МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ УКРАИНЫ

ОДЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.И.МЕЧНИКОВА

На правах рукописи

КАРАУАНИ МАХЕР НАЗМИ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЕВ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

01.01.02 - Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Одесса - 1994

Диссертация является рукописью.

Работа выполнена на кафедре высшей математики Одесского государственного университета.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент И.Е.Витриченко.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор, академик АН Грузии Кигурадзе И.Т., кандидат физико-математических наук, доцент Чернышев В.Г.

Ведущая организация: Киевский государственный экономический университет.

Защита диссертации состоится "17" июня 1994 г. в 15 часов на заседании специализированного ученого совета К 05.01.02, по физико-математическим наукам (математика) в Одесском государственном университете (270100, г. Одесса, ул. Петра Великого, 2).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Одесского государственного университета (270100, г. Одесса, ул. Советской Армии, 24).

Автореферат разослан 12 мая 1994 г.

Ученый секретарь
специализированного совета А.И.Третьяк

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В диссертации изучаются критические случаи одного нулевого корня (*) и пары комплексно-сопряженных корней (**) теории устойчивости неавтономных нелинейных дифференциальных систем (д.с.) с медленно-меняющимися коэффициентами.

Н.Д.Моисеев изложил историю возникновения и развития понятия устойчивости. А.М.Ляпунов в докторской диссертации "Общая задача об устойчивости движения", также предложил два основных метода исследования устойчивости движения. Частные случаи задачи устойчивости изучил Логранж, Раус, Томсон и ТЭТ, Н.Е.Жуковский, А.Пуанкаре.

Основные результаты теории устойчивости можно найти в монографиях Н.Г.Четоева, Н.Н.Красовского, Р.Беллина, И.Г.Малкина, К.Г.Валеева, К.П.Персидского, В.И.Зубова и других авторов.

Устойчивость неавтономных линейных и нелинейных д.с. при условиях отличных от используемых в диссертации исследовалась Э.И.Грудо, А.А.Шестаковым, Г.С.Кречетовым. О.Перроном, Л.Чезаари, Н.И.Гавриловым, В.П.Басовым, В.В.Костиным, А.В.Костиным, И.Е.Витриченко, Робинсон Кларк и другими авторами. Таким образом исследование устойчивости неавтономных д.с. представляет актуальную задачу.

Цель работы. Получить достаточные признаки устойчивости по Ляпунову при $t \uparrow \omega$ нулевого решения дифференциальной системы (д.с.) вида

$$\frac{dx}{dt} = \pi(t)\cdot P(t)\cdot X + F(t,\ x) \qquad (1)$$

$X = col(x_1,\ \dots,\ x_n)$, $t \in \Delta = [a,\ \omega[$, $-\infty < a < \omega \leqslant +\infty$, $\pi(t) > 0$, $P(t) = \|P_{sk}(t)\|$, $s,k = \overline{1,n}$, $F(t,\ x) \in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$, уравнение

$$\det(P(t) - \lambda E) = 0$$

имеет или простой корень $\lambda_1(t)$ с условием

$$\mathrm{Re}\lambda_1(t) = o(1),\ t \uparrow \omega$$

(критический случай (*)), или простую пару комплексно-сопряженных корней

$$\lambda_1(t) = \bar{\lambda}_2(t) = a_\circ(t) + ib_\circ(t),$$

$i^2 = -1$, $a_\circ(t) = o(1)$, $t \uparrow \omega$

(критический случай (**)), $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^n$ – соответственно n-мерное комплексное (вещественное) эвклидово пространство, когда коэффициенты д.с. (I), вообще говоря, не имеют пределов и являются "медленно изменяющимися" функциями (производные таких функций малы в сравнении с самими функциями). Например,

$$t^\alpha,\ (\ln t)^\beta,\ \cos \ln t,\ \sin t^\gamma\ (\gamma < 1),\ \sin \varepsilon t,$$

ε – малый параметр.

<u>Методика исследований</u>. В работе используется метод неавтономных нелинейных преобразований Пуанкаре-Брюно, принцип устойчивости и метод А.В.Костина исследования одного неавтономного дифференциального уравнения первого порядка в сочетании с методом функций Ляпунова.

<u>Научная новизна и основные результаты</u>. В диссертации получены следующие новые результаты.

I. Признаки устойчивости, асимптотической устойчивости, неустойчивости, когда устойчивость нулевого решения определяется линейной частью д.с. в случаях (*) и (**).
2. Получены критерии асимптотической устойчивости и неустойчивости, когда устойчивость нулевого решения определяется нелинейной час-

тью д.с. (I) в случаях (★) и (★★).

3. В случае (★★) рассмотрен особый подслучай "слипающихся корней" ($a_\circ(t)$, $b_\circ(t) = o(1)$, $t \uparrow \omega$).
4. Получены признаки устойчивости, асимптотической устойчивости, неустойчивости в частном случае когда

$$\pi = \pi(t),\ P = p(\tau),\ \tau = (\tau_1, \ \dots \ , \tau_m),\ \tau_k = \varepsilon_k(t)\cdot t,$$
$$\varepsilon_k : \Delta \to]0, +\infty[,\ \varepsilon \in C^{(1)}_\Delta,\ \varepsilon_k^{-1} \cdot \varepsilon_k' = o(1),$$
$$t \uparrow \omega,\ k = \overline{1,m},$$

для д.с. (I) по линейной части.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Дифференциальные уравнения с медленно меняющимися коэффициентами встречаются во многих областях науки. Примером этого могут быть задачи на собственные значения, а также некоторые задачи теории автоматического регулирования, кинетики, аэродинамики, гидродинамики, электростатики и других задач естествознания.

Апробация работы и публикации. Основные результаты диссертации докладывались на республиканской научно-методической конференции посвященной 200-летию со дня рождения Н.И.Лобачевского, Одесса 92, а также на семинарх кафедры высшей математики ОГУ по обыкновенным дифференциальным уравнениям (руководитель - проф. Костин А.В.).

По теме диссертации опубликовано четыре работы.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из параграфа "Обозначения и термины", введения, двух глав, состоящих из I6 параграфов, списка литературы из 6I наименований, изложена на II0 страницах машинописного текста.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность проблемы и дан краткий обзор работ, посвященных решению задач, близких к рассмотренным в диссертации. Сделана краткая аннотация глав, сформулированы основные научные положения, которые выносятся на защиту.

В первой главе (§§ I-8) исследуется устойчивость тривиального решения в критическом случае одного нулевого корня. В §2 главы приведены леммы в которых строятся преобразования приводящие д.с. (I) к д.с. специального вида. В §3 приведены результаты в виде доказанных теорем для устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости, когда д.с. (I) квазилинейная.

Теорема I. Пусть д.с. (I) такова, что

I) алгебраические дополнения A_k, $k = \overline{1,n}$ элементов хотя бы одной строки (столбца) определителя $\det(P - \lambda_1 E)$ обладают свойством

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k|^2 : \Delta \longrightarrow [A_\circ, M_\circ], \ A_\circ \in]0, \infty[;$$

2) $\int^{\omega} \pi dt = +\infty, \ \int^{\omega} \pi \operatorname{Re}\lambda_1 dt = -\infty;$

3) существует $\mu \in]0, I[$ такая, что

$$\exp(-\gamma_1 \cdot \int_T^t \pi dx) \cdot \int_T^t [|\lambda_1'| + \sum_{s,k=1}^{n} |P'_{sk}| + L \cdot \exp(\alpha\mu \cdot \int_T^y \pi \operatorname{Re}\lambda_1 dx)] \cdot$$

$$\cdot \exp(\gamma_1 \cdot \int_T^y \pi dx) dy = O(1), \ t \uparrow \omega,$$

$$\gamma_1 = \gamma - \varepsilon_\circ,$$

ε - достаточно малое положительное число, и

$$\exp[(1-\mu) \cdot \int_T^t \pi \operatorname{Re}\lambda_1 dx] \cdot \int_T^t [|\lambda_1'| + \sum_{s,k=1}^{n} |P'_{sk}| + L \cdot \exp(\alpha\mu \cdot$$

$$\cdot \int_T^y \pi \operatorname{Re}\lambda_1 dx)] \cdot \exp[(\mu-1) \cdot \int_T^y \pi \operatorname{Re}\lambda_1 dx)] dy = o(1), \ t \uparrow \omega.$$

Тогда нулевое решение д.с. (I) асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \uparrow \omega$.

Теорема 2. Пусть д.с. (I) такова, что

I) алгебраические дополнения A_k, $k = \overline{1,n}$ элементов хотя бы одной строки (столбца) определителя $\det(P-\lambda E)$ обладает свойством

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k|^2 : \Delta \longrightarrow [A_\circ, M_\circ], \ A_\circ \in [0, +\infty[;$$

2) $\int^{\omega} \pi dt = +\infty$, $\int^{\omega} \pi \operatorname{Re}\lambda_1 dt = +\infty$;

3) $(\pi \int_T^t \operatorname{Re}\lambda_1 \pi dx)^{-1} \cdot \int_a^t (|\lambda_1'| + \sum_{s,k=1}^{n} |P_{sk}'|) d\tau = o(1)$, $t \uparrow \omega$

$(\int_a^t \pi \operatorname{Re}\lambda_1 dx)^{-1} \cdot \int_a^t L dt = o(1)$, $t \uparrow \omega$ $(\alpha = 0)$

$\exp(-\alpha \int_T^t \pi \operatorname{Re}\lambda_1 dx) \cdot \int_a^t L \cdot \exp[\alpha(1+\varepsilon_\circ) \cdot \int_T^\tau \pi \operatorname{Re}\lambda_1 dx] d\tau = o(1)$, $t \uparrow \omega$ $(\alpha = 0)$

$(\int_a^t \pi \operatorname{Re}\lambda_1 dx)^{-1} \cdot \int_a^t L d\tau = o(1)$, $t \uparrow \omega$ $(\alpha = 0)$

$\exp(-\alpha \int_a^t \pi \lambda_1 d\tau) \cdot \int_a^t L \cdot \exp[\alpha(1+\varepsilon_\circ) \cdot \int_a^\tau \pi \operatorname{Re}\lambda_1 dx] d\tau = o(1)$, $t \uparrow \omega$ $(\alpha > 0)$

$\exp(-a_\circ \int_a^t \pi dt) \cdot \int_a^t (|\lambda_1'| + \sum_{s,k=1}^{n} |P_{sk}'| + L) \cdot \exp(a_\circ \int_a^t \pi dx) d\tau = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $(a_\circ)$

$a_\circ = \gamma - \varepsilon_\circ$, $\varepsilon_\circ$ – достаточно малое положительное число.

Тогда нулевое решение д.с. (I) неустойчиво по Ляпунову при $t \uparrow \omega$.

В §4 сформулированы теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения д.с. (I) для частного случая:

$$\pi = \pi(\tau), \quad P = P(\tau), \quad \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m),$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k(t) \cdot t, \ \varepsilon_k : \Delta \to]0, +\infty[, \ \varepsilon \in C_\Delta^{(1)},$$

$$\varepsilon_k^{-1} \cdot \varepsilon_k' = o(1), \ t \uparrow \omega, \ k = \overline{1,m}.$$

В §5 приведен пример, удовлетворяющий результатам §3.

В §6 приведены преобразования, приводящие д.с. (I) к д.с. специального вида.

В §7 получены теоремы 3, 4, когда устойчивость определяется нелинейными слагаемыми.

Теорема 3. Пусть д.с. (I) такова, что

I) среди функций

$$\exp\left(\int_T^t \pi\lambda_1 d\tau\right),\ \left|\left[(1-k)\cdot\int_T^t A_k d\tau\right]^{\frac{1}{1-k}}\right|,\ \left|A_{2l+1}\cdot A_{2k+1}^{-1}\right|^{\frac{1}{2(k-l)}},$$

$k \neq l$, $k,l = \overline{2,m}$, существуют функции

$$\varphi_j = o(1),\ t \uparrow \omega,\ j = 1,2,$$

такие, что

$$(A_1\varphi_j - \varphi_j')x_1 + \sum_{l=2}^{m} A_l\cdot\varphi_j^l\cdot x^l = \Lambda_j\cdot\sum_{l=1}^{m}\Lambda_j^{-1}\cdot A_l^*\cdot\varphi_j^l\cdot x^l,\ j = 1,\ 2.$$

$$\Lambda_j = \max l\{A_l^*\cdot\varphi_j^l,\ l=\overline{1,m}\},\ j=1,2;\ \sum_{k=1}^{m}\Lambda_j^{-1}\cdot|A_k^*\cdot\varphi_j^k| > 0.$$

$$A_1^* = \pi\lambda_1\varphi_j - \varphi_j',\ A_k^* = A_k,\ k = \overline{2,m};$$

2) существует $k_1 \in]-\infty,0[$, $k_2 \in]0,+\infty[$ такие, что

$$\inf_{t\in\Delta,\ x\in[k_1,0]}\sum_{s=1}^{m}\Lambda_1^{-1}\cdot A_s^*\cdot\varphi_1^s\cdot x^s = 0$$

$$\sup_{t\in\Delta,\ x\in[0,k_2]}\sum_{s=1}^{m}\Lambda_2^{-1}\cdot A_s^*\cdot\varphi_2^s\cdot x^s = 0$$

3) существует $N_j \in]0,+\infty[$, $j=1,2$ такие, что

$$L\cdot\varphi_j^{\alpha+m-1}\cdot\Lambda_j^{-1} = o(1),\ t\uparrow\omega,\ L\cdot\varphi_j^{N_j(\alpha+m)-1}\cdot\pi^{-1} = o(1),\ t\uparrow\omega;$$

$$L\cdot\varphi_j^{(\alpha+m)-N}\cdot\Lambda_j^{-1} = o(1), t\uparrow\omega;\ L\cdot\varphi_j^{N_j(\alpha+m)-N_j}\cdot\pi^{-1} = o(1),\ t\uparrow\omega;$$

$$\Lambda^{-1}\cdot\varphi_j'\cdot\varphi_j^{-1} = o(1),\ t\uparrow\omega,\ \pi^{-1}\cdot\varphi_j'\cdot\varphi^{-1} = o(1),\ \ \pi^{-1}\cdot P_{sk}' = o(1),$$

$t \uparrow \omega$, $s,k = \overline{2,n}$,

$$\Lambda_j^{-1}\cdot P'_{sk} = o(1),\ t \uparrow \omega,\ \ \varphi_j''\cdot(\pi^2\varphi_j)^{-1} = o(1),\ \ \pi'\cdot\pi^{-1} = o(1),$$

$t \uparrow \omega$, $j = 1, 2$.

Тогда тривиальное решение д.с. (I) асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \uparrow \omega$.

Теорема 4. Пусть д.с. (I) такова, что

I) среди функций

$$\exp\left(\int_T^t \pi\lambda_1\, d\tau\right),\ \left|\left[(1-k)\int_T^t A_k\, d\tau\right]^{\frac{1}{1-k}}\right|,\ \left|A_{2l+1}\cdot A_{2k+1}^{-1}\right|^{\frac{1}{2(k-l)}},$$

$l,k = \overline{2,m}$, $k \neq l$, существует функция такая, что

$$\varphi = \varphi_0 + o(1),\ t \uparrow \omega,\ \varphi_0 \neq 0,$$

и

$$(\pi\lambda_1\varphi - \varphi')\cdot x_1 + \sum_{k=2}^{m} A_k\varphi^k x^k \equiv \Lambda\sum_{k=1}^{m}\Lambda^{-1}A_k^*\cdot\varphi^k x^k,$$

$$\Lambda = \max_l\{A_l^*\cdot\varphi^l,\ l = \overline{1,m}\},\ \sum_{l=1}^{m}\Lambda^{-1}\cdot|A_l^*\cdot\varphi^l| > 0.$$

$$M_l = \sup_{[a,\omega[}\{\Lambda^{-1}\cdot A_l^*\cdot\varphi^l\},\ \ m_l = \inf_{[a,\omega[}\{\Lambda^{-1}\cdot A_l^*\cdot\varphi^l\}.$$

2) $$\sum_{k=1}^{m} r_{k1}x_1^k > 0,\ \text{при } x_1 > 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{m} r_{k2}x_1^k < 0,\ \text{при } x_1 < 0,$$

где

$$r_{l_1} = m_l,\ r_{l_2} = \begin{cases} M_l, & l=2k \\ m_l, & l = 2k+1 \end{cases},\ l = \overline{1,m}$$

3) $L\cdot\Lambda^{-1}\cdot\varphi^{\alpha+m-1} = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $L\cdot\varphi^{\alpha+m-1}\cdot\pi^{-1} = o(1)$, $t \uparrow \omega$,

$$\Lambda^{-1}\cdot\varphi'\cdot\varphi^{-1} = o(1),\ t\uparrow\omega,\ \pi^{-1}\cdot\varphi'\cdot\varphi^{-1} = o(1),\ t \uparrow \omega,$$

$$\pi^{-1}\cdot\varphi'\cdot\varphi^{-1}=o(1),\ t\uparrow\omega,\ \pi^{-1}\cdot P'_{sk}=o(1),\quad t\uparrow\omega,$$

$$\pi'\cdot\pi^{-1}=o(1),\ t\uparrow\omega,\ \varphi''_j\cdot(\pi^2\cdot\varphi_j)^{-1}=o(1),\ t\uparrow\omega.$$

Тогда тривиальное решение д.с. (I) неустойчиво по Ляпунову при $t\uparrow\omega$.

Здесь рассмотрен случай, когда коэффициенты д.с. A_k, $k=\overline{1,m}$ суммируемы на Δ функции. В этом случае имеет место устойчивость нулевого решения, а асимптотическая устойчивость определяется свойством преобразования (когда все его коэффициенты стремятся к нулю при $t\uparrow\omega$).

В §8 приведен пример иллюстрирующий результаты §§ 6-7.

Во второй главе (§§ I-8) исследуется устойчивость нулевого решения в критическом случае пары комплексно-сопряженных корней, и содержится центральный результат диссертации.

В §2 приведены леммы, в которых строятся преобразования приводящие д.с. (I) к д.с. специального вида для квазилинейного случая.

В §3 получены признаки устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости, когда устойчивость определяется по линейным слагаемым.

Теорема 5. Пусть д.с. (I) такова, что

I) Если алгебраические дополнения A_{sk}, $s=\overline{1,n}$, s-ой строки (столбца) $(1\leqslant k\leqslant n)$ определителя $\det(P-\lambda_1 E_n)$ таковы, что

$$\sum_{s=1}^{n}|A_{ks}|^2\geqslant A_\circ,\ \ A_\circ\in\,]0,+\infty[,$$

и кроме того, если алгебраические дополнения Q_{ks}, $s=\overline{2,n}$, s-го столбца (строки) $(2\leqslant k\leqslant n)$ определителя $\det(Q_1-\lambda_2 E_{n-1})$ таковы, что

$$\sum_{s=2}^{n}|Q_{ks}|^2 \geqslant Q_\circ, \quad Q_\circ \in \,]0, +\infty[;$$

2) $\int^{\omega}\pi dt = +\infty, \int^{\omega}\pi a_\circ dt = -\infty;$

3) $J_1 \equiv \exp[(1-\mu)\cdot\int_T^t \pi\cdot a_\circ dx]\cdot\int_T^t [|a_\circ'| + |b_\circ'| + \sum_{s,k=1}^{n}|P_{sk}'| +$

$+ L\cdot\exp(\alpha\cdot\mu\cdot\int_T^y \pi a_\circ dx)]\cdot\exp[(\mu-1)\cdot\int_T^y \pi a_\circ dx]dy = O(1),\ t\uparrow\omega.$

$J_2 \equiv \exp(-\gamma_1\cdot\int_T^t \pi dx]\cdot\int_T^t [|a_\circ'| + |b_\circ'| + \sum_{s,k=1}^{n}|P_{sk}'| + L\cdot\exp(\alpha\mu\cdot$

$\cdot\int_T^y \pi a_\circ dx)]\cdot\exp(\gamma_1\cdot\int_T^y \pi dx)dy = O(1),\ t\uparrow\omega,\quad \gamma_1 = \gamma - \varepsilon_\circ,$

$\varepsilon_\circ$ – достаточно малое положительное число.

Тогда тривиальное решение д.с. (I) асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t\uparrow\omega$.

Теорема 6. Пусть д.с. (I) такова, что

I. выполняется условие I) теоремы 5;

2. $\int^{\omega}\pi dt = +\infty, \int^{\omega}\pi a_\circ dt = +\infty;$

3. $(\int_a^t \pi a_\circ dx)^{-1}\cdot\int_a^t (|a_\circ'| + |b_\circ'| + \sum_{s,k=1}^{n}|P_{sk}'|)d\tau = o(1),\ t\uparrow\omega,$

$(\int_a^y \pi a_\circ dx)^{-1}\cdot\int_a^y L d\tau = o(1),\ t\uparrow\omega,\ (\alpha = 0)$

$\exp(-\alpha\cdot\int_a^t \pi a_\circ d\tau]\cdot\int_a^t L\exp[\alpha(1+\varepsilon_\circ)\cdot\int_a^\tau \pi a_\circ dx]d\tau = o(1),\ t\uparrow\omega, (\alpha > 0),$

$\exp(-a_1\cdot\int_a^t \pi d\tau)\cdot\int_a^t(|a_\circ'|+|b_\circ'|+\sum_{s,k=1}^{n}|P_{sk}'| + L)\cdot\exp(a_1\cdot\int_a^t \pi dx)d\tau = o(1),$

$t\uparrow\omega$, (a_1), $a_1 = \gamma - \varepsilon_\circ$, $\varepsilon_\circ$ – достаточно малое положительное число.

Тогда тривиальное решение д.с. (I) неустойчиво по Ляпунову при $t\uparrow\omega$.

В §4 сформулированы теоремы, для этого случая, об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения д.с. (I) в квазилинейном случае.

$$\pi = \pi(\tau), \quad P = P(\tau), \quad \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m),$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k(t)\cdot t, \ \varepsilon_k : \Delta \to \,]0, +\infty[, \ \varepsilon \in C_\Delta^{(1)},$$

$$\varepsilon_k^{-1}\cdot\varepsilon_k' = o(1), \ t \uparrow \omega, \ k = \overline{1,m}.$$

В §5 приведен пример, удовлетворяющий результатам §§ 2-4.

В §6 преобразуется д.с. (I) к д.с. специального вида для нелинейного случая.

В §7 получены теоремы 7 и 8, когда устойчивость определяется нелинейными слагаемыми.

Теорема 7. Пусть д.с. (0.I) такова, что

I) среди функций

$$|2k\cdot\int_1^t A_{2k+1}d\tau|^{-1/2k}, \ |A_{2l+1}\cdot A_{2k+1}^{-1}|^{\frac{1}{2(k-l)}},$$

$k \neq l$, $k,l = \overline{1,m_\circ}$, существует функция

$$\varphi = o(1), \ t \uparrow \omega,$$

такая, что

$$(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{-1/2}\cdot\varphi = o(1), \ t \uparrow \omega$$

и

$$(\pi\cdot a_\circ\cdot\varphi - \varphi')\cdot x + \sum_{k=1}^{m_\circ} A_{2k+1}\cdot\varphi^{2k+1}\cdot x^{2k+1} \equiv \Lambda\cdot\sum_{k=0}^{m_\circ}\Lambda^{-1}\cdot A_{2k+1}^\circ\cdot\varphi^{2k+1}\cdot x^{2k+1},$$

$$\Lambda = \max 1\{A_{2k+1}^\circ\cdot\varphi^{2k+1}, \ k=\overline{0,m_\circ}\}, \ \sum_{k=0}^{m_\circ}\Lambda^{-1}\cdot|A_{2k+1}^\circ\cdot\varphi^{2k+1}| > 0.$$

где

$$A_1^\circ = \pi a_\circ\varphi - \varphi', \ A_{2l+1}^\circ \equiv A_{2l+1}, \ l = \overline{1,m_\circ}.$$

2) существует $k \in \,]0, +\infty[$ такое, что

$$\sup_{t\in\Delta,\ x\in[0,k]} \sum_{s=0}^{m_\circ} \Lambda^{-1}\cdot A^\circ_{2s+1}\cdot\varphi^{2s+1}\cdot x^{2s+1} = 0$$

3) существует $N^* \in\ ]0, +\infty[$, такое, что

$$(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{-1/2}\cdot P'_{sk}\cdot\varphi^{-N+2}\cdot\Lambda^{-1} = o(1),\ t\uparrow\omega,\ s,k=\overline{1,n},$$

$$\pi_k\cdot\pi^{-1}\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{-1/2}\cdot\varphi^{k-1} = o(1),\ t\uparrow\omega,\ k=\overline{2,m},$$

$$P'_{sk}\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{-1/2}\cdot\varphi^{k-1} = o(1),\ t\uparrow\omega,$$

$$P'_{sk}\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{-1/2}\cdot\Lambda^{-1} = o(1),\ t\uparrow\omega,$$

$\varphi'\cdot(\pi\cdot\varphi)^{-1} = o(1),\ t\uparrow\omega,\ s,k=\overline{1,n},\ \pi'\cdot\pi^{-1}\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{-1/2} = o(1),\ t\uparrow\omega,$

$\pi_k\cdot\pi'\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{-1/2} = o(1),\ t\uparrow\omega,\ k=\overline{2,m},$

$$\varphi^{|Q|-1}\cdot\sum_{\sum_{k=2}^{m} ks_k - l + 1 = |Q|} [\pi\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{(-l-1)/2}\cdot\prod_{k=2}^{m}(\pi_k(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{-k/2})^{s_k} = o(1),$$

$t\uparrow\omega,\ |Q| = \overline{2,m},$

$$\varphi^{|Q|-1}\cdot\sum_{\sum_{k=2}^{m} ks_k - l + 1 = |Q|} (\pi\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{1/2})^{-l-2}\cdot\prod_{k=2}^{m}(\pi_k(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{-k/2})^{s_k} = o(1),$$

$t\uparrow\omega,\ |Q| = \overline{2,m},$

$$(\pi + \Lambda\cdot\varphi^{-1})\cdot\pi\cdot\varphi^{N^*(|Q|-s)+s-1}\cdot\sum_{\sum_{k=2}^{m} ks_k - l + s = |Q|} (\pi\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{1/2})^{-l}\cdot\prod_{k=2}^{m}(\pi_k(a_\circ^2 +$$

$$+ b_\circ^2)^{-k/2})^{s_k} = o(1),\ t\uparrow\omega,\ s=\overline{0,|Q|-1}\ |Q| = \overline{2,2m-1},$$

$$\varphi^{N^*|Q|-1}\cdot\sum_{\sum_{k=2}^{m} ks_k - l + 1 = |Q|} (\pi\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{-1/2})^{l}\cdot\prod_{k=2}^{m}(\pi_k(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{-k/2})^{s_k} = o(1),$$

$t \uparrow \omega$, $|Q| = \overline{2,2m+1}$,

$$L\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{(-m+\alpha)/2}\cdot\Lambda^{-1} = o(1),$$

$$L\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{(-m+\alpha)/2}\cdot\varphi^{N^*(\alpha+m)-1}\cdot\pi^{-1} = o(1),\ t \uparrow \omega.$$

$$L\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{(-m+\alpha)/2}\cdot\varphi^{\alpha+m-N^*+1}\cdot\Lambda^{-1} = o(1),\ t \uparrow \omega.$$

$$L\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{(-m+\alpha)/2}\cdot\varphi^{N^*(\alpha+m)-N^*-1}\cdot\pi^{-1} = o(1),\ t \uparrow \omega.$$

$$\varphi^{N^*(|Q|-s)+s-N^*}\cdot(\pi + \Lambda\cdot\varphi^{-1})\cdot\sum_{\sum_{k=2}^{m} ks_k-l+1=|Q|}(\pi\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{1/2})^{-1}\cdot\prod_{k=2}^{m}(\pi_k(a_\circ^2+$$

$$+ b_\circ^2)^{-k/2})^{s_k} = o(1),\ t \uparrow \omega,\ s = \overline{0,|Q|-1},\ |Q| = \overline{2,2m+1},\ |Q| = \overline{2,2m-1},$$

$$\varphi^{N^*(|Q|-1)}\cdot\sum_{\sum_{k=2}^{m} ks_k-l+1=|Q|}(\pi\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{-1/2})^{-1}\cdot\prod_{k=2}^{m}(\pi_k(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{-k/2})^{s_k} = o(1),$$

$t \uparrow \omega$, $|Q| = \overline{2,2m+1}$,

$$\varphi^{|Q|-N^*+1}\cdot\Lambda^{-1}\cdot\sum_{\sum_{k=2}^{m} ks_k-l+1=|Q|}(\pi\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{1/2})^{-1}\cdot\prod_{k=2}^{m}(\pi_k(a_\circ^2+ b_\circ^2)^{-k/2})^{s_k} =$$

$o(1), t \uparrow \omega$, $|Q| = \overline{m+1\,,m^2}$

Тогда тривиальное решение д.с. (I.6.4) асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t \uparrow \omega$.

Теорема 8. Пусть д.с. (I) такова, что

I) среди функций

$$\exp\left(\int_{T}^{t}\pi\lambda_1 d\tau\right),\ \left|[2k\int_{T}^{t} A_k d\tau]^{-1/2k}\right|,\ |A_{2l+1}\cdot A_{2k+1}^{-1}|^{\frac{1}{2(l-k)}},$$

$l,k = \overline{2,m}$, $k \neq l$, существует функция такая, что

$$\varphi = \varphi_\circ + o(1),\ t \uparrow \omega,\ \varphi_\circ \neq 0,$$

и

$$(\pi\cdot\lambda_1\cdot\varphi - \varphi')x_1 + \sum_{k=1}^{m} A_{2k+1}\cdot\varphi^{2k+1}\cdot x^{2k+1} \equiv \Lambda\cdot\sum_{k=1}^{m}\Lambda^{-1}\cdot A^\circ_{2k+1}\cdot\varphi^{2k+1}\cdot x^{2k+1},$$

$$\Lambda = \max l\ \{A^\circ_l\cdot\varphi^l,\ l = \overline{1,m}\},\ \sum_{l=1}^{m}\Lambda^{-1}\cdot|A^\circ_l\cdot\varphi^k| > 0.$$

$$M_l = \sup_{[a,\omega[}\{\Lambda^{-1}\cdot A^\circ_l\cdot\varphi^l\},\quad m_l = \inf_{[a,\omega[}\{\Lambda^{-1}\cdot A^\circ_l\cdot\varphi^l\}.$$

2) $$\sum_{k=1}^{m} r_k x_1^k > 0,\ \text{при}\ x_1 > 0,$$

3) Выполняются следующие соотношения

$$\pi_k\cdot\pi^{-1}\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{-1/2}\cdot\varphi^{k-1} = o(1),\ t \uparrow \omega,\ k = \overline{2,m},$$

$$P'_{sk}\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{-1/2}\cdot\varphi^{k-1} = o(1),\ t \uparrow \omega,$$

$$P'_{sk}\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{-1/2}\cdot\Lambda^{-1} = o(1),\ t \uparrow \omega,\ s,k = \overline{1,n},$$

$$\varphi'\cdot(\pi\varphi)^{-1} = o(1),\ \pi'\cdot\pi^{-1}\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{-1/2} = o(1),\ t \uparrow \omega,$$

$$\pi_k\cdot\pi^{-1}\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{-1/2} = o(1),\ t \uparrow \omega,\ k = \overline{2,m},$$

$$\varphi^{|Q|-1}\cdot\sum_{\sum_{k=2}^{m} ks_k - l + 1 = |Q|}(\pi\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{1/2})^{-1-2}\cdot\prod_{k=2}^{m}(\pi_k(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{-k/2})^{s_k} = o(1),$$

$t \uparrow \omega,\ |Q| = \overline{2,m},$

$$\varphi^{|Q|-1}\cdot\Lambda^{-1}\cdot\sum_{\sum_{k=2}^{m} ks_k - l + 1 = |Q|}(\pi\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{1/2})^{-1-2}\cdot\prod_{k=2}^{m}(\pi_k(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{-k/2})^{s_k} = o(1)$$

$t \uparrow \omega,\ |Q| = \overline{2,m},$

$$L\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{(-m+\alpha)/2}\cdot\Lambda^{-1} = o(1),$$

$$L\cdot(a_\circ^2 + b_\circ^2)^{(-m+\alpha)/2}\cdot\pi^{-1} = o(1),\ t \uparrow \omega.$$

Тогда тривиальное решение д.с. (0.I) неустойчиво по Ляпунову при $t \uparrow \omega$.

А также получены теоремы, когда коэффициенты д.с. A_{2k+1}, $k=\overline{0,m}$. суммируемы на Δ функции. В этом случае имеет место устойчивость нулевого решения, а асимптотическая устойчивость определяется свойством преобразования (когда все его коэффициенты стремятся к нулю при $t \uparrow \omega$).

В §8 приводится пример иллюстрирующий результаты §§ 6-7.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах:

I. Витриченко И.Е., Карауани М.Н. Об устойчивости тривиального решения квазилинейной неавтономной системы с медленным временем в критическом случае одного нулевого корня.- Деп. в УкрИНТЭИ.- 27.05.92, N 752-Ук. 92.- 42 с.

2. Витриченко И.Е., Карауани М.Н. Об устойчивости тривиального решения неавтономной существенно нелинейной системы с медленным временем в критическом случае одного нулевого корня.- Респ. научно-метод. конф. посвящ. 200-летию со дня рождения Н.И.Лобачевского, тезисы докладов, Одесса, 92, часть I.- С. II4.

3. Карауани М.Н. Об устойчивости тривиального решения квазилинейной неавтономной системы с медленным временем в критическом случае пары комплексно-сопряженных корней.- Деп. в УкрИНТЭИ 03.I2.92, N I894.- Ук. 92.- 34 с.

4. Карауани М.Н. Об устойчивости тривиального решения существенно нелинейной неавтономной системы с медленно меняющимися коэффициентами в критическом случае пары комплексно-сопряженных корней.- Деп. в УкрИНТЭИ I5.03.93, N 506.- Ук. 93.- 38 с.

Подписано к печати 6. 05.1994г.
Заказ 480 Тираж 100

Бумага типографская N1
Печать офсетная

Отдел оперативной полиграфии
270001, г. Одесса, ул. Ленина, 28