Міністерство освіти України
Київський університет ім. Тараса Шевченка

На правах рукопису

ВОВК Лілія Борисівна

УДК 519.21

ОЦІНКИ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ В БАКСТЕРОВИХ ТЕОРЕМАХ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

01.01.05 — теорія імовірностей та математична статистика

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ 1994

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теорії імовірностей та математичної статистики Київського університету ім. Тараса Шевченка.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор КОЗАЧЕНКО Ю. В.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор БУЛДИГІН В. В.,

кандидат фізико-математичних наук ЕНДЖИРГЛИ М. В.

Провідна організація: Донецький державний університет.

Захист відбудеться «20» червня 1994 р. о 14 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради К 01.01.14 при Київському університеті ім. Тараса Шевченка за адресою: 252127 Київ 127, проспект Академіка Глушкова, 6.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Київського університету ім. Тараса Шевченка.

Автереферат розісланий «19» травня 1994 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради КУРЧЕНКО О. О.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми

Дисертація присвячена доведенню теорем типу Леві - Бакстера для супергауссових та псевдогауссових випадкових векторів та процесів і використанню таких теорем для оцінювання параметрів випадкових процесів.

Дослідження поведінки різних варіацій випадкових процесів, зокрема так звані теореми типу Леві - Бакстера, викликає зараз все зростаючий інтерес. Перші роботи в цьому напрямку належать П.Леві та Г.Бакстеру. Вони досліджували збіжність до константи квадратичних варіацій броуновського та гауссового процесів. У подальшому ці результати поширювали на різні варіації різних класів процесів та полів Є.Г.Гладишев, Е.Жене і Р.Клейн, Ю.М.Рижов, О.О.Курченко, Т.Кавада, С.Берман та інші. Таким чином, на протязі останніх трьох десятиріч була сформована теорія, що вивчає граничну поведінку варіацій деяких класів випадкових процесів та полів. Ця теорія продовжує розвиватись, поширюючись на нові класи процесів та типи збіжності. Ю.В.Козаченко, В.В.Булдигін, Є.І.Островський, О.П.Бесклінська в своїх працях ввели поняття субгауссових, типу субгауссових та передгауссових випадкових векторів, процесів та полів і довели теореми Леві - Бакстера для цих класів об'єктів. У першому розділі дисертації запроваджені та досліджені нові класи випадкових об'єктів - супергауссові та псевдогауссові величини, вектори та процеси. Для векторів та процесів доведені бакстерові теореми, досліджено швидкість збіжності в них і одержані оцінки деяких параметрів процесів.

Бакстерові теореми широко використовуються при вирішенні різних проблем статистики, зокрема проблеми оцінювання моменту розладки випадкового процесу. До останнього часу для оцінювання моменту розладки здебільшого використовувались методи максимальної вірогідності, Байеса, послідовного статистичного аналізу, фільтрація Калмана, деякі непараметричні статистичні методи. Оцінки будувались за спостережуваними реалізаціями процесу. У другому розділі цієї роботи побудовано оцінку моменту розладки дифузійного процесу методом бакстерових сум, причому процес спостерігається лише в дискретні моменти часу.

Мета роботи

1. Дослідити властивості нових класів випадкових об'єктів - супергауссових та псевдогауссових випадкових величин, векторів та процесів.

2. Дослідити збіжність бакстерових сум для псевдогауссових випадкових процесів.

3. Побудувати методом бакстерових сум оцінку та вірогідний інтервал для моменту розладки дифузійного процесу типу Орнштейна - Уленбека.

Методи дослідження

У роботі застосовано методи теорії випадкових процесів, зокрема гауссових та субгауссових, а також розроблені нові методи для дослідження супергауссових та псевдогауссових процесів. При побудові оцінок використовувався метод бакстерових сум.

Наукова новизна

1. Досліджено властивості нових класів випадкових об'єктів - супергауссових та псевдогауссових випадкових величин, векторів та процесів.

2. Доведено теорему Леві - Бакстера для квадратичної варіації псевдогауссового випадкового процесу.

3. Доведено теорему Леві - Бакстера для зваженої квадратичної варіації псевдогауссового випадкового процесу.

4. Побудовано методом бакстерових сум оцінку та вірогідний інтервал для моменту розладки дифузійного процесу типу Орнштейна - Уленбека.

Теоретична та практична цінність

Результати роботи можуть знайти застосування при вивченні різних властивостей випадкових процесів, оцінюванні деяких параметрів та вирішенні інших задач статистики випадкових процесів, а також у різних застосуваннях теорії випадкових процесів, зокрема в статистичній фізиці та радіотехніці, радіології.

Апробація роботи та публікації

Результати роботи доповідалися на семінарі "Прикладні задачі теорії випадкових еволюцій" (Київ, 1990), на республіканській школі молодих учених "Математичні методи в природознавстві: теоретичні та прикладні аспекти" (Алушта, 1990), на Київському міському семінарі по гауссовим випадковим процесам (Київ, 1990-1992), на науково-технічній конференції пам'яті академіка М.П.Кравчука (Київ, 1992), на міжнародній конференції "Методи детекції змін у випадкових процесах та полях" (Київ, 1992).

Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1 - 4].

Структура та об'єм роботи

Дисертація складається зі вступу, двох розділів, поділених на шість параграфів, та списку літератури з 75 найменувань. Робота містить 119 сторінок друкованого тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність теми, формулюється мета дослідження, дається огляд літератури по темі дисертації та наводиться анотація одержаних результатів.

У першому розділі роботи вводяться нові класи випадкових об'єктів - супергауссові та псевдогауссові випадкові величини, вектори та процеси, досліджуються їх властивості, а також доводяться теореми типу Леві - Бакстера для таких об'єктів.

У §1 вводяться супергауссові випадкові величини та наводяться приклади.

Означення 1.1. Випадкова величина ξ з $E\xi = 0$ називається супергауссовою, якщо існує $\varkappa > 0$, таке, що для довільного $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$|E\exp(i\lambda\xi)| \leqslant \exp\left\{-\frac{\lambda^2\varkappa^2}{2}\right\}.$$

Далі розглядаються деякі властивості простору супергауссових величин **Super(Ω)**, зокрема показано, що на відміну від субгауссових, супергауссові величини не мажоруються гауссовими, а мажорують їх.

У §2 вводяться поняття супергауссових ($\vec{\xi} \in \mathbf{Super}(\Omega, \mathbb{R}^n)$) та псевдогауссових ($\vec{\xi} \in \mathbf{Psg}(\Omega, \mathbb{R}^n)$) випадкових векторів, а також матриць, що їх генерують.

Означення 2.1. Випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T$ називається супергауссовим, якщо існує симетрична невід'ємно визначена матриця B $(n \times n)$, така, що для довільного $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n$

$$\left| E \exp \left\{ i(\vec{\lambda}, \vec{\xi}) \right\} \right| \leqslant \exp \left\{ -1/2 \; (B\vec{\lambda}, \vec{\lambda}) \right\}.$$

Будь-яку матрицю B, для якої виконана ця нерівність, називатимемо матрицею, що генерує $\vec{\xi}$.

Означення 2.3. Випадковий вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T$ називається псевдогауссовим, генерованим матрицями B_1 і B_2, якщо він одночасно є субгауссовим, генерованим матрицею B_1, і супергауссовим, генерованим матрицею B_2.

Доведені деякі властивості простору $\mathrm{Super}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Далі для субгауссових та супергауссових випадкових векторів доведені леми, що містять односторонні експоненційні нерівності для сум квадратів елементів.

Лема 2.3. Нехай $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T \in \mathrm{Sub}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $B_1 = (b_{kj}^{(1)})_{k,j=1}^n$ - матриця, що його генерує. Тоді для довільного $0 < s < 1$ справедлива нерівність

$$E \exp \left\{ \frac{s}{2D_n^{(1)}} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k^2 - b_{kk}^{(1)}) \right\} \leqslant \exp(-s/2) \; (1-s)^{-1/2},$$

де

$$D_n^{(1)} = \left[\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (b_{kj}^{(1)})^2 \right]^{1/2}.$$

Лема 2.4. Нехай $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T \in \mathrm{Super}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $B_2 = (b_{kj}^{(2)})_{k,j=1}^n$ - матриця, що його генерує. Тоді для довільного $0 < s < 1$ справедлива нерівність

$$E \exp \left\{ \frac{s}{2D_n^{(2)}} \sum_{k=1}^{n} (b_{kk}^{(2)} - \xi_k^2) \right\} \leqslant \exp(s^2/4),$$

де

$$D_n^{(2)} = \left[\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (b_{kj}^{(2)})^2 \right]^{1/2}.$$

Базуючись на цих лемах, для послідовностей псевдогауссових випадкових векторів $\{(\xi_{k,n},\ k=1,\dots,p_n),\ n\geq 1\}$ досліджуються достатні умови збіжності $\left\| \sum_{k=1}^{p_n} \xi_{k,n}^2 - C \right\|_u \to 0,\ n \to \infty$, де C - деяка невипадкова константа, $\|\cdot\|_u$ - норма в просторі Орліча, породженім функцією $u(x) = \exp\{|x|\} - 1$. Далі для сум квадратів елементів псевдогауссового вектора доведено таку нерівність про ймовірність великих відхилень:

Лема 2.7. Нехай $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T$ - псевдогауссовий вектор, генерований матрицями B_1 і B_2 . Тоді для довільного $x > 2$ справедлива нерівність

$$P\left\{ \left| \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 - C}{U_n} \right| > x \right\} \leq (\sqrt{x/2} + 3\sqrt{e}) \exp\{1 - x/2\},$$

де U_n - константа, що залежить від B_1 і B_2.

У §3 вводяться класи супергауссових ($\xi \in \mathbf{Super}(\Omega, \mathbb{R}^{[0,T]})$) та псевдогауссових ($\xi \in \mathbf{Psg}(\Omega, \mathbb{R}^{[0,T]})$) випадкових процесів та даються означення функцій, що їх генерують.

Означення 3.2. Процес $\xi(t),\ t \in [0, T]$ називається супергауссовим, генерованим невід'ємно визначеною функцією $B(t,s)$, якщо для довільних $t_1, \dots, t_n \in [0,T]$ вектор $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ є супергауссовим, генерованим матрицею $(B(t_k,t_j))_{k,j=1}^{n}$.

Означення 3.4. Випадковий процес $\xi(t),\ t \in [0,T]$ називається псевдогауссовим, генерованим функціями $B_1(t,s)$ і $B_2(t,s)$, якщо він одночасно є субгауссовим, генерованим функцією $B_1(t,s)$, і супергауссовим, генерованим функцією $B_2(t,s)$.

Доведено, що процес вигляду $\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k(t)$, $t \in [0,T]$, де ξ_k, $k \geq 1$ - незалежні супергауссові випадкові величини, $f_k(t)$, $t \in [0,T]$, $k \geq 1$ - детерміновані функції, такі, що $\sum_{k=1}^{\infty} \varkappa^2(\xi_k) f_k^2(t) < \infty$, буде супергауссовим, генерованим функцією

$B(t, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa^2(\xi_k) f_k(t) f_k(s)$. Основним результатом є така теорема типу Леві - Бакстера.

Теорема 3.1. Нехай $\xi(t)$, $t \in [0,T]$ - псевдогауссовий процес, генерований функціями $B_1(t,s)$ і $B_2(t,s)$, $0 = t_{0,n} < t_{1,n} < \ldots < t_{p_n,n} = T$ - стандартна послідовність поділів, $\Delta\xi(t_{k,n}) = \xi(t_{k+1,n}) - \xi(t_{k,n})$. Для того, щоб $\left\| \sum_{k=0}^{p_n-1} (\Delta\xi_{k,n})^2 - C \right\|_u \to 0$, $n \to \infty$, достатньо виконання таких умов:

$$\sum_{k=0}^{p_n-1} \sum_{j=0}^{p_n-1} [\Delta B_i(t_{k,n}, t_{j,n})]^2 \to 0, \; n \to \infty, \; i = 1,2;$$

$$\sum_{k=0}^{p_n-1} \Delta B_i(t_{k,n}, t_{k,n}) \to C, \; n \to \infty, \; i = 1,2,$$

де $\Delta f(x_k, x_j) = f(x_{k+1}, x_{j+1}) - f(x_{k+1}, x_j) - f(x_k, x_{j+1}) + f(x_k, x_j)$.

Далі показано, що випадковий процес

$$\xi(t) = \eta(t) + \zeta(t), \; t \in [0,T], \tag{1}$$

де η і ζ - незалежні, η - гауссовий з $E\eta(t) = 0$, ζ - субгауссовий, буде псевдогауссовим, і для нього доведено аналогічну теорему. У випадку, коли $\eta(t)$ - процес Орнштейна - Уленбека, тобто стаціонарний гауссовий процес з кореляційною функцією $r(t) = \exp(-\alpha|t|)$, $\zeta(t)$ - строго субгауссовий процес, при деяких додаткових умовах доведено збіжність $\sum_{k=0}^{p_n-1} (\Delta\xi_{k,n})^2$ до $2\alpha T$ у нормі простору Орліча, породженого функцією $u(x) = \exp(|x|) - 1$.

У §4 доведено теореми типу Леві - Бакстера для зважених варіацій псевдогауссових випадкових процесів. Основним результатом є

Теорема 4.1. Нехай $\xi(t)$, $t \in [0,1]$ - псевдогауссовий процес, генерований функціями $B_1(t,s)$ і $B_2(t,s)$, $t_{j,n} = j/p_n$, $j = 0,\dots,p_n$ - послідовність поділів $[0,1]$, $\tau_n = 1/p_n$. Для того, щоб

$$\Big\| \sum_{k=0}^{p_n-1} \Big(\frac{\Delta\xi_{k,n}}{\tau_n^{\beta}} \Big)^2 - C \Big\|_u \to 0,\ n \to \infty,$$ де $\beta \in \mathbb{R}$, достатньо виконання таких умов:

$$\sum_{k=0}^{p_n-1} \sum_{j=0}^{p_n-1} \left[\frac{\Delta B_i(t_{k,n}, t_{j,n})}{\tau_n^{2\beta}} \right]^2 \to 0,\ n \to \infty,\ i = 1,2;$$

$$\sum_{k=0}^{p_n-1} \frac{\Delta B_i(t_{k,n}, t_{k,n})}{\tau_n^{2\beta}} \to C,\ n \to \infty,\ i = 1,2.$$

Аналогічну теорему доведено для процесу вигляду (1), де η і ζ - незалежні, $\eta(t)$ - гауссовий процес бакстерового типу, $\zeta(t)$ - строго субгауссовий випадковий процес. У випадку, коли кореляційна функція процесу $\eta(t)$ має вигляд $r(t) = 1 - \mu|t|^{2-\nu} + \varphi(t)|t|^{2-\nu+\delta}$, де $0 < \nu < 1$, $\delta > 0$, $\varphi(t) \in C^2([-1,1])$, $\mu > 0$, побудовано консистентну оцінку та вірогідний інтервал для μ. Доведено таку теорему.

Теорема 4.3. Статистика $\hat{\mu}_n = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{p_n-1} \frac{(\Delta\xi_{j,n})^2}{\tau_n^{1-\nu}}$ є консистентною оцінкою для μ. Для довільного рівня значущості p при $p_n > 8x_p^2$

$$P \left\{ \frac{\hat{\mu}_n + b_- - \sqrt{D_-}}{a} \leqslant \mu \leqslant \frac{\hat{\mu}_n + b_+ + \sqrt{D_+}}{a} \right\} \geqslant 1 - p,$$

де x_p - корінь рівняння $(\sqrt{x/2} + 3\sqrt{e}) \exp(1 - x/2) = p$; a, b_+, b_-, D_+, D_- - деякі константи.

У другому розділі теореми типу Леві - Бакстера застосовані для оцінювання моменту розладки випадкового процесу.

У §5 наведено деякі твердження, що будуть далі використані для оцінювання моменту розладки випадкового процесу. Має місце така лема.

Лема 5.1. Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_{n+m}$ - незалежні гауссові випадкові величини, $E\xi_j = 0$, $E\xi_j^2 = \sigma_j^2$, $j = 1, \ldots, n+m$, $\Sigma_{n,m} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 - \sum_{k=n+1}^{n+m} \xi_k^2$.

Справедлива нерівність

$$E \exp \left\{ \frac{s}{\sqrt{2}} \frac{| \Sigma_{n,m} - E\,\Sigma_{n,m} |}{(D\Sigma_{n,m})^{1/2}} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp \left\{ -\frac{s\delta_1}{2} + \frac{(s\delta_2)^2}{4} \right\} (1 - s\delta_1)^{-1/2} +$$

$$+ \exp \left\{ \frac{(s\delta_1)^2}{4} - \frac{s\delta_2}{2} \right\} (1 - s\delta_2)^{-1/2},$$

$$\text{де } \delta_1 = \left[\frac{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^4}{\sum_{k=1}^{n+m} \sigma_k^4} \right]^{1/2}, \quad \delta_2 = \left[\frac{\sum_{k=n+1}^{n+m} \sigma_k^4}{\sum_{k=1}^{n+m} \sigma_k^4} \right]^{1/2}, \quad \delta_1^2 + \delta_2^2 = 1,$$

$s > 0$, $\max(s\delta_1, s\delta_2) < 1$.

Аналогічна нерівність має місце і для довільного гауссового вектора $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T$.

У §6 побудовано консистентну оцінку та вірогідний інтервал для моменту розладки випадкового процесу типу Орнштейна - Уленбека. Розглядається випадковий процес x_t, $t \in [0, 1]$, що задається стохастичним диференціальним рівнянням

$$dx_t = \alpha x_t dt + b(t)dw(t),$$

де $w(t)$ - вінерівський процес, $b(t)= \begin{cases} b_1, & t < \theta \\ b_2, & t \geq \theta \end{cases}$, $0< \theta< 1$, $\alpha< 0$, з початковою умовою $x_0 \sim N(0, b_1^2/2|\alpha|)$. Момент θ, коли відбувається зміна "інтенсивності шуму" $b(t)$, називається моментом розладки. Побудовано консистентну оцінку θ за спостереженнями процеса у моменти часу $t=j/N$, $j=1,\ldots,N$. Вона має вигляд

$\hat{\theta}_N = \underset{v}{\mathbf{argmax}}\, |y(v)|$, де $y(v)$ - випадковий процес, який є спеціальним чином зваженою квадратичною варіацією процесу x_t. У випадку, коли існує ε, таке, що $0 < \varepsilon < \theta < 1-\varepsilon$, побудовано вірогідний інтервал для параметра θ. Він має вигляд

$P\left\{ |\hat{\theta}_N-\theta| \leq \dfrac{2x_q}{\varepsilon|b_1^2-b_2^2|} \right\} \geq 1-q$, де $x_q \sim -N^{-1/2}\ln q$. Крім того, досліджено швидкість збіжності $\hat{\theta}_N$ до θ.

Теорема 6.1. Для довільного $\nu < 1/2$ існують константа $M > 0$ і випадкове натуральне число N_0, такі, що з імовірністю 1 для всіх $N > N_0$

$$|\hat{\theta}_N-\theta| \leq M N^{-\nu}.$$

На закінчення автор висловлює глибоку вдячність своєму науковому керівникові професору Юрію Васильовичу Козаченку за підтримку та увагу до роботи.

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ДИСЕРТАЦІЇ ОПУБЛІКОВАНІ В ТАКИХ ПРАЦЯХ:

1. Вовк Л.Б. Оптимальные оценки бакстеровских параметров стационарных гауссовских случайных процессов //Исследование методов решения экстремальных задач. - Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН УССР, 1990. - С. 58 - 64.

2. Вовк Л.Б., Козаченко Ю.В. Про швидкість збіжності в теоремах Леві - Бакстера для деяких класів випадкових процесів // Теорія імовірностей та математична статистика. - 1992. - Вип. 46. - С. 25 - 36.

3. Вовк Л.Б. Теорема Леви - Бакстера для псевдогауссовских случайных процессов // Доповіді науково-технічної конференції пам'яті М.П.Кравчука: Тез. докл. - Київ: Київський політехнічний інститут, 1992. - С. 38.

4. Вовк Л.Б. Об оценивании момента разладки для одного типа случайных процессов // Междунар. конф. "Методы распознавания изменений в случайных процессах и полях", Киев, 29 сент. - 2 окт. 1992 г.: Тез. докл. - Киев, 1992. - С. 15.

Підп. до друку 04.04.94. Формат 60х84/16. Папір друк. № 2.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 0,70. Ум.фарбо-відб. 0,82.
Обл.-вид. арк. 0,75. Тираж 100 прим. Зам. 459.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В.М.Глушкова АН України
252650 Київ ГСП 22, проспект Академіка Глушкова, 40