

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И
МЕХАНИКИ АН УКРАИНЫ

На правах рукописи

СМИРНОВА СВЕТЛАНА ИВАНОВНА

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ
КОЛЕБАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

Автореферат

диссертации на соискание научной степени
кандидата физико - математических наук

Донецк - 1994



00778610 (Т)

Работа выполнена на кафедре математики
Симферопольского государственного университета

Научный руководитель: доктор физ.-мат. наук, профессор
Копачевский Н.Д.

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук, ведущий
научный сотрудник Барняк М.Я.

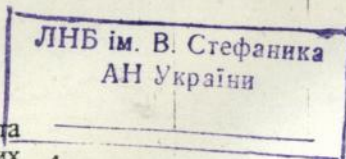
кандидат физ.-мат. наук,
доцент Суворов С.Г.

Ведущая организация: Физико-технический институт
низких температур АН Украины
(г. Харьков)

Защита состоится "22" июня 1994 г. в 15 час
на заседании специализированного совета Д. 06.01.01 по
присуждению научной степени кандидата физико-математических наук при Институте прикладной математики и механики АН Украины по адресу: 340114, г. Донецк-114, ул. Розы Люксембург, 74.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Института прикладной математики и механики АН Украины.

Автореферат разослан "21" мая 1994 г.



Ученый секретарь
специализированного
совета
кандидат физико-математических наук

А.И. Марковский А.И. Марковский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. При изучении задач динамики неоднородных жидкостей, заполняющих произвольную ограниченную область, наряду с численными методами решения важными являются методы качественного исследования. Так, ряд интересных и полезных задач можно рассматривать в рамках линейных моделей, приводящих к нетрадиционным начально-краевым задачам. Сложность решения этих задач состоит в том, что спектральный параметр может входить не только в уравнения, но и в граничные условия. В ряде задач возникает неоднородность, существенно отличная от вертикальной стратификации, например, это происходит при воздействии на движущуюся жидкость кориолисовых сил, при движении жидкости в условиях невесомости и т.д. Задачи такого типа важны в связи с изучением проблем геофизики, океанологии, физики атмосферы, при использовании криогенных и шугообразных жидкостей в космической и ракетной технике, а также в теории сейш.

Задачи о колебаниях стратифицированных жидкостей в неограниченной области подробно рассматривали Стокс, Гельмгольц, Краусс, Дж.Тернер, О.М.Филлипс, Ю.З.Миропольский, Л.В.Черкесов.

Вопросами существования и единственности решений уравнений гидродинамики неоднородной жидкости занимались О.А.Ладыженская, В.А.Солонников, С.Н.Антонцев, А.В.Кажихов и другие.

Исследования задач о малых колебаниях неоднородной (стратифицированной) жидкости, в свою очередь, приводят к новым результатам в качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными (С.Л.Соболев, В.Н.Масленникова, Р.А.Александрян, Т.И.Зеленяк, Н.Д.Копачевский и др.)

Проблемы колебаний стратифицированной жидкости исследовались А.И.Задорожним, Н.Д.Копачевским, А.Н.Темновым, С.А.Габовым, А.Г.Свешниковым, М.Ю.Царьковым, А.В.Андроновым, Т.П.Темченко.

Задачи о колебаниях неоднородных жидкостей (в линейной постановке) в последние годы привлекли внимание ряда авторов. Первые исследования в этой области проводили Н.Д.Копачевский, А.Н.Темнов, М.Ю.Царьков.

Как следует из приведенного краткого обзора, до настоящего времени в недостаточной мере были изучены за-

дачи о малых колебаниях идеальных неоднородных жидкостей, заполняющих произвольную ограниченную область либо контейнер.

Представляет интерес для исследователей случай, когда переменная плотность изменяется не вдоль некоторой оси (стратифицированная жидкость), а более сложным образом, учитывающим, например, действие неоднородного потенциального поля и поля центробежных сил. Здесь возникают новые начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных, а также задачи на собственные значения, в которых спектральный параметр входит полиномиально не только в уравнение, но и в краевое условие.

Цель работы. 1. Исследование малых движений идеальной неоднородной жидкости, заполняющей полностью либо частично неподвижный либо вращающийся сосуд произвольной формы.

2. Изучение задачи о малых колебаниях идеальной неоднородной жидкости, заполняющей (полностью либо частично) сосуд, образованный двумя соосными круговыми цилиндрами и находящийся под действием внешнего цилиндрически симметричного поля массовых сил.

3. Исследование одномерных спектральных задач типа задачи Штурма-Лиувилля, порожденных проблемой малых колебаний неоднородной жидкости и содержащих спектральный параметр линейным и квадратичным образом как в уравнении, так и в краевом условии.

Методика исследования. Систематически применяются методы функционального анализа, преимущественно методы спектральной теории операторных пучков. На протяжении всей работы существенно используются методы теории дифференциальных уравнений в частных производных, а также спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов, в частности, оператора Штурма-Лиувилля.

Научная новизна. Результаты диссертации представляют собой качественное исследование новых начально-краевых задач гидродинамики. В частности:

1. Рассмотрена задача о малых колебаниях идеальной неоднородной несжимаемой жидкости, полностью заполняющей неподвижный (либо вращающийся) сосуд. Доказана теорема о корректной разрешимости эволюционной задачи, получены некоторые общие свойства решений спектральной задачи.

2. В случае частично заполненного неподвижного (либо вращающегося) сосуда задача о малых колебаниях иде-

альной неоднородной несжимаемой жидкости приведена к операторно-дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Доказана корректная разрешимость задачи Коши. Установлено наличие в такой системе внутренних и поверхностных волн, а также доказаны свойства базисности мод поверхностных волн.

3. Изучена задача о собственных колебаниях идеальной неоднородной жидкости, полностью либо частично заполняющей неподвижный, а также вращающийся сосуд, образованный двумя соосными круговыми цилиндрами и находящийся во внешнем цилиндрически симметричном потенциальном поле массовых сил. Каждый из четырех перечисленных случаев приводится к одномерной спектральной задаче, подобной классической задаче Штурма-Лиувилля, однако при этом спектральный параметр входит как в уравнение, так и в граничное условие полиномиальным образом. Изучены свойства спектра и собственных функций полученных задач. Получены разложения решений начально-краевых задач в ряд Фурье по собственным функциям, асимптотические формулы для частот и мод поверхностных волн. Доказаны теоремы о плотности частот внутренних волн на некоторых отрезках.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты диссертации могут быть использованы в различных вопросах теории дифференциально-операторных уравнений, уравнений типа уравнения Штурма-Лиувилля, уравнений с частными производными, а также в теории сейш, при проектировании динамических устройств, содержащих жидкости.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Всесоюзной научно-технической конференции "Вклад молодых ученых и специалистов в научно-технический прогресс" (Севастополь, 1987), XXII Всесоюзной зимней математической школе (Воронеж, 1988), конференции "Проблемы комплексной автоматизации гидрофизических исследований" (Севастополь, 1989), I-IV Крымских осенних математических школах-симпозиумах по спектральным и эволюционным задачам (Севастополь, 1990, 1991, 1992, 1993), XXV Всесоюзной зимней математической школе (Воронеж, 1993), XVII-XXII научных конференциях профессорско-преподавательского состава Симферопольского государственного университета (Симферополь, 1988, 1989, 1990, 1991, 1992, 1993), на семинарах кафедры математического анализа СГУ, на семинаре под руководством член корр. АН Украины И.А.Луковского в Институте математики АН Украины (Киев, 1992), на семинаре под руководством проф. Б.В.Базалия в Институте прикладной математики и механики АН Украины (Донецк, 1994).

Публикации. Результаты выполненных исследований отражены в работах [1-11].

Структура и объем работы. Диссертационная работа изложена на 140 страницах и состоит из введения, двух глав, 13 приложений и списка литературы из 121 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан обзор работ, относящихся к теме диссертации, изложены ее основные результаты.

В главе I рассмотрены колебания идеальной неоднородной несжимаемой жидкости, полностью заполняющей сосуд Ω произвольной формы и имеющей переменную равновесную плотность $\rho_0(x)$, $x \in \Omega$. Глава состоит из четырех параграфов.

В §1 изучены малые колебания неоднородной жидкости в произвольном неподвижном сосуде. Предполагается, что квадрат частоты неоднородности $N^2(x)$ удовлетворяет физически естественному условию

$$0 < N_-^2 := N_{\min}^2 \leq N^2(x) \leq N_{\max}^2 =: N_+^2 < \infty, \quad (1)$$

$$N^2(x) := -\nabla \rho_0 \cdot \nabla \Pi_0 / \rho_0(x),$$

где $\Pi_0(x)$ - потенциал внешнего поля массовых сил. Дается постановка начально-краевой задачи - линеаризованной системы уравнений, граничных и начальных условий. При исследовании задачи применяется метод проектирования уравнений движения неоднородной жидкости на ортогональное подпространство естественно возникающего здесь гильбертова весового пространства $L_2(\Omega, \rho_0)$. При этом используется следующее ортогональное разложение пространства $L_2(\Omega, \rho_0)$ вектор-функций, квадратично суммируемых по Ω с весом $\rho_0(x)$:

$$L_2(\Omega, \rho_0) = G(\Omega, \rho_0) \oplus J_0(\Omega, \rho_0), \quad (2)$$

где $J_0(\Omega, \rho_0)$ - подпространство $L_2(\Omega, \rho_0)$, которое получается замыканием в норме $L_2(\Omega, \rho_0)$ множества

$$\tilde{J}_0(\Omega, \rho_0) = \{ u \in C^1(\bar{\Omega}) : \operatorname{div} u = 0, x \in \Omega, \\ u \cdot n = 0, x \in \partial \Omega \}, \quad (3)$$

а $G(\Omega, \rho_0)$ - подпространство квазипотенциальных векторов:

$$G(\Omega, \rho_0) = \{v \in L_2(\Omega, \rho_0) : v = \nabla \Phi / \rho_0(x)\}. \quad (4)$$

Проектирование уравнений исходной начально-краевой задачи на подпространство $J_0(\Omega, \rho_0)$ и учет граничных и начальных условий приводит к задаче Коши в пространстве $J_0(\Omega, \rho_0)$:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + B_0 u = P_0 f, \quad u(0) = u^0, \quad \frac{du}{dt}(0) = v(0) = v^0 \quad (5)$$

где B_0 - так называемый оператор неоднородности.

Доказано, что в неоднородной жидкости, полностью заполняющей резервуар произвольной формы, существуют колебания, которым отвечают внутренние волны. Квадраты частот таких волн образуют предельный спектр, расположенный на отрезке $[0, N_+^2] = I_0$ и совпадающий со спектром оператора неоднородности B_0 ($B_0 = B_0^*$, $0 \leq B_0 \leq N_+^2 I$; $\sigma(B_0) = [0, N_+^2]$).

Для более детального изучения характера спектра возникающей здесь спектральной задачи в §2 рассматривается ее важный частный случай. Это задача, когда сосуд с жидкостью образован двумя соосными круговыми цилиндрами (радиусов R_1 и R_2 и высотой h) и находится под действием внешнего цилиндрически симметричного поля массовых сил с потенциалом $\Pi_0 = \Pi_0(r)$.

Переход в начально-краевой задаче к цилиндрической системе координат и разделение переменных в ней позволяют сформулировать задачу для нахождения радиальной компоненты поля смещений. Для функции $w(r) := r \bar{u}_r(r)$ возникает счетное множество классических задач Штурма-Лиувилля:

$$-\left[\frac{r \rho_0}{m^2 + (\pi k r / h)^2} w' \right]' + \frac{\rho_0}{r} w = \lambda^2 \frac{N^2 \rho_0}{r} w, \quad (6)$$

$$\lambda^2 = 1/\omega^2,$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, k = 0, 1, 2, \dots, |m| + k \neq 0)$$

с очевидными граничными условиями на стенках цилиндров:

$$w(R_1) = w(R_2) = 0. \quad (7)$$

Изучение структуры спектра задачи (6)-(7) дает возможность сделать следующие выводы: эта задача имеет дискретный положительный спектр $\{\lambda_{kmn}\}_{n=1}^{\infty}$ с единственной

предельной точкой на бесконечности; соответствующие собственные функции $\{w_{kmn}(r)\}_{n=1}^{\infty}$ образуют ортогональный базис в некотором подпространстве гильбертова пространства. Представлена асимптотическая формула для собственных чисел λ_{kmn} при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 1. В задаче (6)-(7) квадраты частот собственных колебаний неоднородной жидкости ω_{kmn}^2 образуют множество, плотное на отрезке $[0, N_+^2]$.

Показано, что собственные функции пространственной задачи, отвечающие ненулевым частотам колебаний, образуют базис в некотором подпространстве векторного гильбертова пространства $L_2(\Omega, \rho_0)$. Получена формула разложения решения начально-краевой задачи в ряд Фурье по собственным функциям.

В параграфах 3,4 главы 1 изучены колебания идеальной неоднородной жидкости во вращающемся сосуде как произвольной формы (§3), так и специального вида (§4). В случае, когда сосуд с жидкостью вращается вокруг вертикальной оси Ox_3 с угловой скоростью $\omega_0 = \omega_0 e_3$, предполагается, что квадрат частоты неоднородности

$$\begin{aligned} N^2(x, \omega_0) &= N^2(x) + \frac{\omega_0^2}{2\rho_0(x)} (\nabla \rho_0 \cdot \nabla (x_1^2 + x_2^2)) = \\ &= - \frac{\nabla \rho_0 \cdot \nabla \Pi_1}{\rho_0} \end{aligned}$$

в состоянии равновесия удовлетворяет условию

$$0 < N_-^2(\omega_0) \leq N^2(x, \omega_0) \leq N_+^2(\omega_0) < \infty. \quad (8)$$

После проектирования на подпространство $J_0(\Omega, \rho_0)$ исходная начально-краевая задача приводится к задаче Коши в $J_0(\Omega, \rho_0)$:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{d}{dt} K_0 u + B_0(\omega_0) u = P_0 f, \quad (9)$$

$$u(0) = u^0, \quad v(0) = \frac{du}{dt}(0) = v^0,$$

где K_0 - гироскопический оператор, обладающий свойствами $K_0 = -K_0^*$, $\|K_0\| \leq 2\omega_0$, $\sigma(K_0) = [-2i\omega_0, 2i\omega_0]$. (10)

Исследование свойств операторных коэффициентов задачи (9)-(10) позволяет доказать теорему о разрешимости

эволюционной задачи. Исследована задача о нормальных колебаниях, отвечающая задаче (9).

Теорема 2. Спектр нормальных колебаний вращающейся неоднородной жидкости в области Ω лежит на отрезке $[-\Lambda_0, \Lambda_0]$ вещественной оси, где

$$\Lambda_0 = \omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 + N^2(\omega_0)}.$$

В §4, как и в §2, рассмотрен тот же частный случай, однако здесь полностью заполненный сосуд с жидкостью равномерно вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}_0$. Рассмотрения по-прежнему проводятся в цилиндрической системе координат. В задаче о нахождении радиальной компоненты поля смещений осесимметричность сосуда и симметричность внешнего поля массовых сил с потенциалом $\Pi_0(r)$ позволяют после разделения переменных получить счетное множество одномерных спектральных задач:

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{r \rho_0}{m^2 + (\pi k r / h)^2} w' \right]' + \frac{\rho_0}{r} w = \lambda^2 \frac{\rho_0}{r} \left(N^2(\omega_0) + \right. \\ & \left. + \frac{4 \omega_0^2 (\pi k r / h)^2}{m^2 + (\pi k r / h)^2} \right) w - \lambda \frac{2m \omega_0 \rho_0}{m^2 + (\pi k r / h)^2} \left(\frac{N^2(\omega_0)}{\Pi_1'} + \right. \\ & \left. + \frac{2r (\pi k / h)^2}{m^2 + (\pi k / h)^2} \right) w, \end{aligned} \quad (11)$$

$$m, k = 0, 1, 2, \dots, k + m \neq 0,$$

с граничными условиями (7).

Уравнение (11) можно рассматривать как обобщение задачи Штурма-Лиувилля на случай, когда собственное значение квадратично и линейно входит в уравнение. Доказано, что спектральная задача (11), (7) имеет вещественный дискретный спектр $\{\lambda_{kmn}\}_{n=1}^{\infty}$, причем $\lambda_{kmn} \rightarrow \pm \infty$ ($n \rightarrow \infty$), при этом соответствующие собственные функции $\{w_{kmn}\}_{n=1}^{\infty}$ образуют двукратный (ортогональный) базис в некотором гильбертовом пространстве. Получена формула асимптотического поведения квадратов собственных значений. Выведены двусторонние оценки положительных и отрицательных собственных значений, которые позволяют сделать ряд выводов.

Теорема 3. Квадраты частот собственных колебаний $\{\omega_{kml}^2\}$ жидкости во вращающемся полностью заполненном сосуде образуют счетное множество, плотное на отрезке $[0, N^2_+(\omega_0) + 4\omega_0^2]$.

Для исходной пространственной задачи показано, что собственные функции, отвечающие ненулевым частотам колебаний, образуют базис в некотором подпространстве гильбертова пространства. Получена формула разложения решения эволюционной задачи в ряд Фурье по собственным функциям.

Во второй главе (§§5-8) рассматриваются колебания идеальной неоднородной жидкости в частично заполненном сосуде (с вращением и без него). Предполагается, что в состоянии относительного равновесия жидкость занимает область Ω , ограниченную твердой стенкой S и равновесной свободной поверхностью Γ .

В §5 использован операторный подход к проблеме колебаний неоднородной жидкости в произвольном неподвижном бассейне Ω . Для приведения исходной начально-краевой задачи к дифференциально-операторному уравнению в некотором гильбертовом пространстве используется следующее ортогональное разложение пространства $L_2(\Omega, \rho_0)$:

$L_2(\Omega, \rho_0) = J_0(\Omega, \rho_0) \oplus G_{h, S}(\Omega, \rho_0) \oplus G_{0, \Gamma}(\Omega, \rho_0)$, (12)
где $J_0(\Omega, \rho_0)$ определено в (3), а

$$G_{h, S}(\Omega, \rho_0) = \{v \in L_2(\Omega, \rho_0) : v = \rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi, \\ \rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi \cdot n = 0 \ (x \in S), \operatorname{div}(\rho_0^{-1}(x) \nabla \Phi) = 0 \ (x \in \Omega)\}, \\ G_{0, \Gamma}(\Omega, \rho_0) = \{w \in L_2(\Omega, \rho_0) : w = \rho_0^{-1}(x) \nabla p, p = 0 \ (x \in \Gamma)\}.$$

В §5 показано, что проектирование уравнений исходной задачи на ортогональные подпространства (12) приводит к задаче Коши в гильбертовом пространстве $H\Gamma = J_0(\Omega, \rho_0) \oplus H\Gamma$:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + (B + C\Gamma)u = f, \quad (13)$$

$u(0) = u_0, u'(0) = u_1$,
где операторные матрицы B и $C\Gamma$ имеют структуру

$$B = (B_{ij})_{i, j=1}^2 = B^*, \quad 0 \leq B \leq N^2_+ I_\Gamma, \quad C\Gamma = \operatorname{diag}(0, C_0),$$

$$C_0 = A \bar{\Gamma}^{-1/2} \left(\rho_0(x) \frac{\partial \Pi_0}{\partial n} \right) |_{\Gamma} A \bar{\Gamma}^{-1/2} \gg 0 ,$$

$$A \Gamma \in S_{\infty} , \quad H_{\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1\} .$$

С использованием свойства операторов B и C_{Γ} доказывается корректная разрешимость эволюционной задачи (13).

Рассмотрение собственных колебаний системы, т.е. решений задачи (13), зависящих от времени по закону $\exp(i\omega t)$, приводит к спектральной задаче:

$$(B + C_{\Gamma}) u = Du = \omega^2 u , \quad u = (w_0, \eta)^t \in H_{\Gamma} . \quad (14)$$

В §5 исследуется спектр задачи (14) при $\omega^2 > N_+^2$ путем перехода к задаче

$$N_1(\nu) \varphi_1 = 0 , \quad \nu = 1/\omega^2 , \quad \varphi_1 = C_0^{1/2} \eta , \quad (15)$$

на собственные значения для самосопряженного операторного пучка специального вида $N_1(\nu)$; изучение основано на идее факторизации пучка $N_1(\nu)$.

Теорема 4. Если выполнено условие

$$\|C_0^{-1}\| < N_+^{-2} , \quad (16)$$

то пучок $N_1(\nu)$ допускает факторизацию

$$N_1(\nu) = N_1^+(\nu) (\nu I - Z) , \quad (17)$$

где $N_1^+(\nu)$ голоморфна и голоморфно обратима в некоторой связной, симметричной относительно \mathbb{R} окрестности U отрезка $[0, N_+^{-2})$, $Z \in \mathfrak{R}$ и $\sigma(Z) \subset (-\epsilon, N_+^{-2} - \epsilon)$ при достаточно малом $\epsilon > 0$. Оператор Z имеет структуру $Z = (I + S) C_0^{-1}$, $S \in S_{\infty}$, $(I + S)^{-1} \in \mathfrak{R}$.

Наличие у Z симметризатора $F \in \mathfrak{R}$, $F \gg 0$ в H_{Γ} , $F = I + T_1$, $T_1 \in S_{\infty}$, позволяет изучить свойства собственных векторов спектральной задачи.

Теорема 5. При выполнении условия (16) задача (15) при $\omega^2 > N_+^2$, имеет дискретный спектр, состоящий из счетного множества нормальных собственных значений с единственной предельной точкой на бесконечности. Система собственных векторов пучка $N_1(\nu)$, отвечающая собственным

значениям из отрезка $[0, N_+^{-2})$, образует базис Рисса и p -базис в пространстве H_Γ .

Далее в работе исследуется влияние неоднородности жидкости по плотности. Оказывается, что неоднородность порождает внутренние волны, распространяющиеся во всем объеме жидкости.

Теорема 6. Отрезок $I_0 = [0, N_+^2]$ принадлежит предельному спектру задачи (14). Ему отвечают внутренние волны в неоднородной жидкости.

В §6 проводится исследование нормальных колебаний жидкости, частично заполняющей сосуд, в частном случае, описанном в §2. Исходная начально-краевая задача допускает отделение угловой и временной переменных в виде бегущих волн, когда зависимость полей смещений и давления от времени и угловой переменной имеет вид

$\exp [i(\omega t - m\theta)]$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, (18)
а вертикальная компонента z отделяется в виде

$$\cos \frac{\pi k z}{h}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

После исключения всех амплитудных функций для радиальной компоненты поля смещений получено счетное множество одномерных спектральных задач (6) с граничными условиями

$$w(R_1) = 0, \\ [P_0'(r) \left((m/r)^2 + (\pi k/h)^2 \right)]^{-1} w'(r) = \lambda^2 w(r) \quad (r = R_2). \quad (20)$$

Задача (6), (20) есть задача со спектральным параметром как в уравнении, так и в краевом условии.

Исследование задачи (6), (20) приводит к следующим физическим и математическим выводам:

1) В идеальной жидкости существуют внутренние волны, обусловленные неоднородностью поля плотности вдоль радиуса. Спектр частот внутренних волн образует счетное множество, плотное на отрезке $[-N_+, N_+]$.

2) При наличии свободной поверхности наряду с внутренними волнами в жидкости имеются поверхностные волны, родственные обычным поверхностным волнам в однородной жидкости. Спектр их частот дискретен, расположен на действительной оси вне отрезка $[-N_+, N_+]$ и имеет две предельные точки.

3) Собственные функции спектральной задачи и построенные по ним собственные поля смещений образуют ортогональные базисы в некоторых гильбертовых пространствах.

4) Свойство базисности собственных функций позволяет получить разложение решения начально-краевой задачи в ряд Фурье по собственным функциям.

В конце §6 получены асимптотические формулы для частот поверхностных волн.

В §§7,8 рассматриваются задачи, аналогичные описанным в §§5,6, однако снова при наличии равномерного вращения системы.

Так, в §7 изучены колебания идеальной неоднородной жидкости, частично заполняющей произвольный сосуд, равномерно вращающийся вокруг вертикальной оси Ox_3 с постоянной угловой скоростью ω_0 .

После проектирования уравнения движения исходной начально-краевой задачи на подпространства (12) приходим к дифференциальному уравнению второго порядка в гильбертовом пространстве H_Γ :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2\omega_0 \frac{d}{dt} Kx + B(\omega_0)x + C_\Gamma(\omega_0)x = f, \quad (21)$$

$$x(0) = x^0, \quad x'(0) = x^1,$$

с операторными коэффициентами

$$B(\omega_0) = B^*(\omega_0), \quad 0 \leq B(\omega_0) \leq N_+^2(\omega_0) I_\Gamma,$$

$$K = -K^*, \quad \|K\| \leq 1,$$

$$C_\Gamma(\omega_0) = \text{diag}(0, C(\omega_0)),$$

$$C(\omega_0) = A \bar{\Gamma}^{-1/2} \left(\rho_0(x) \frac{\partial \Pi_1}{\partial p} \right) |_\Gamma A \bar{\Gamma}^{-1/2} \gg 0.$$

С учетом свойств операторов $B(\omega_0)$ и $C_\Gamma(\omega_0)$ доказана теорема о корректной разрешимости задачи (21).

Рассмотрены нормальные колебания системы, приводящие к спектральной задаче

$$\omega^2 x - 2\omega_0 \omega \tilde{K}x - D_0 x = 0, \quad \tilde{K} = -iK. \quad (22)$$

Исследование спектра задачи (22) показало, что частоты колебаний образуют объединение двух множеств: предельный спектр, который совпадает с предельным спектром задачи (9), а также дискретный спектр собственных значений (при $|\omega| > \omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 + N_+^2(\omega_0)}$) с предельной точкой на бесконечности. Дискретному спектру отвечают поверхностные волны, родственные волнам на поверхности однородной вращающейся жидкости. Предельному спектру отвечают внутренние волновые движения в неоднородной вращающейся жидкости.

Доказана теорема о том, что при выполнении условия

$$\lambda_1(C_0) > 4\omega_0(\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 + N_+^2(\omega_0)}) + N_+^2(\omega_0), \quad (23)$$

где $\lambda_1(C_0)$ - минимальное собственное значение оператора C_0 , из совокупности мод поверхностных волн можно выделить систему векторов, полную и минимальную в $H\Gamma$ и образующую базис Рисса, а точнее p -базис при $p > 2$. При отсутствии условия (23) собственные функции образуют p -базис с точностью до конечного дефекта.

В §8 рассматриваются малые колебания идеальной неоднородной жидкости в открытом вращающемся сосуде, образованном соосными круговыми цилиндрами (радиусов R_1 и R_2 , высотой h) и находящемся во внешнем цилиндрически симметричном поле массовых сил с потенциалом $\Pi_0(r)$. Исходная начально-краевая задача после разделения переменных в виде (18), (19) и исключения всех амплитудных функций, кроме радиальной компоненты поля смещений, приводит к счетному множеству одномерных спектральных задач (11) с граничными условиями

$$w(R_1) = 0,$$

$$\begin{aligned} w'(r) &= \lambda^2 \Pi_1'(r) ((m/r)^2 + (\pi k/h)^2) w(r) - \\ &- \lambda \frac{2\omega_0 m}{r} w(r) \quad (r = R_2). \end{aligned} \quad (24)$$

Эти задачи похожи на классические задачи Штурма-Лиувилля, однако здесь спектральный параметр полиномиально (полином второй степени) входит как в уравнение, так и в граничное условие.

Исследование спектральной задачи (11), (24) приводит к следующим выводам:

1. Спектр квадратов частот внутренних волн образует множество, плотное на отрезке $[0, N_+^2(\omega_0) + 4\omega_0^2]$.

2. При каждом k и m задача (11), (24) самосопряженная и имеет дискретный вещественный спектр $\{\lambda_{kmn}\}_{n=1}^{\infty}$ с предельными точками $\lambda = \pm \infty$. Все собственные значения λ_{kmn} , кроме, быть может, одной пары, расположены в зоне $|\lambda|^2 \geq (N_+^2(\omega_0) + 4\omega_0^2)^{-1}$.

3. При достаточно больших k и m задача имеет пару собственных значений, расположенных в области $|\lambda|^2 < (N_+^2(\omega_0) + 4\omega_0^2)^{-1}$.

4. Указанным парам собственных значений отвечают поверхностные волны, родственные обычным поверхностным волнам в однородной вращающейся жидкости. Спектр их частот дискретен, расположен вне отрезка $[-\sqrt{N_+^2(\omega_0) + 4\omega_0^2}, \sqrt{N_+^2(\omega_0) + 4\omega_0^2}]$ и имеет предельные точки $\pm \infty$.

5. Собственные поля смещений исходной начально-краевой задачи, отвечающие собственным функциям спектральной задачи, образуют ортогональный базис в некотором гильбертовом пространстве. Это позволяет получить разложение решения исходной эволюционной задачи в ряд Фурье по собственным функциям.

В §8 получены также асимптотические формулы для поверхностных волн, возникающих в неоднородной вращающейся жидкости.

Основные необходимые понятия и определения, связанные с вопросами гидродинамики неоднородной жидкости, приведены в приложении П1. В приложениях П2-П13 приводятся доказательства ряда утверждений, сформулированных в тексте диссертации.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Николаю Дмитриевичу Копачевскому за постановку задач и постоянную помощь в работе.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Смирнова С.И. Операторы векторного анализа и гидродинамики неоднородной жидкости / Симфероп. ун-т.-Симферополь, 1989. - 35 с. - Деп. в УкрНИИТИ 14.03.89, N 765-Ук89.
2. Смирнова С.И. Свободные колебания идеальной неоднородной жидкости в полностью заполненном сосуде / Симфероп. ун-т. - Симферополь, 1989. - 19 с. - Деп. в УкрНИИТИ 15.03.89, N 772-Ук89.
3. Смирнова С.И. Колебания идеальной неоднородной несжимаемой жидкости, полностью заполняющей сосуд, образованный соосными круговыми цилиндрами / Симфероп. ун-т. - Симферополь, 1992. - 28 с. - Деп. в УкрИНТЭИ 18.09.92, N 1450-Ук92.
4. Смирнова С.И. Колебания идеальной неоднородной несжимаемой жидкости в полностью заполненном вращающемся сосуде / Симфероп. ун-т. - Симферополь, 1992. - 58 с. - Деп. в УкрИНТЭИ 01.10.92, N 1502-Ук92.
5. Смирнова С.И. Колебания идеальной неоднородной несжимаемой жидкости, частично заполняющей сосуд, образованный соосными круговыми цилиндрами / Симфероп. ун-т. - Симферополь, 1992. - 54 с. - Деп. в УкрИНТЭИ 26.10.92, N 1748-Ук92.
6. Смирнова С.И. Малые колебания идеальной неоднородной жидкости в открытом вращающемся сосуде, образованном соосными круговыми цилиндрами / Симфероп. ун-т. - Симферополь, 1993. - 55 с. - Деп. в ГНТБ Украины 10.03.93, N 427-Ук93.
7. Копачевский Н.Д., Смирнова С.И., Темнов А.Н., Царьков М.Ю. Проблемы собственных колебаний неоднородной жидкости в водоеме / Проблемы комплексной автоматизации гидрофизических исследований: Тез. докл. - Севастополь, 1989. - С. 98-99.
8. Копачевський М.Д., Смирнова С.І., Темнов О.М. Про малі рухи стратифікованої рідини, що обертається / Спектр. і еволюц. задачі: Тез. докл. - Київ: УМК ВО, 1991. - С. 32-33.
9. Смирнова С.І. Коливання ідеальної неоднорідної рідини, що цілком заповнює посудину, утворену співвісними круговими циліндрами / Спектр. та еволюц. задачі: Тез. доп. - Вип. 2. - Київ; Симферополь: СДУ, 1993. - С. 92-93.

10. Korachevsky N.D., Smirnova S.I. Oscillations of a cylindrically inhomogeneous rotating fluid in a container of special form / Спектр. и эволюц. задачи: Тез. лекц. и докл. - Вып. 3. - Симферополь: СГУ, 1994. - С. 45-47.

11. Korachevsky N.D., Smirnova S.I. Proper oscillations of a cylindrically inhomogeneous fluid between coaxial cylinders / Спектр. и эволюц. задачи: Тез. лекц. и докл. - Вып. 3. - Симферополь: СГУ, 1994. - С. 44-45.

См.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

1. Копия...
2. Копия...
3. Копия...
4. Копия...
5. Копия...
6. Копия...
7. Копия...
8. Копия...
9. Копия...
10. Копия...

18

ИДБ в К. С. 1994

Подп. в печ. 17.03.94. Формат 60×84/16. Бумага тип.
Офс. печать. Усл. печ. л. 1.0. Усл. кр.-отт. 1.0.
Уч.-изд.л. 0,85. Тираж 100 экз. Заказ 985. Бесплатно.

AB 30.267

Подпись: 17.01.94. Формат: 60x84/16. Бумага: бел.
Ориг.: 1942г. Усл. изд.: 1,8. Усл. кр.-сет.: 1,8.
Уч. изд.: 983. Тираж: 100 экз. Заказ: 983. Белгород.
