Міністерство освіти України
Київський університет ім.Т.Г.Шевченка

на правах рукопису

Сафуан Зезун Мустафа

Дослідження стійкості розв'язків систем лінійних диференційних і різницевих рівнянь з випадковими [illegible]фіцієнтами та випадковими [illegible]твореннями

01.01.02 - диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1994

Дисертація є рукопис

Робота виконана
на кафедрі вищої математики
Київського державного економічного
університету

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор Валеєв К.Г.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук, професор Хусаїнов Д.Я.
- кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник Коломієць В.Г.

Провідна організація - Інститут кібернетики ім.В.М.Глушкова національної АН України

Захист дисертації відбудиться "20" червня 1994р. о 14 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради К 01.01.14 по присудженню вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук у Київському університеті ім. Т.Г.Шевченка за адресою: 252127, м.Київ, проспект академіка Глушкова,6, механіко-математичний факультет, ауд. 42.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Київського університету ім. Т.Г.Шевченка, Київ, вул.Володимирська,58

Автореферат розісланий "19" травня 1994р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради О.О.Курченко

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми . Ця робота присвячена дослідженню стійкості розв'язку і побудові функцій Ляпунова для систем лінійних диференціальних та різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами та з випадковими перетвореннями. Досліджується стійкість розв'язку систем з коефіцієнтами, які залежать від марковського чи напівмарковського скінченнозначного випадкового процесу. Такі системи вивчали В.М.Артем'ев, І.Є.Казаков, М.М.Красовський, Г.М.Мільштейн, С.М.Хрисанов та ін. Системи з випадковими коефіцієнтами і випадковими стрибками досліджували М.А.Девіс, І.Я.Кац, Р.Дж.Еліот. Системи лінійних диференційних рівнянь з імпульсним впливом вивчали М.О.Перестюк, А.М.Самойленко.

Метод функцій Ляпунова та математичне застосування його було розроблено і запропоновано О.М.Ляпуновим. Надалі цю роботу продовжили М.А.Айзерман, Е.А.Барбашин, К.Г.Валеєв, В.І.Зубов, М.Г.Єругін, Г.В.Каменков, М.Ф.Кириченко, М.М.Красовський, І.Г.Малкін, В.А.Плісс, Б.С.Разуміхін, В.В.Румянцев, А.М.Самойленко, В.Хан, Д.Я.Хусаінов, М.Г.Четаєв та ін.

Для динамічних систем с напівмарковськими коефіцієнтами в дисертації були виведені нові результати.

Теорія напівмарковських процесів найвірогідніше почалась з роботи П.Леві, потім її розвинули В.С.Королюк, І.М.Коваленко, А.Ф.Турбін, Д.В.Гусак, В.В.Анісімов та ін.

Нині теорія стійкості руху систем, параметри яких залежать від випадкових процесів, набула широкого розвитку. Стійкість руху стохастичних динамічних систем розглядали М.М.Боголюбов, В.В.Болотін, І.І.Гіхман, А.В.Скороход, Д.Г.Кореневський, Г.Дж.Кушнер. У нашій роботі здійснювалося дослідження у середньому

L_2-стійкості та стійкості в середньому квадратичному рішень систем диференціальних та різницевих рівнянь з марковськими чи напівмарковськими коефіцієнтами та випадковими перетвореннями рішень. Були виведені моментні рівняння для випадкового рішення. Також виведені рівняння для стохастичних функцій Ляпунова.

Мета работи полягає в дослідженні стійкості розв'язку систем лінійних диференціальних і різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами та із стрибками чи випадковими перетвореннями, які залежать від випадкового процесу, а також у побудові функцій Ляпунова.

Загальні методи дослідження. Основними методами дослідження є: теорія диференціальних і різницевих рівнянь, стохастичні функції Ляпунова, перетворення Лапласа, чисельні методи розв'язку рівнянь та метод моментних рівнянь.

Наукова новизна.

1. Виведені системи моментних рівнянь для систем лінійних диференціальних і різницевих рівнянь з випадковими марковськими чи напівмарковськими коефіцієнтами та випадковими стрибками або випадковими перетвореннями розв'язку.

2. Розроблені чисельно-аналітичні методи дослідження стійкості у середньому і середньому квадратичному розв'язку систем диференціальних та різницевих рівнянь з випадковими напівмарковськими коефіцієнтами і випадковими стрибками або перетвореннями рішень. Більш детально досліджується стійкість розв'язку лінійного диференціального рівняння першого порядку.

3. Знайдено необхідні і достатні умови у середньому L_2-стійкості розв'язку систем диференціальних і різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами та перетвореннями розв'язку, які виражені через моментні рівняння.

4. Знайдені необхідні й достатні умови існування стохастичних функцій Ляпунова для систем лінійних диференціальних рівнянь з випадковими напівмарковськими коефіцієнтами і випадковими стрибками розв'язку, які дають змогу дослідити у середньому L_2-стійкість розв'язку.

Практична цінність. Одержані в дисертації результати мають теоретичне значення і можуть бути використані для розв'язку практичних задач в теорії стійкості систем, а також теорії управління.

Апробація та публікації. Матеріали дисертації повідомлялися на семінарі в Київському державному економічному університеті під керівництвом доктора фіз.-мат.наук, професора Валєєва К.Г.; на Українській конференції "Моделювання і дослідження стійкості систем "у м.Києві (1993г.).

За матеріалами дисертації опубліковано 7 робіт [1-7].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з вступу, трьох розділів, які містять 12 параграфів, висновків, списку літератури та додатків. Бібліографія містить 124 назви. Загальний обсяг дисертації - 174 сторінок, обсяг основного тексту 168 сторінок.

У вступі обгрунтована актуальність теми дисертації, сформульована мета роботи, міститься огляд літератури щодо теми, коротко викладено зміст дисертації.

В першому розділі досліджується стійкість розв'язку системи лінійних диференціальних і різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами, випадковими стрибками чи перетвореннями розв'язку.

У §1.1 наведено раніше відомі дослідження про марковські та напівмарковські процеси, стохастичні оператори.

У §1.2 розглянуто систему лінійних різницевих рівнянь

$$X_{n+1} = A(\zeta_n)\, X_n, \qquad \det A(\zeta) \neq 0, \qquad (1)$$

2-4-2269

де ζ_n - послідовність незалежних, однаково розподілених випадкових величин.

Для системи (1) одержані системи лінійних різницевих рівнянь для моментів першого порядку

$$M(n+1) = B\,M(n); \quad B \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} A(\zeta)\,\phi(\zeta)\,d\zeta \tag{2}$$

та для моментів другого порядку

$$D(n+1) = R\,D(n); \quad R\,D \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} A(\zeta) D A^{*}(\zeta)\phi(\zeta)d\zeta. \tag{3}$$

Теорема I.I. Нехай коефіцієнти системи лінійних рівнянь (1) залежать від випадкових величин ζ_n , які незалежні і мають однакову щільність імовірностей $\phi(\zeta)$. Тоді стійкість нульового розв'язку системи (1) у середньому рівнозначна стійкості розв'язку системи різницевих рівнянь (2). Стійкість нульового розв'язку системи різницевих рівнянь (1) у середньому квадратичному рівнозначна стійкості розв'язку системи різницевих рівнянь (3).

Також розглянуто випадок, коли матриця коефіцієнтів в системі (1) залежить від послідовності випадкових незалежних величин ζ_n, та від деякого марковського ланцюга η_n .

У §I.3 розглянуто послідовність випадкових перетворень (22), (23), які залежать від марковського випадкового процесу. Коли випадкові перетворення є лінійні

$$\Phi_l(X) \equiv A_l X + B_l, \qquad (l = 1,\dots,N), \tag{4}$$

знайдено моментні рівняння для моментів першого порядку

$$M(n+1) = A\,M(n) + B; \quad A \equiv \sum_{l=1}^{N} p_l A_l, \quad B \equiv \sum_{l=1}^{N} p_l B_l \tag{5}$$

та моментні рівняння для моментів другого порядку

$$D(n+1) = \sum_{l=1}^{N} p_l (A_l D(n) A_l^* + A_l M(n) B_l^* + B_l M^*(n) A_l^* + B_l B_l^*). \quad (6)$$

Назвемо при $B_l = 0$ $(l = 1,\ldots,N)$ послідовність випадкових перетворень стійкою у середньому, якщо нульовий розв'язок рівняння (5) був стійким, і стійкою у середньому квадратичному, якщо нульовий розв'язок рівняння (6) був стійким.

Також розглянуто випадок, коли послідовність випадкових перетворень залежить від марковського ланцюга.

У §I.4 розглянуто систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(\zeta(t))\, X(t), \quad (7)$$

коефіцієнти якої залежать від напівмарковського випадкового процесу $\zeta(t)$. Позначимо щільність розподілу системи випадкових величин $(X(t),\zeta(t))$ через

$$f(t,X,\zeta) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t,X)\, \delta(\zeta - \theta_k)$$

тоді моменти першого порядку мають вигляд

$$M(t) \equiv \langle X(t) \rangle = \sum_{k=1}^{n} M_k(t), \quad M_k(t) \equiv \int_{E_m} X\, f_k(t,X)\, dX,$$

де E_m - m-мірний простір змінних $x_1,\ldots,x_m$, які становлять вектор $X = (x_1,\ldots,x_m)^*$, $dX \equiv dx_1,\ldots,dx_m$.

Аналогічно вводиться матриця моментів другого порядку

$$D(t) \equiv \langle X(t)X^*(t) \rangle = \sum_{k=1}^{n} D_k(t), \quad D_k(t) \equiv \int_{E_m} XX^* f_k(t,X)dX.$$

Для системи (7) виведені рівняння для моментів першого порядку

2*

$$M_k(t) = \phi_k(t)\, e^{A_k t} M_k(0) + \int_0^t \phi_k(t-\tau)\, e^{A_k(t-\tau)} Z_k(\tau)d\tau;$$

$$Z_k(t) = \sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t) C_{ks} e^{A_s t} M_s(0) + \int_0^t \sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t-\tau) C_{ks} e^{A_s(t-\tau)} Z_s(\tau)d\tau,$$

$$(k=1,\ldots,n) \qquad (8)$$

а також для моментів другого порядку

$$D_k(t) = \phi_k(t) e^{A_k t} D_k(0) e^{A_k^* t} + \int_0^t \phi_k(t-\tau) e^{A_k(t-\tau)} W_k(\tau) e^{A_k^*(t-\tau)} d\tau;$$

$$W_k(t) = \sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t) C_{ks}\, e^{A_s t} D_s(0) e^{A_s^* t}\, C_{ks}^* +$$

$$+ \int_0^t \sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t-\tau) C_{ks} e^{A_s(t-\tau)} W_s(\tau) e^{A_s^*(t-\tau)} C_{ks}^*\, d\tau \ (k=1,\ldots,n) \qquad (9)$$

У цих рівняннях (8) і (9) можна передбачити, що в момент t_j стрибка випадкового процесу відбувається стрибок розв'язку системи диференціальних рівнянь (7)

$$X(t_j + 0) = C_{ks} X(t_j - 0), \quad \det C_{ks} \neq 0 \quad (k,s = 1,\ldots,n).$$

При цьому припускається, що напівмарковський процес $\zeta(t)$ переходить в момент t_j із стану θ_s у стан θ_k.

У другому розділі розглянуто стійкість розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь з випадковими коефіцієнтами і з стрибками, що залежать від марковського чи напівмарковського випадкового процесу.

У §2.I досліджується стійкість системи рівнянь (7), де $\zeta(t)$ напівмарковський процес, стрибки якого співпадають з стрибками коефіцієнтів. З системи рівнянь (8), (9) можемо одержати систему моментних рівнянь для марковського процесу при $C_{ss}=E$ $(s=1,\dots,n)$

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_kD_k(t) + D_k(t)A_k^* + \sum_{s=1}^{n} \alpha_{ks}C_{ks}D_s(t)C_{ks}^* \quad (k=1,\dots,n). \qquad (10)$$

Для дослідження стійкості розв'язку моментних рівнянь використаємо властивості симетричних матриць. Вводимо лінійний оператор N, який перетворює симетричну матрицю D знову в симетричну матрицю $N\cdot D$. Цей оператор називається монотонним, якщо з нерівності $D_1 \geqslant D_2$ випливає справедливість нерівності $N\cdot D_1 \geqslant N\cdot D_2$. Доведено леми.

Лема 2.1. Лінійний оператор $N_{ks}(t)$, визначений за формулою

$$N_{ks}(t)\cdot W(t) \equiv \int_0^t q_{ks}(t-\tau)C_{ks}e^{A_s(t-\tau)}W(\tau)e^{A_s^*(t-\tau)}C_{ks}^*d\tau \qquad (11)$$

є монотонним.

Лема 2.2. Симетричні матриці $W_k(t)$ $(k=1,\dots,n)$, визначені системою рівнянь (9), задовольняють нерівності

$$W_k(t) \geqslant 0 \qquad (k=1,\dots,n). \qquad (12)$$

Вводячи позначення

$$D_k = \int_0^\infty D_k(t)dt, \qquad W_k = \int_0^\infty W_k(\tau)d\tau \qquad (k=1,\dots,n)$$

та інтегруючи систему рівнянь (9), приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$D_k = \int_0^\infty \phi_k(t)e^{A_kt}(D_k(0) + W_k)e^{A_k^*t}dt;$$

$$W_k = \sum_{s=1}^{n} \int_0^\infty q_{ks}(t)C_{ks}e^{A_st}(D_s(0) + W_s)e^{A_s^*t}C_{ks}^*dt$$

$$(k=1,\dots,n). \qquad (13)$$

Визначення 2.1. Назвемо розв'язок системи рівнянь (7) у середньому L_2-стійким, якщо збігається невласний інтеграл

$$\mathfrak{I} = \int_0^\infty < |X(t)|^2 > dt.$$

Доведено теореми.

Теорема 2.1. Для того, щоб нульовий розв'язок системи рівнянь (7) з стрибками $X(t_j+0) = C_{ks}X(t_j-0)$, $\det C_{ks} \neq 0$, $(j = 0,1,2,\ldots,\ k,s = 1,\ldots,n)$ у випадкові моменти часу t_j $(j = 0,1,2,\ldots)$, які визначаються стрибками випадкового марковського процесу $\zeta(t)$, було у середньому L_2-стійким, необхідно, щоб збігалися матричні інтеграли

$$\mathfrak{I}_k = \int_0^\infty \psi_k(t)e^{A_k t}D_k(0)e^{A_k^* t}\,dt \quad (k = 1,\ldots,n) \qquad (14)$$

Теорема 2.2. Нехай виконані нерівності $\mathfrak{I}_k < \infty$ $(k = 1,\ldots,n)$. Для у середньому L_2-стійкості нульового розв'язку системи (7) необхідно і достатньо, щоб система рівнянь (13) мала обмежений невід'ємний розв'язок

$$W_k \geqslant 0 \qquad (k = 1,\ldots,n).$$

Теорема 2.3. Для того, щоб нульовий розв'язок системи рівнянь (7) був у середньому L_2-стійким необхідно і достатньо, щоб збігався метод послідовних наближень при вирішенні системи рівнянь (13)

$$W_k^{(l+1)} = \sum_{s=1}^{n}\int_0^\infty q_{ks}(t)C_{ks}e^{A_s t}(D_s(0) + W_s^{(l)})e^{A_s^* t}C_{ks}^*dt \qquad (15)$$

$$(k = 1,\ldots,n,\ l = -1,0,1,2,\ldots)$$

при $W_k^{(-1)} = 0$ $(k = 1,\ldots,n)$.

У §2.2. пропонується чисельно-аналітичний метод дослідження стійкості у середньому квадратичному розв'язку лінійного диференціального рівняння з випадковими напівмарковськими коефіцієнтами

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(\zeta(t))\, x(t) \qquad (16)$$

та випадковими стрибками розв'язку

$$x(t_j + 0) = C_{ks} x(t_j - 0); \quad C_{ks} \neq 0. \qquad (17)$$
$$(j = 0,1,2,\ldots, \quad k,s = 1,\ldots,n).$$

Доведено теореми.

Теорема 2.4. Для того, щоб виконувались співвідношення

$$\lim_{t\to+\infty} d_k(t) = 0 \quad (k = 1,\ldots,n) \qquad (18)$$

необхідно, щоб виконувались співвідношення

$$\lim_{t\to+\infty} \phi_k(t) e^{2a_k t} = 0 \quad (k = 1,\ldots,n), \qquad (19)$$

де позначено $\phi_k(t) = \int_t^{\infty} q_k(t)dt \quad (k = 1,\ldots,n);\ \phi_k(0) = 1.$

Теорема 2.5. Нехай виконані співвідношення (19), а також збігаються невласні інтеграли

$$\int_0^{+\infty} \phi_k(t) e^{2a_k t}\, dt < \infty \quad (k = 1,\ldots,n). \qquad (20)$$

Для того, щоб виконувалося співвідношення (18), достатньо, щоб виконувалися граничні співвідношення

$$\lim_{t\to+\infty} W_k(t) = 0 \quad (k = 1,\ldots,n). \qquad (21)$$

Теорема 2.6. Якщо виконані умови теореми 2.5., то з асимптотичної стійкості розв'язку системи інтегральних рівнянь

$$W_k(t) = \sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t) C_{ks}^2 e^{2a_s t} d_s(0) +$$

$$+\int_0^t \sum_{s=1}^n q_{ks}(t-\tau)C_{ks}^2 e^{2a_s(t-\tau)} W_s(\tau)d\tau \qquad (k = 1,\ldots,n)$$

випливає асимптотична стійкість нульового розв'язку (16) у середньому квадратичному.

У цьому параграфі також запропоновано алгоритм чисельного дослідження стійкості рівнянь (16). Побудовано границі області нестійкості.

У §2.3 розглянуто системи лінійних диференціальних рівнянь (7) з коефіцієнтами, які залежать від напівмарковського процесу і передбачається, що одночасно з стрибками напівмарковського випадкового процесу відбуваються випадкові перетворення рішень. Введено таке поняття випадкового перетворення:

Нехай випадковий вектор X має щільність імовірності $f_1(X)$. Перетворення вектора X у вектор Y можна називати випадковим, якщо

$$Y = \Phi(X,\eta), \tag{22}$$

де η - випадкова величина. Введемо стохастичні оператори S_{rl} які визначаються за формулою

$$S_{rl}f(Y) = \sum_{s=1}^{N_{rl}} p_{r,l,s} f(A^{-1}_{r,l,s}Y)|\det A^{-1}_{r,l,s}| \quad (r,l = 1,\ldots,n). \tag{23}$$

Тоді для системи (7) маємо такі рівняння для моментів першого порядку

$$M_k(t) = \phi_k(t)N_k(t)M_k(0) + \int_0^t \phi_k(t-\tau)N_k(t-\tau)V_k(\tau)d\tau;$$

$$V_k(t) = \sum_{s=1}^n q_{ks}(t)C_{ks}N_s(t)M_s(0) + \int_0^t \sum_{s=1}^n q_{ks}(t-\tau)C_{ks}N_s(t-\tau)V_s(\tau)d\tau;$$

$$C_{ks} \equiv \sum_{l=1}^{N_{ks}} p_{k,s,l} A_{k,s,l} \quad (k = 1,\dots,n) \qquad (24)$$

і моментів другого порядку

$$D_k(t) = \psi_k(t) N_k(t) D_k(0) N_k^*(t) + \int_0^t \psi_k(t-\tau) N_k(t-\tau) W_k(\tau) N_k^*(t-\tau) d\tau$$

$$(k = 1,\dots,n)$$

$$W_k(t) = \sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t) \sum_{l=1}^{N_{ks}} p_{k,s,l} A_{k,s,l} N_s(t) D_s(0) N_s^*(t) A_{k,s,l}^* +$$

$$+ \int_0^t \sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t-\tau) \sum_{l=1}^{N_{ks}} p_{k,s,l} A_{k,s,l} N_s(t-\tau) W_s(\tau) N_s^*(t-\tau) A_{k,s,l}^* d\tau$$

$$(k = 1,\dots,n). \qquad (25)$$

Теорема 2.7. Для того, щоб розв'язки системи

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t,\zeta(t))X(t) \qquad (26)$$

були у середньому L_2-стійкими, необхідно, щоб збігались невласні інтеграли

$$\Im_k = \int_0^\infty \psi_k(t) \, \| N_k(t) \|^2 dt < \infty \quad (k = 1,\dots,n). \qquad (27)$$

Ввівши позначення

$$D_k = \int_0^\infty D_k(t) dt, \quad W_k = \int_0^\infty W_k(t) dt \quad (k = 1,\dots,n), \qquad (28)$$

маємо таку систему матричних рівнянь

$$D_k = \int_0^\infty \psi_k(t) N_k(t) (D_k(0) + W_k) N_k^*(t) dt,$$

$$W_k = \int_0^\infty \sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t) \sum_{l=1}^{N_{ks}} p_{k,s,l} A_{k,s,l} N_s(t) (D_s(0) + W_s) N_s^*(t) A_{k,s,l}^* dt.$$

$$(k = 1,\dots,n) \qquad (29)$$

Теорема 2.8. Нехай коефіцієнти системи рівнянь (26) залежать від напівмарковського процесу $\zeta(t)$, як зазначено у формулах

$$\frac{dX(t)}{dt} = A_k(t - t_j)X(t) \qquad (t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}) \tag{30}$$

і розв'язок $X(t)$ зазнає випадкових перетворень

$$X(t_j+0) = \Phi_{rl}(X(t_j-0),\eta_{rl}) \qquad (r,l = 1,\dots,n),$$

яким відповідають перетворення щільності імовірності

$$f(t_j+0,X) = S_{rl}f(t_j-0,X),$$

$$S_{rl}f(Y) \equiv \sum_{s=1}^{N_{rl}} p_{r,l,s}f(A^{-1}_{r,l,s}Y)\ |\det A^{-1}_{r,l,s}|.$$

Нехай виконані необхідні умови стійкості (27). Для того, щоб нульовий розв'язок системи (26) був в середньому L_2-стійким, необхідно і достатньо, щоб при $D_s(0) > 0$ $(s = 1,\dots,n)$ система рівнянь (29) мала розв'язок $W_k > 0$ $(k = 1,\dots,n)$.

Лема 2.3. Для того, щоб нульовий розв'язок системи лінійних рівнянь (26) був у середньому L_2-стійким, необхідно, щоб збігались матричні невласні інтеграли

$$U_k = \int_0^\infty \psi_k(t)N_k(t)N_k^*(t)dt \qquad (k = 1,\dots,n);$$

$$U_{ks} = \int_0^\infty q_{ks}(t)N_s(t)N_s^*(t)dt \qquad (k,s = 1,\dots,n).$$

Потім показано, що при досить загальних умовах з у середньому L_2-стійкості розв'язку системи (26) випливає стійкість розв'язку у середньому квадратичному.

Теорема 2.9. Якщо нульовий розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь (26) у середньому L_2-стійкий, а інтенсивності $q_{ks}(t)$ $(k,s = 1,\dots,n)$ напівмарковського процесу $\zeta(t)$

задовольняють умовам

$$\lim_{t\to+\infty} q_{ks}(t)N_s(t)N_s^*(t) = 0 \qquad (k,s = 1,\dots,n),$$

$$\lim_{t\to+\infty} \phi_s(t)N_s(t)N_s^*(t) = 0 \qquad (s = 1,\dots,n),$$

то нульовий розв'язок системи (26) асимптотично стійкий у середньому квадратичному.

Більш детально досліджується стійкість розв'язку лінійного диференціального рівняння (16) з випадковими перетвореннями

$$x(t_j+0) = \rho_l x(t_j-0); \quad \rho_l \neq 0 \quad (l = 1,\dots,N) \qquad (31)$$

що здійснюються з імовірностями p_l $(l = 1,\dots,N)$.

Виведено рівняння для моментів другого порядку і побудовано границю області нестійкості розв'язку рівняння (16).

У §2.4 розглянуто стійкість у середньому квадратичному розв'язку лінійного диференціального рівняння (16) з стрибками, які відбуваються у випадкові моменти з випадковою величиною стрибка , де $\zeta(t)$ - випадковий марковський процес, який приймає два стани θ_k $(k = 1,2)$ з імовірностями, що задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda p_1(t) + \nu p_2(t), \quad \frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda p_1(t) - \nu p_2(t).$$

$$\lambda > 0, \quad \nu > 0 \qquad (32)$$

Передбачається, що час між стрибками розподіляється за експоненціальним законом, а величина стрибка розподілена за степеневим законом, при цьому одержали умови стійкості випадкового розв'язку у явному виді

$$\lambda + \nu - 2a_1 - 2a_2 > 0, \quad 2a_1a_2 - \lambda a_2 - \nu a_1 > 0. \qquad (33)$$

У §2.5 досліджується система лінійних різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами, які залежать від скінченнозначного напівмарковського ланцюга. Передбачається, що одночасно з стрибками відбуваються випадкові перетворення розв'язку.

Для системи лінійних різницевих рівнянь

$$X_{k+1} = A(k,\zeta_k)X_k \quad (k = 0,1,2,\dots),\ \dim X_k = m \qquad (34)$$

знайдено рівняння для моментів першого порядку

$$M_s(k) = \phi_s(k)N_s(k)M_s(0) + \sum_{\alpha=1}^{k}\phi_s(k-\alpha)N_s(k-\alpha)W_s(\alpha);$$

$$W_s(k) = \sum_{j=1}^{n} q_{sj}(k)\sum_{r=1}^{N_{sj}} p_{s,j,r}\phi_{s,j,r}N_j(k)M_j(0) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{k-1} q_{sj}(\alpha)\sum_{r=1}^{N_{sj}} p_{s,j,r}\phi_{s,j,r}N_j(\alpha)W(k-\alpha) \quad (s = 1,\dots,n) \qquad (35)$$

і другого порядку

$$D_s(k) = \phi_s(k)N_s(k)D_s(0)N_s^*(k) + \sum_{\alpha=1}^{k}\phi_s(k-\alpha)N_s(k-\alpha)T_s(\alpha)N_s^*(k-\alpha);$$

$$T_s(k) = \sum_{j=1}^{n} q_{sj}(k)\sum_{r=1}^{N_{sj}} p_{s,j,r}\phi_{s,j,r}N_j(k)D_j^*(0)N_j^*(k)\phi_{s,j,r} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{k-1} q_{sj}(\alpha)\sum_{r=1}^{N_{sj}} p_{s,j,r}\phi_{s,j,r}N_j(\alpha)T_j^*(k-\alpha)N_j^*(\alpha)\phi_{s,j,r} (s=1,\dots,n). \qquad (36)$$

У третьому розділі пропонуються способи побудови функцій Ляпунова для системи лінійних диференціальних рівнянь з випадковими стрибками чи випадковими перетвореннями.

У §3.1 наведено відомі розробки про монотонні оператори, а також про властивості розв'язку операторних рівнянь у частково впорядкованих просторах. Ці відомості використовують при розв'язку рівнянь для побудови функцій Ляпунова.

У §3.2 виведені рівняння для стохастичних функцій Ляпунова щодо систем лінійних диференціальних рівнянь, коефіцієнти яких залежать від напівмарковського процесу

$$v_k(x) = \int_0^\infty < X^*(t)B(\zeta(t))X(t) \mid \zeta(t) = \theta_k,\ X(t) = X > dt. \quad (37)$$

$$(k = 1,\dots,n)$$

Доведено теореми.

Теорема 3.7. Нехай коефіцієнти системи лінійних диференціальних рівнянь (7) залежать від випадкового напівмарковського процесу $\zeta(t)$, який приймає скінченну кількість значень θ_k ($k = 1, \dots, n$). Нехай $\zeta(t)$ визначений інтенсивностями $q_{ks}(t)$ ($k = 1, \dots, n$) і в моменти t_j стрибків $\zeta(t)$ із значення $\zeta(t_j-0) = \theta_s$ на значення $\zeta(t_j+0) = \theta_k$ розв'язку системи (7) мають стрибки

$$X(t_j+0) = C_{ks}X(t_j-0), \quad \det C_{ks} \neq 0 \quad (k,s = 1,\dots,n). \quad (38)$$

При цьому основні стохастичні функції Ляпунова $v_k(X)$ (37)

$$v_k(X) = X^* C_k X = C_k \circ (XX^*) \quad (k = 1,\dots,n)$$

визначаються системою рівнянь виду

$$C_k = \int_0^\infty \phi_k(t) e^{A_k^* t} B_k e^{A_k t} dt + \sum_{s=1}^n \int_0^\infty q_{sk}(t) e^{A_k^* t} C_{sk}^* C_s C_{sk} e^{A_k t} dt. \quad (39)$$

$$(k = 1,\dots,n)$$

Теорема 3.8. Для того, щоб нульовий розв'язок системи рівнянь (7) з випадковими стрибками був асимптотично стійким у середньому квадратичному достатньо, щоб виконувалась одна з рівнозначних умов:

1. Система рівнянь (39) при будь-яких матрицях $B_k > 0$ ($k = 1,\dots,n$) має додатний розв'язок $C_k > 0$ ($k = 1,\dots,n$).

2. Система рівнянь (39) при деякому наборі матриць $B_k > 0$ ($k = 1,\dots,n$) має додатний розв'язок $C_k > 0$ ($k = 1,\dots,n$).

3. Збігається метод послідовних наближень

$$C_k^{(j+1)} = \int_0^\infty \phi_k(t) e^{A_k^* t} B_k e^{A_k t} dt + \sum_{s=1}^n \int_0^\infty q_{sk}(t) e^{A_k^* t} C_{sk}^* C_s^{(j)} C_{sk} e^{A_k t} dt$$

$(k = 1,\dots,n) \quad (j = 0,1,2,\dots, \quad C_k^{(0)} = 0).$

4. Для вектора з матричними складовими $C = (C_1 \dots C_n)$ лінійний оператор

$$(SC)_k \equiv \sum_{s=1}^{n} \int_0^{\infty} q_{sk}(t) e^{A_s^* t} C_{sk}^* C_s C_{sk} e^{A_s t} dt$$

має спектр, який лежить в одиничному крузі.

5. Збігається метод послідовних наближень

$$W_k^{(j+1)} = \sum_{s=1}^{n} \int_0^{\infty} q_{ks}(t) C_{ks} e^{A_s t} (D_s(0) + W_s^{(j)}) e^{A_s^* t} C_{ks}^* dt$$

$$W_k^{(0)} = 0 \quad (k = 1,\dots,n;\ j = 0,1,2,\dots).$$

У цьому ж параграфі розглянуто побудову функцій Ляпунова для марковських процесів. Тоді система (39) для визначення функцій Ляпунова має вигляд

$$C_k = \int_0^{\infty} e^{t a_{kk}} e^{A_k^* t} B_k e^{A_k t} dt + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^{n} \int_0^{\infty} q_{sk} e^{t a_{kk}} e^{A_k^* t} C_{sk}^* C_s C_{sk} e^{A_k t} dt.$$

$$(k = 1,\dots,n) \qquad (40)$$

У §3.3 за допомогою функцій Ляпунова досліджуються стійкість розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами, що залежать від напівмарковського процесу. Припускаємо, що випадковий процес змінює значення стрибком і одночасно відбуваються випадкові перетворення. Виведені рівняння, що визначають основні стохастичні функції Ляпунова

$$C_k = \int_0^{\infty} \phi_k(t) N_k^*(t) B_k N_k(t) dt +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} \int_0^{\infty} q_{sk}(t) \sum_{l=1}^{N_{sk}} p_{s,k,l} N_k^*(t) A_{s,k,l}^* C_s A_{s,k,l} N_k(t) dt. \qquad (41)$$

Доведено теореми.

Теорема 3.9. Для того, щоб система рівнянь

$$C_k = H_k + \int_0^\infty N_k^*(t)\left[\sum_{s=1}^{n} q_{sk}(t) \sum_{l=1}^{N_{sk}} p_{s,k,l} A_{s,k,l}^* C_s A_{s,k,l}\right] N_k(t)dt$$

$$(k = 1,\dots,n) \qquad (42)$$

мала додатний розв'язок $C_k > 0$ $(k = 1,\dots,n)$ при $H_k > 0$ $(k = 1, \dots,n)$ необхідно і достатньо, щоб система рівнянь

$$W_k = G_k + \int_0^\infty \sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t) \sum_{l=1}^{N_{ks}} p_{k,s,l} A_{k,s,l} N_s(t) W_s N_s^*(t) A_{k,s,l}^* dt;$$

$$G_k \equiv \int_0^\infty \sum_{s=1}^{n} q_{ks}(t) \sum_{l=1}^{N_{ks}} p_{k,s,l} A_{k,s,l} N_s(t) D_s(0) N_s^*(t) A_{k,s,l}^* dt \quad .$$

$$(k = 1,\dots,n) \qquad (43)$$

мала додатний розв'язок $W_s > 0$ $(k = 1,\dots,n)$ при $G_k > 0$ $(k=1,\dots,n)$.

Системи рівнянь (42),(43) одночасно можуть бути розв'язані або не розв'язані методом послідовних наближень виду

$$C_k = \lim_{t\to+\infty} C_k^{(j)};$$

$$C_k^{(j+1)} = H_k + \sum_{s=1}^{n} L_{ks} C_s^{(j)}, \quad C_k^{(0)} \geqslant 0 \quad (k = 1,\dots,n).$$

Теорема 3.10. Для того, щоб нульове рішення системи (26) з випадковими перетвореннями розв'язку виду

$$X(t_j+0) = A_{r,l,s} X(t_j-0) \ ; \ \det A_{r,l,s} \neq 0 \quad (s = 1,\dots,N_{r,l})$$

було у середньому L_2-стійким, необхідно і достатньо, щоб система рівнянь (42) мала при $B_k > 0$ $(k = 1,\dots,n)$ додатний розв'язок $C_k > 0$ $(k = 1,\dots,n)$.

Доведені теореми дають простий критерій у середньому L_2-стійкості, за допомогою якого в дисертації розв'язані приклади.

Основні наукові результати, які містить дисертація, опубліковані у таких роботах:

1. Зезун С.М. Дослідження стійкості розв'язку лінійного диференціального рівняння з випадковими стрибками.-Київ, 1992,-6 с. - Бібліогр. 2 назви. Рос. -Деп.в УкрІНТЕІ 09.03.92.-№ 313-УК 92.

2. Валеев К.Г., Зезун С.М. Дослідження стійкості розв'язків системи лінійних різницевих рівнянь з випадковими коефіцієнтами. -Київ, 1992.-10 с.-Бібліогр. 2 назви. Рос.-Деп.в УкрІНТЕІ 12.09.92. -№ 1411-УК 92.

3. Валеев К.Г.,Зезун С.М. Побудова стохастичної функції Ляпунова для системи лінійних диференціальних рівнянь з випадковими стрибками.-Київ, 1992.-18 с.-Бібліогр. 3 назви. Рос.-Деп.в УкрІНТЕІ 12.09.92. -№ 1412 - УК 92.

4. Зезун С.М. Дослідження стійкості розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь із стрибками, які залежать від напівмарковського процесу//Укр.конф.по модел.та дослідж.стійкості систем:Тез.доп. -Київ, 1993. - ч.І. с.52.

5. Валеев К.Г., Зезун С.М. Лінійні диференціальні рівняння з напівмарковськими коефіцієнтами і випадковими перетвореннями. - Київ, 1993.-12 с. -Бібліогр. 2 назви. Рос. -Деп.в УкрІНТЕІ 28.06. 93. -№ 1259-УК 93.

6. Валеев К.Г., Зезун С.М. Лінійні різницеві рівняння з випадковими напівмарковськими коефіцієнтами і випадковими перетвореннями розв'язків.- Київ, 1994. -17 с. -Бібліогр. 6 назв. Рос. - Деп.в ДНТБ України 10.01.94. - № 110 - УК 94.

7. Зезун С.М. Дослідження стійкості розв'язку лінійного диференціального рівняння з випадковими перетвореннями розв'язків. -Київ, 1994. -8 с. -Бібліогр. 2 назви. Рос. -Деп.в ДНТБ України 10.01.94, - № 109 - УК 94.

Підп. до друку 16.05.94 Формат 60×84 1/16.
Папір друк. № 3. Спосіб друку офсетний. Умовн. друк. арк. 1.16.
Умовн. фарбо-відб. 1.16. Обл.-вид. арк. 1.0.
Тираж 100. Зам. № 4-2269.

Фірма «ВІПОЛ»
252151, Київ, вул. Волинська, 60.

1. Зозуля С.М. [illegible] диференціального рівняння [illegible]. – [illegible] Ук 92.

2. Вадєєв Л.Г., Зозуля С.М. [illegible] систем лінійних рівнянь [illegible]. – 1992. – 10 с. – [illegible] № 1171-Ук 92.

3. Вадєєв Л.Г., Зозуля С.М. [illegible] диференціальних рівнянь [illegible]

4. Зозуля С.М. Дослідження стійкості розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь [illegible] //Укр. конф. [illegible]: Тез. доп. – Київ, 1993. – Ч.1. – С.28.

5. Вадєєв Л.Г., Зозуля С.М. Лінійні диференціальні рівняння з запізнюванням [illegible]. – Київ, 1993. – 12 с. – [illegible] 93. – № 1229-Ук 93.

6. Вадєєв Л.Г., Зозуля С.М. Лінійні рівняння [illegible] ДНТБ України 10.01.94, № [illegible].

7. Зозуля С.М. [illegible] ДНТБ України 10.01.94, № [illegible]