробл.математики и механики АН УССР.-1987. Деп.ВИНИТИ (08.04.87) №2489-В87. -107 с.

17. Лопушанский О.В. Векторные борнологии в спектральной теории локально выпуклых алгебр. Автореферат канд. диссертации. Минск: Белорус. гос. ун-т. -1988. -15 с.

18. Лопушанский О.В. К теории Гельфанда алгебр Фреше// IX

Всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы докладов. Тернополь.-1984. -С.78-79.

19. Лопушанский О.В. Некоторые вопросы спектральной теории локально выпуклых алгебр// 1-я осенняя школа "Применение топологии в алгебре и диф. геом." Тезисы докладов. Тарту: Тартус.ун-т.-1988. -С.31-32.

20. Лопушанский О.В. Функциональное исчисление в алгебрах неограниченных операторов// XIV Всесоюзная школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы докладов. ч.II. Новгород.-1989.-С.58.

21. Лопушанский О.В. Локальные диффеоморфизмы ненормируемых локально выпуклых пространств и некоторые их применения// Всесоюзная конф. по нелинейным пробл. диф.уравнений и мат. физики. Тезисы докладов. Тернополь.-1989.-С.248-249.

22. Лопушанский О.В. Гладкие и обобщенные решения задачи Коши для дифференциально-операторных уравнений// Респ.школа "Разрывные динамические системы". Тезисы докладов. Киев.-1989.-С.36.

23. Лопушанский О.В. Функциональное исчисление в алгебрах неограниченных операторов, порождаемых генераторами полугрупп// 2-я осенняя школа "Применение топологии в алгебре и диф. геом." Тезисы докладов. Тарту: Тартус.ун-т.-1991.-С.64-65.

24. Лопушанский О.В. l_p-представление ограниченных решений задачи Коши// III Всесоюзная конф."Новые подходы к решению дифференциальных уравнений".Тезисы докладов. Москва: ВЦ АН СССР. -1991. -С.77.

25. Lopushansky O.V. The semibounded operator in the spectral theory of the locally convex algebras// International conferens 100-th birthday of S.Banach. May 6-8, 1992.(L'viv) -P.26-27.

Зам.№ 56. Підписано до друку 21 квітня 1994 р.
Формат $60\times84_{1/16}$. Ум.друк.арк. 1,5. Тираж 120 пр.

Ротапринт Львівської наукової бібліотеки ім. В.Стефаника
АН України. Львів, вул. Лермонтова, 15.