НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ім. Я. С. ПІДСТРИГАЧА

На правах рукопису

УДК 539.3

СТЕПАНЮК
Олександр Іванович

ВЗАЄМОДІЯ ПЛОСКИХ ТРІЩИН І ЖОРСТКИХ ВКЛЮЧЕНЬ В КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ТІЛАХ

Спеціальність 01.02.04 — механіка деформівного твердого тіла

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

ЛЬВІВ — 1994

Робота виконана в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України.

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник ХАЙ Мирослав Васильович.

Офіційні опоненти - доктор технічних наук, професор ГРИЛІЦЬКИЙ Дмитро Володимирович,
доктор фізико-математичних наук, професор САВРУК Михайло Петрович.

Провідна установа - Інститут механіки НАН України.

Захист відбудеться "27" червня 1994 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К.016.59.01 в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (м. Львів, вул. Наукова, 3 "б").

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України.

Відгук на автореферат просимо надсилати за адресою: 290601, МСП, м. Львів, вул. Наукова, 3 "б", вченому секретарю спеціалізованої ради.

Автореферат розісланий "24" травня 1994 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради — ШЕВЧУК Павло Романович

B-30.277

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Необхідність підвищення надійності та довговічності машин і механізмів, які працюють у різних експлуатаційних умовах, вимагає розробки аргументованих методів оцінки їх міцності. Більшість матеріалів, які використовуються в інженерній практиці, містять різного роду дефекти (чужорідні включення, тріщини та інші недосконалості структури), наявність яких суттєво впливає на міцність елементів конструкцій. Дефекти типу тріщин у кусково-однорідних матеріалах або на границі їх розділу є концентраторами напружень, сприяють досягненню в локальній області критичного стану і зумовлюють руйнування композиційної структури. У зв'язку з тим актуальним є визначення розподілу напружень у тілах в околі таких дефектів.

Дослідженню напружено-деформованого стану кусково-однорідних тіл з тріщинами та включеннями присвячена значна кількість публікацій. Зокрема, взаємовплив жорстких включень і тріщин, у двовимірній постановці, вивчався в роботах Л.Т. Бережницького, Г.Т. Жорхоліані, А.І. Каландія, В.К. Мірсалімова, В.В. Панасюка, М.Г. Стащука та інших. Взаємодію прямолінійних тріщин, розташованих у кусково-однорідних тілах, досліджували Д.В. Грилицький, М.П. Саврук, Г.Т. Сулим, В.П. Юременко, Гупта, Ердоган, Райс, Сі, Хатчінсон та інші. Вагомий внесок у розвиток методів розв'язування плоских задач теорії пружності для прямолінійної тріщини на границі розділу півплощин, пружні характеристики яких відрізняються між собою, внесли Д.В. Грилицький, В.В. Лобода, І.О. Прусов, Р.Л. Салганік, І.В. Сімонов, С.О. Смирнов, Г.П. Черепанов, Аткінсон, Дундурс, Ердоган, Інгленд, Комніноу, Сі та інші.

Переважна більшість відомих у літературі результатів з дослідження взаємодії в тілі тріщин і включень отримані з розв'язку двовимірних задач теорії пружності для кусково-однорідних тіл з дефектами типу тріщин. Проте багатогранність процесу крихкого руйнування механізмів і елементів конструкцій з тріщинами та включеннями викликає необхідність розгляду відповідних задач теорії пружності в тривимірній постановці.

Одним з найбільш загальних методів, які дозволяють вивчати взаємодію тріщин та включень при довільному їх розташуванні в безмежному тілі, є метод потенціалів, запропонований Г.С. Кітом і М.В. Хаєм. У даній роботі ідеї цього методу поширюються на випадок безмежних кусково-однорідних тіл з довільно розташованими плоскими тріщинами.

Метою роботи є розробка методики розв'язування тривимірних задач теорії пружності для безмежного тіла з плоскими довільно розміщеними тріщинами та жорсткими включеннями, яке знаходиться під дією заданих зовнішніх навантажень, а також для кусково-однорідного тіла, складеного з двох спаяних півпросторів і послабленого системою довільно розташованих плоских тріщин, поверхні яких знаходяться під дією самозрівноважених зовнішніх навантажень. З метою вивчення закономірностей взаємодії в таких тілах плоских тріщин і жорстких включень багато уваги в дисертації приділено доведенню розглядуваних задач до числових розрахунків.

Наукова новизна роботи полягає:

- у побудові розв'язків тривимірних задач теорії пружності для суцільних кусково-однорідних тіл при довільних їх зовнішніх навантаженнях;
- у розвитку методу граничних інтегральних рівнянь при розв'язуванні тривимірної задачі теорії пружності для безмежного тіла з довільно розташованими плоскими тріщинами та жорсткими включеннями;
- у поширенні методу граничних інтегральних рівнянь на випадок кусково-однорідного тіла, яке містить систему плоских довільно розміщених тріщин;
- у вивченні кількісних та якісних закономірностей взаємодії в кусково-однорідних тілах плоских тріщин і жорстких включень в залежності від їх розташування, зовнішнього навантаження та пружних характеристик матеріалу.

Вірогідність основних положень і отриманих результатів базується на математичній коректності як на етапі постановки задач, так і при їх розв'язуванні, забезпечується узгодженістю деяких часткових випадків з відомими в літературі та застосуванням при розв'язуванні отриманих сингулярних інтегральних рівнянь наближених і чисельних методів з подальшим порівнянням результатів.

Практична цінність роботи. Отримані в дисертації результати мають теоретичне і прикладне значення при визначенні міцності кусково-однорідних тіл, суцільність яких порушена тріщинами та жорсткими включеннями, а також для подальшого розвитку математичної теорії тріщин. Вивчення напружено-деформованого стану в околі даних дефектів відкриває можливості для визначення траєкторій ймовірного поширення тріщин і встановлення умов локального руйнування деформівних твердих тіл. Проведені дослідження можуть бути покладені в основу розробки методів контролю і управління процесом крихкого руйнування, зокрема їх можна застосовувати в механіці гірських порід і в деяких інших галузях.

Апробація роботи. Основні результати, викладені в дисертації, доповідались на 12-й і 13-й конференціях молодих вчених Інституту прикладних проблем механіки і математики АН УРСР (Львів, 1987, 1989), на 3-й Всесоюзній конференції "Механіка неоднорідних структур" (Львів, 1991), на 1-му Міжнародному симпозіумі "Фізико-хімічна механіка композиційних матеріалів" (Івано-Франківськ, 1993).

Дисертаційна робота в цілому обговорювалась на науковому семінарі відділу математичних методів механіки руйнування Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (Львів, 1994), на спеціалізованому семінарі "Механіка деформівного твердого тіла" цього ж Інституту (Львів, 1994).

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 6 наукових статей.

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається з п'яти розділів, підсумків, списку літератури, що містить 102 найменування та додатків. Загальний об'єм роботи становить 161 сторінку машинописного тексту (основний зміст - 115, додатки - 21) і включає 40 рисунків і 7 таблиць.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтована актуальність теми дисертації, проаналізовано сучасний стан цієї проблеми, наведено короткий огляд публікацій з даного наукового напрямку, а також коротко викладено основні результати проведених досліджень.

У другому розділі наведено основні співвідношення тривимірних задач теорії пружності для ізотропного тіла та представлення їх розв'язку через довільні гармонічні функції.

Побудовано у вигляді комбінації гармонічних потенціалів розв'язки просторових задач теорії пружності для деяких суцільних кусково-однорідних тіл з границею розділу середовищ у вигляді безмежної площини. Зокрема, при розгляді безмежного суцільного тіла, яке знаходиться під дією заданих зовнішніх навантажень і складається з двох спаяних півпросторів, пружні характеристики яких відрізняються між собою, компоненти вектора переміщень $u_j^{(i)}$ $(i=1,2;\, j=\overline{1,3})$ в i-му півпросторі як функції координат $x(x_1,x_2,x_3)$, запропоновано представити у вигляді суми двох складових

$$u_j^{(i)}(x)=u_j^{*(i)}(x)+u_{j0}^{(i)}(x),\quad x_3\geq 0\ (\text{при } i=1),\ x_3\leq 0\ (\text{при } i=2), \tag{1}$$

де $u_j^{*(i)}$ - переміщення в i-му півпросторі, обумовлені довільними переміщеннями точок границі розділу матеріалів

$$u_j^{*(i)}(x)=\varphi_j^{(i)}(x)-\frac{\delta_{j3}}{1-2\nu_i}Q^{(i)}(x)-\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{x_3}{4(1-\nu_i)}\Big[\varphi_3^{(i)}(x)- \tag{2}$$

$$-\frac{2(1-\nu_i)}{1-2\nu_i}Q^{(i)}(x)\Big],\quad Q^{(i)}(x)=\int\limits_{x_3}^{-(-1)^i\infty}\left[\frac{\partial\varphi_1^{(i)}(x)}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_2^{(i)}(x)}{\partial x_2}\right]dx_3,$$

$$\varphi_j^{(i)}(x)=\frac{\partial}{\partial x_3}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta_j^{(i)}(\eta)}{|x-\eta|}d\eta_1 d\eta_2,\quad |x-\eta|=\left[(x_1-\eta_1)^2+(x_2-\eta_2)^2+x_3^2\right]^{1/2}.$$

Тут ν_i - коефіцієнт Пуассона матеріалу i-го півпростору; δ_{j3}- символ Кронекера. Довільність густин потенціалів використовується при задоволенні умов ідеального механічного контакту на границі розділу кусково-однорідного тіла.

У представленні розв'язку (1) $u_{j0}^{(i)}$ - відомі переміщення в аналогічному безмежному однорідному тілі з пружними постійними i-го півпростору, які викликані заданими зовнішніми навантаженнями.

Для визначення невідомих функцій $\beta_j^{(i)}$ використовуються умови рівності переміщень і умови рівності відповідних компонент тензора напружень на границі розділу середовищ безмежного кусково-однорідного суцільного тіла (при $x_3=0$). Дана задача зводиться до розв'язування системи шести інтегральних двовимірних рівнянь типу згортки. Шляхом застосування до отриманої системи інтегральних рівнянь двовимірного перетворення Фур'є показано, що

$$\beta_j^{(1)}(x)=-\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\Bigg\{\left[T_j(\eta)\left(A_1\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+A_2\frac{\partial^2}{\partial x_{3-j}^2}\right)+A_3T_{3-j}(\eta)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right]|x-\eta|+$$

$$+\left[A_4T_3(\eta)\frac{\partial}{\partial x_j}+U_j(\eta)\left(A_5\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+A_6\frac{\partial^2}{\partial x_{3-j}^2}\right)+\right.$$

$$\left.+A_7U_{3-j}(\eta)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right]\ln|x-\eta|-A_8U_3(\eta)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{|x-\eta|}\Bigg\}d\eta_1 d\eta_2,\quad j=1,2,$$

$$\beta_3^{(1)}(x)=\frac{1-\nu_1}{4\pi^2(3-4\nu_1)}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{A_9\left(T_1(\eta)\frac{\partial}{\partial x_1}+T_2(\eta)\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\ln|x-\eta|+\right.$$

$$\left.+\left[A_{10}T_3(\eta)-A_{11}\left(U_1(\eta)\frac{\partial}{\partial x_1}+U_2(\eta)\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right]\frac{1}{|x-\eta|}\right\}d\eta_1 d\eta_2+\frac{1-\nu_1}{2\pi(3-4\nu_1)}A_{12}U_3(x),$$

$$\beta_j^{(2)}(x)=-\left[\beta_j^{(1)}(x)+\frac{U_j(x)}{2\pi}\right],\quad j=1,2, \tag{3}$$

$$\beta_3^{(2)}(x)=\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{A_{13}\left(T_1(\eta)\frac{\partial}{\partial x_1}+T_2(\eta)\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\ln|x-\eta|+\right.$$

$$\left.+\left[A_{14}T_3(\eta)-A_{15}\left(U_1(\eta)\frac{\partial}{\partial x_1}+U_2(\eta)\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right]\frac{1}{|x-\eta|}\right\}d\eta_1 d\eta_2+\frac{A_{16}}{2\pi}U_3(x),$$

де $|x-\eta|=\left[(x_1-\eta_1)^2+(x_2-\eta_2)^2\right]^{1/2}$; A_s $(s=\overline{1,16})$ - постійні коефіцієнти, які залежать від пружних сталих матеріалів півпросторів; U_j і T_j - функції, які визначаються через задані у тілі зовнішні навантаження співвідношеннями

$$U_j(x)=u_{j0}^{(2)}(x)-u_{j0}^{(1)}(x),\quad T_j(x)=\sigma_{j30}^{(2)}(x)-\sigma_{j30}^{(1)}(x). \tag{4}$$

У випадку півбезмежного суцільного тіла, яке знаходиться під дією заданих на його границі зовнішніх навантажень і складається з різнор'дних півпростору та шару товщини h, компоненти вектора переміщень $u_j^{(i)}$ $(i=1,2;j=\overline{1,3})$ у кожній однорідній області даного тіла отримано у вигляді комбінації гармонічних потенціалів. Зокрема, для півпростору $(x_3\le 0)$

$$u_j^{(2)}(x)=u_j^{*(2)}(x) \tag{5}$$

і для шару $(0\le x_3\le h)$

$$u_j^{(1)}(x)=u_j^{*(1)}(x)+\psi_j(y)-\frac{\delta_{j3}}{1-2\nu_1}P(y)-\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{y_3}{4(1-\nu_1)}\left[\psi_3(y)-\right.$$

$$\left.-\frac{2(1-\nu_1)}{1-2\nu_1}P(y)\right],\quad P(y)=\int\limits_{y_3}^{-\infty}\left[\frac{\partial\psi_1(y)}{\partial y_1}+\frac{\partial\psi_2(y)}{\partial y_2}\right]dy_3, \tag{6}$$

$$\psi_j(y)=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\gamma_j(\eta)}{|y-\eta|}d\eta_1 d\eta_2,\qquad |y-\eta|=\left[(y_1-\eta_1)^2+(y_2-\eta_2)^2+y_3^2\right]^{1/2},$$

де $u_j^{\circ(i)'}$ - визначаються формулами (2); γ_j - довільні густини потенціалів ψ_j; $x(x_1,x_2,x_3)$ - точка даного тіла в декартовій системі координат $Ox_1x_2x_3$, яка вибрана так, щоб координатна площина x_1Ox_2 співпадала з границею розділу матеріалів; $y(y_1,y_2,y_3)$ - точка шару в декартовій системі координат $O^{\circ}y_1y_2y_3$, вибраній таким чином, що координатна площина $y_1O^{\circ}y_2$ співпадає з його границею.

Задовольнивши умови рівності переміщень і відповідних компонент тензора напружень на границі розділу півпростору і шару (при $x_3=0$) та умови рівності напружень на границі шару (при $x_3=h$) заданим зовнішнім навантаженням, отримано систему дев'яти інтегральних рівнянь типу згортки, розв'язавши яку, шляхом застосування двовимірного перетворення Фур'є, визначено шукані густини потенціалів $\beta_j^{(i)}$ та γ_j.

Викладено також методику обчислення деяких двовимірних сингулярних інтегралів типу ньютонівського потенціалу, інтегрування в яких відбувається по області, яка співпадає з границею розділу матеріалів безмежного кусково-однорідного тіла. Дана методика базується на поширенні гармонічних функцій на весь півпростір за їх значеннями на границі. Отримані результати суттєво використовуються при спрощенні інтегральних рівнянь, які описують взаємодію тріщин між собою.

Описано чисельно-аналітичний метод розв'язування двовимірних сингулярних інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь, заданих на кругових областях, який дозволяє досліджувати взаємодію близько розміщених тріщин і включень у кусково-однорідних тілах.

У третьому розділі розглянуто задачі теорії пружності для безмежного тіла, яке містить систему N довільно розташованих плоских тріщин S_n $(n=\overline{1,N})$ та K абсолютно жорстких включень Ω_k $(k=\overline{1,K})$ і знаходиться під дією заданих зовнішніх навантажень. На поверхнях тріщин діють задані зусилля N_{jn} $(j=\overline{1,3})$. Використовуючи принцип суперпозиції напружено-деформованих станів, пропонується представити переміщення в декартовій системі координат $O_mx_{1m}x_{2m}x_{3m}$ $(m=\overline{1,K+N})$, яка вибрана в якості базисної, у вигляді суми трьох складових

$$u_{jm}(x_m)=u_{jm}^{(1)}(x_m)+\sum_{n=1}^{N}\left[u_{1n}^{(2)}(x_{nm})l_{jnm}+u_{2n}^{(2)}(x_{nm})m_{jnm}+u_{3n}^{(2)}(x_{nm})n_{jnm}\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{K}\left[u_{1k}^{(3)}(x_{km})l_{jkm}+u_{2k}^{(3)}(x_{km})m_{jkm}+u_{3k}^{(3)}(x_{km})n_{jkm}\right],\ j=\overline{1,3}\ , \qquad (7)$$

де x_m та x_{lm} ($l=\overline{1,K+N}$) - одна й та ж точка тіла в m-ій та l-ій відповідно системах координат, які пов'язані з тріщинами та включеннями; l_{jlm}, m_{jlm}, n_{jlm} - геометричні параметри, які характеризують взаємне розташування тріщин та включень в тілі.

У співвідношеннях (7) $u_{jm}^{(1)}$ - переміщення в m-ій системі координат в аналогічному суцільному тілі, викликані заданими зовнішніми навантаженнями; $u_{jn}^{(2)}$ - переміщення в n-ій системі координат, обумовлені стрибками змішень α_{jn} ($j=\overline{1,3}$) протилежних поверхонь n-ої тріщини; $u_{jk}^{(3)}$ - переміщення в k-ій системі координат, викликані стрибками напружень β_{jk} ($j=\overline{1,3}$) на поверхнях k-го включення. Складові в розв'язку $u_{jm}^{(1)}$ вважаються відомими, оскільки вони легко визначаються описаними в літературі методами, а $u_{jn}^{(2)}$ та $u_{jk}^{(3)}$ вибрано у вигляді комбінації гармонічних потенціалів з невідомими густинами α_{jn} і β_{jk} на поверхнях тріщин і включень відповідно

$$u_{jn}^{(2)}(x_{nm})=\frac{\partial\Phi_{jn}(x_{nm})}{\partial x_{3nm}}+\delta_{j3}\sum_{s=1}^{3}\frac{\partial\Phi_{sn}(x_{nm})}{\partial x_{snm}}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_{jnm}}\left[\frac{x_{3nm}}{2(1-\nu)}\sum_{s=1}^{3}\frac{\partial\Phi_{sn}(x_{nm})}{\partial x_{snm}}+\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\Phi_{3n}(x_{nm})\right],$$

$$\Phi_{jn}(x_{nm})=\iint\limits_{S_n}\frac{\alpha_{jn}(\xi)}{|x_{nm}-\xi|}\,d_\xi S\ ; \qquad (8)$$

$$u_{jk}^{(3)}(x_{km})=2\iint\limits_{\Omega_k}\frac{\beta_{jk}(\eta)}{|x_{km}-\eta|}\,d_\eta\Omega-\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial}{\partial x_{jkm}}\iint\limits_{\Omega_k}\left[\beta_{1k}(\eta)\frac{\partial}{\partial x_{1km}}+\right.$$

$$\left.+\beta_{2k}(\eta)\frac{\partial}{\partial x_{2km}}+\beta_{3k}(\eta)\frac{\partial}{\partial x_{3km}}\right]|x_{km}-\eta|\,d_\eta\Omega\ .$$

Після задоволення граничних умов задачі на місці розташування абсолютно жорстких включень та тріщин отримано наступну систему $3(K+N)$ двовимірних сингулярних інтегральних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{K}\iint\limits_{\Omega_k}\sum_{s=1}^{3}\beta_{sk}(\eta)\left[2\frac{D_{jskq}}{|x_{kq}-\eta|}-\frac{1}{2(1-\nu)}\frac{\partial\hat{L}_{jkq}}{\partial x_{skq}}|x_{kq}-\eta|\right]d_\eta\Omega+$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\iint\limits_{S_n}\sum_{m=1}^{3}\alpha_{mn}(\xi)\left[\hat{A}_{jmnq}-\frac{x_{3nq}}{2(1-\nu)}\frac{\partial\hat{L}_{jnq}}{\partial x_{mnq}}\right]\left(\frac{1}{|x_{nq}-\xi|}\right)d_{\xi}S+$$

$$+u^{(1)}_{jq}(x_q)=a_{jq}+b_{jq}x_{1q}+c_{jq}x_{2q}\ ,\ x_q\in\Omega_q;\ j=\overline{1,3};\ q=\overline{1,K}\ ,$$

$$\sum_{n=1}^{N}\iint\limits_{S_n}\sum_{m=1}^{3}\alpha_{mn}(\xi)\left[\hat{P}_{jmnr}-x_{3nr}\frac{\partial\hat{R}_{jnr}}{\partial x_{mnr}}\right]\left(\frac{1}{|x_{nr}-\xi|}\right)d_{\xi}S+\qquad(9)$$

$$+(1-\nu)\sum_{k=1}^{K}\iint\limits_{\Omega_k}\sum_{m=1}^{3}\beta_{mk}(\eta)\left[2\hat{B}_{jmkr}\left(\frac{1}{|x_{kr}-\eta|}\right)-\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial\hat{R}_{jkr}}{\partial x_{mkr}}|x_{kr}-\eta|\right]d_{\eta}\Omega=$$

$$=-\frac{1-\nu}{G}\left[N_{jr}(x_r)+T_{jr}(x_r)\right],\ x_r\in S_r;\ j=\overline{1,3};\ r=\overline{1,N}\ ,$$

де G -модуль зсуву; T_{jr} - зусилля на місці розташування r-ої тріщини, обумовлені заданими зовнішніми навантаженнями; a_{jq}, b_{jq}, c_{jq} - довільні постійні, які визначають переміщення q-го включення як жорсткого тіла. Постійні коефіцієнти диференціальних операторів $\hat{A}_{jmnq}$, $\hat{L}_{j1q}$, $\hat{P}_{jmnr}$, $\hat{R}_{j1r}$, $\hat{B}_{jmkr}$ і постійні коефіцієнти D_{jmkq} залежать від пружних сталих матеріалу та орієнтації в тілі тріщин і включень.

Система граничних інтегральних рівнянь (9) разом з умовами рівноваги включень як жорсткого тіла

$$\iint\limits_{\Omega_k}\beta_{jk}(\eta)d_{\eta}\Omega=0\ ,\ j=\overline{1,3}\ ,\qquad\iint\limits_{\Omega_k}\left[\eta_2\beta_{1k}(\eta)-\eta_1\beta_{2k}(\eta)\right]d_{\eta}\Omega=0\ ,$$

$$\iint\limits_{\Omega_k}\eta_i\beta_{3k}(\eta)d_{\eta}\Omega=0\ \ ,\ i=1,2;\ \ k=\overline{1,K}\qquad(10)$$

є повною системою рівнянь для визначення усіх невідомих функцій α_{jn}, β_{jk} та постійних коефіцієнтів a_{jq}, b_{jq}, c_{jq} .

При великих віддалях між тріщинами та включеннями отримані граничні інтегральні рівняння разом з умовами рівноваги включень (10) можна розв'язати методом малого параметра. Як приклад досліджено взаємодію дископодібної тріщини з дископодібним абсолютно жорстким включенням, обумовлену заданими на безмежності перпендикулярно по відношенню до тріщини розтягуючими зусиллями. Наведено залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі тріщини від кутової координати точки контуру тріщини для різних варіантів розміщення в тілі включення.

У випадку близько розташованих дископодібних тріщин та включень граничні інтегральні рівняння задачі розв'язано шляхом використання описаного в другому розділі чисельно-аналітичного методу. Визначено коефіцієнти інтенсивності напружень в околі тріщини, яка взаємодіє з довільно орієнтованим по відношенню до неї жорстким включенням при розтягу безмежного тіла перпендикулярно до тріщини, а також якщо поверхні тріщини знаходяться під дією внутрішнього тиску.

<u>У четвертому розділі</u> досліджується напружено-деформований стан безмежного тіла, складеного з двох спаяних між собою півпросторів, які характеризуються різними пружними постійними. Розглянуто кусково-однорідне тіло, яке містить систему K довільно розміщених плоских тріщин у верхньому півпросторі та N у нижньому, поверхні яких знаходяться під дією заданих самозрівноважених зусиль $N^{(1)}_{jk}$ $(j=\overline{1,3};k=\overline{1,K})$, $N^{(2)}_{jn}$ $(j=\overline{1,3};n=\overline{1,N})$. Компоненти вектора переміщень представлено в базисній системі координат $Ox_{10}x_{20}x_{30}$, яка вибрана таким чином, щоб координатна площина $x_{10}Ox_{20}$ співпадала з границею розділу середовищ, співвідношеннями

для верхнього півпростору

$$u_j^{(1)}(x_0)=u_j^{*(1)}(x_0)+\sum_{k=1}^{K}\left[u_{1k}^{(1)}(x_{k0})\,l_{jk0}^{(1)}+u_{2k}^{(1)}(x_{k0})\,m_{jk0}^{(1)}+u_{3k}^{(1)}(x_{k0})\,n_{jk0}^{(1)}\right]+$$
$$+\sum_{n=1}^{N}\left[u_{1n}^{(1)}(y_{n0})\,l_{jn0}^{(2)}+u_{2n}^{(1)}(y_{n0})\,m_{jn0}^{(2)}+u_{3n}^{(1)}(y_{n0})\,n_{jn0}^{(2)}\right],\quad j=\overline{1,3} \qquad (11)$$

і відповідно - для нижнього півпростору

$$u_j^{(2)}(x_0)=u_j^{*(2)}(x_0)+\sum_{n=1}^{N}\left[u_{1n}^{(2)}(y_{n0})\,l_{jn0}^{(2)}+u_{2n}^{(2)}(y_{n0})\,m_{jn0}^{(2)}+u_{3n}^{(2)}(y_{n0})\,n_{jn0}^{(2)}\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{K}\left[u_{1k}^{(2)}(x_{k0})\,l_{jk0}^{(1)}+u_{2k}^{(2)}(x_{k0})\,m_{jk0}^{(1)}+u_{3k}^{(2)}(x_{k0})\,n_{jk0}^{(1)}\right],\quad j=\overline{1,3}\ , \qquad (12)$$

де x_0 та z_{10} - одна й та ж точка тіла в системах координат, які пов'язані відповідно з границею розділу півпросторів і з тріщинами S_l $(l=\overline{1,K+N})$. $l^{(i)}_{jl0}$, $m^{(i)}_{jl0}$, $n^{(i)}_{jl0}$ - напрямні косинуси осей відповідних систем координат, які визначають розташування тріщин у кусково-однорідному тілі.

У співвідношеннях (11) та (12) $u_j^{*(i)}$ $(i=1,2)$ - переміщення в базисній системі координат у суцільному i-му півпросторі, які дозволяють задовольнити граничні умови задачі на границі розділу середовищ і представляються через довільні гармонічні функції $\varphi_j^{(i)}$ згідно з формулами (2); $u_{jl}^{(i)}$ - переміщення в l-ій системі координат в аналогічному однорідному тілі з пружними постійними i-го півпростору, які викликані стрибками зміщень $\alpha_{jl}^{(i)}$ $(i=1,2; j=\overline{1,3})$ протилежних поверхонь l-ої тріщини

$$u_{jl}^{(i)}(z_{l0})=\frac{\partial\Psi_j^{(i)}(z_{l0})}{\partial z_{3l0}}+\delta_{j3}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial\Psi_m^{(i)}(z_{l0})}{\partial z_{ml0}}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial z_{jl0}}\left[\frac{z_{3l0}}{2(1-\nu_i)}\sum_{m=1}^{3}\frac{\partial\Psi_m^{(i)}(z_{l0})}{\partial z_{ml0}}+\frac{1-2\nu_i}{2(1-\nu_i)}\Psi_{3l}^{(i)}(z_{l0})\right], \quad (13)$$

$$\Psi_{jl}^{(i)}(z_{l0})=\iint\limits_{S_l}\frac{\alpha_{jl}^{(i)}(\xi)}{|z_{l0}-\xi|}\,d_\xi S \ .$$

У формулах (13) для кожного значення верхнього індексу "i" нижній індекс l пробігає спочатку значення $k=\overline{1,K}$, при цьому z_{l0} слід замінити на x_{k0}, а потім значення $n=\overline{1,N}$, при цьому z_{l0} замінюється на y_{n0}.

Використовуючи побудований у другому розділі розв'язок задачі теорії пружності для суцільного кусково-однорідного тіла, складеного з двох спаяних півпросторів, вихідна задача зведена до розв'язування системи $3(K+N)$ двовимірних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно функцій $\alpha_{jm}^{(1)}$ і $\alpha_{jm}^{(2)}$, які характеризують розкриття тріщин у процесі деформування тіла зовнішніми навантаженням

$$\Delta_*\iint\limits_{S_q}\frac{\alpha_{jq}^{(1)}(\xi)}{|x_q-\xi|}\,d_\xi S+(-1)^j\nu_1(1-\delta_{j3})\frac{\partial}{\partial x_{(3-j)q}}\iint\limits_{S_q}\Big[\alpha_{1q}^{(1)}(\xi)\frac{\partial}{\partial x_{2q}}-$$

$$-\alpha_{2q}^{(1)}(\xi)\frac{\partial}{\partial x_{1q}}\Big]\frac{d_\xi S}{|x_q-\xi|}-\sum_{k=1}^{K}\iint\limits_{S_k}\sum_{m=1}^{3}\alpha_{mk}^{(1)}(\xi)\hat{\omega}_{jmkq}^{(1)}\frac{d_\xi S}{|x_{kq}-\xi|}-$$

$$-\sum_{n=1}^{N}\iint\limits_{S_n}\sum_{m=1}^{3}\alpha_{mn}^{(2)}(\xi)\hat{\omega}_{jmnq}^{(1)}\frac{d_\xi S}{|y_{nq}-\xi|}-$$

$$-2(1-\nu_1)\sum_{s=1}^{3}\hat{\Psi}^{(1)}_{j0sq}\left[\frac{\partial}{\partial x_{30q}}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta^{(1)}_{s}(\eta)}{|x_{0q}-\eta|}\,d\eta_1 d\eta_2\right]=\frac{1-\nu_1}{G_1}N^{(1)}_{jq}(x_q),$$

$$x_q,\ x_{mq},\ y_{nq},\ x_{0q}\in S_q\ ,\ j=\overline{1,3};\ q=\overline{1,K}\ ,$$

$$\Delta_y\iint_{S_p}\frac{\alpha^{(2)}_{jp}(\xi)}{|y_p-\xi|}\,d_\xi S+(-1)^j\nu_2(1-\delta_{j3})\frac{\partial}{\partial y_{(3-j)p}}\iint_{S_p}\Big[\alpha^{(2)}_{1p}(\xi)\frac{\partial}{\partial y_{2p}}-$$

$$-\alpha^{(2)}_{2p}(\xi)\frac{\partial}{\partial y_{1p}}\Big]\frac{d_\xi S}{|y_p-\xi|}-\sum_{n=1}^{N}{}'\iint_{S_n}\sum_{s=1}^{3}\alpha^{(2)}_{sn}(\xi)\hat{\omega}^{(2)}_{jsnp}\frac{d_\xi S}{|y_{np}-\xi|}-$$

$$-\sum_{m=1}^{K}\iint_{S_m}\sum_{s=1}^{3}\alpha^{(1)}_{sm}(\xi)\hat{\omega}^{(2)}_{jsmp}\frac{d_\xi S}{|x_{mp}-\xi|}- \tag{14}$$

$$-2(1-\nu_2)\sum_{s=1}^{3}\hat{\Psi}^{(2)}_{j0sp}\left[\frac{\partial}{\partial x_{30p}}\iint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta^{(2)}_{s}(\eta)}{|x_{0p}-\eta|}\,d\eta_1 d\eta_2\right]=\frac{1-\nu_2}{G_2}N^{(2)}_{jp}(y_p),$$

$$y_p,\ y_{np},\ x_{mp},\ x_{0p}\in S_p\ ,\ j=\overline{1,3};\ p=\overline{1,N}\ ,$$

де Δ_x та Δ_y - двовимірні оператори Лапласа змінних x_1, x_2 та y_1, y_2 відповідно; штрих біля знаку суми означає, що в ній пропущено член з номером $k=q$ у перших $3K$ рівняннях і $n=p$ - у других $3N$ рівняннях. Регулярні ядра системи сингулярних рівнянь (14) враховують взаємодію тріщин між собою та з границею розділу, а постійні коефіцієнти диференціальних операторів $\hat{\omega}^{(i)}_{jslm}$ та $\hat{\Psi}^{(i)}_{j0sm}$ цих ядер залежать від пружних постійних матеріалів і геометричних параметрів, які характеризують орієнтацію тріщин у кусково-однорідному тілі.

Двовимірні інтеграли в системі рівнянь (14), інтегрування в яких відбувається по безмежній області, що співпадає з границею розділу середовищ, обчислено з використанням описаної в другому розділі методики.

Вивчено напружено-деформований стан безмежного кусково-однорідного тіла, послабленого двома дископодібними тріщинами, які знаходяться під дією внутрішнього тиску, при заданих їх розміщеннях та в широкому діапазоні зміни пружних постійних матеріалів. Відповідні інтегро-диференціальні рівняння розв'язано чисельно-аналітичним методом. Для кожного варіанту розташування тріщин визначено залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень від співвідношення модулів зсуву складеного тіла та від кутової координати точки контуру тріщини. Досліджено вплив віддалей тріщин від границі розділу середовищ на значення коефіцієтнів інтенсивності напружень.

У п'ятому розділі на основі викладених у попередньому розділі результатів як частковий випадок отримано систему $3N$ граничних сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь задачі теорії пружності для безмежного кусково-однорідного тіла, одна з складових якого є суцільним півпростором, а друга - півпростором, котрий містить систему N довільно розташованих у ньому плоских тріщин.

На конкретних прикладах досліджено вплив границі розділу різнорідних середовищ на концентрацію напружень в околі дископодібної тріщини, поверхні якої знаходяться під дією внутрішнього тиску. Побудовано графіки залежностей коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі перпендикулярно та паралельно розташованої відносно границі розділу тріщини від співвідношення модулів зсуву матеріалів і віддалей тріщини від границі розділу кусково-однорідного тіла.

Як граничний випадок вивчено взаємодію тріщини з жорстко защемленою границею півпростору.

У підсумках коротко сформульовано основні результати роботи.

У додатках виписано явні вирази для коефіцієнтів, що входять в інтегро-диференціальні оператори інтегральних рівнянь та наведено регулярні ядра інтегральних рівнянь, які описують взаємодію тріщин і жорстких включень в однорідному і кусково-однорідному тілах.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ ТА КОРОТКІ ВИСНОВКИ

У дисертації з використанням теорії гармонічних потенціалів, запропоновано єдиний підхід до розв'язування тривимірних задач теорії пружності для кусково-однорідних тіл з довільно розміщеними плоскими тріщинами та абсолютно жорсткими включеннями. Вихідні задачі зведено до розв'язування граничних інтегральних рівнянь з областями інтегрування, які співпадають з поверхнями тріщин та включень. Такий підхід є достатньо загальним, оскільки він не накладає обмежень на взаємне розташування згаданих дефектів, їх конфігурацію, а також на характер напружено-деформованого стану в розглядуваних тілах.

Для побудови наближеного розв'язку отриманих рівнянь в роботі використовується метод малого параметра, а для близько розташованих дископодібних тріщин та жорстких включень застосовується чисельно-аналітичний метод, який базується на регулярному представленні сингулярних інтегралів.

Основні результати дисертаційної роботи:

1. Побудовано розв'язки тривимірних задач теорії пружності для деяких кусково-однорідних суцільних тіл з границею розділу середовищ у вигляді безмежної площини при довільному зовнішньому навантаженні розглядуваних тіл.

2. Поширено метод граничних інтегральних рівнянь на випадок безмежного кусково-однорідного тіла, яке містить довільно розташовані плоскі тріщини та абсолютно жорсткі включення.

3. Виявлено деякі закономірності взаємодії в кусково-однорідних тілах плоских тріщин і абсолютно жорстких включень в залежності від їх розміщення, зовнішнього навантаження в широкому діапазоні зміни пружних характеристик матеріалу.

На основі розглянутих в роботі конкретних прикладів встановлено:

- орієнтація абсолютно жорсткого включення відносно тріщини суттєво впливає на коефіцієнти інтенсивності напружень в околі контуру тріщини. Для більшості значень кутів повороту включення відносно тріщини коефіцієнти інтенсивності напружень k_1 є меншими у порівнянні з випадком відсутності включення в аналогічному тілі. Вплив абсолютно жорсткого включення на значення k_1 в околі тріщини більш виразно проявляється у випадку розтягу безмежного тіла;
- при взаємодії дископодібних тріщин через границю розділу кусково-однорідного тіла, навантажених внутрішнім тиском, менш жорсткий матеріал приводить до різкого збільшення значень k_1 в околі розташованої у протилежному півпросторі тріщини і, навпаки, більш жорсткий матеріал викликає зменшення значень k_1;
- для деяких неосесиметричних варіантів розташування тріщин відносно границі розділу середовищ виявлено таке відношення модулів зсуву кусково-однорідного тіла, при якому коефіцієнти інтенсивності напружень не залежать від кутової координати точки контуру тріщини;
- у випадку взаємодії в кусково-однорідному тілі перпендикулярної і паралельної тріщин вплив віддалі до границі розділу однієї з них на коефіцієнти інтенсивності напружень в околі другої, розташованої в протилежному матеріалі, незначний;

- якщо одна з складових кусково-однорідного тіла є суцільним півпростором, то це обумовлює зменшення коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі тріщини в іншому півпросторі, якщо вона розташована перпендикулярно до його границі, і збільшення, якщо вона розміщена паралельно відносно границі розділу, у порівнянні з випадком взаємодії двох аналогічно розташованих у кусково-однорідному тілі тріщин. Ця закономірність спостерігається у всьому діапазоні зміни відношення модулів зсуву матеріалів.

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ДИСЕРТАЦІЇ ОПУБЛІКОВАНІ В РОБОТАХ:

1. Степанюк А.И. Взаимодействие в бесконечном теле дискообразной трещины с абсолютно жестким включением // В кн.: Материалы 12 конф. мол. учен. Ин-та прикл. пробл. мех. и матем. АН УССР. - 1988. - № 6308-В88 Деп. - С. 186 - 192.
2. Хай М.В., Степанюк А.И. Взаимодействие в бесконечном теле плоских трещин с абсолютно жесткими включениями // Мат. методы и физ.-мех. поля. - 1989. - Вып. 29. - С. 63 - 68.
3. Степанюк А.И. О сведении к граничным интегральным уравнениям трехмерных задач теории упругости для кусочно-однородного полупространства с трещиной на границе раздела сред // В кн.: Материалы 13 конф. мол. учен. Ин-та прикл. пробл. мех. и матем. АН УССР. - 1989. - № 7242-В89 Деп. - С. 124 - 130.
4. Хай М.В., Лаушник И.П., Степанюк А.И. Взаимодействие газонаполненных трещин в кусочно-однородном теле // В кн.: Механика неоднородных структур. 3 Всесоюзная конференция. Львов. - 1991. - Ч. 2. - С. 345.
5. Хай М.В., Степанюк А.И. О взаимодействии трещин в кусочно-однородном теле// Прикл. механика. - 1992. - 28, № 12. - С. 46 - 56.
6. Кіт Г.С., Степанюк О.І. Розкриття плоскої тріщини на границі розділу в композиційній структурі // В кн.: Фізико-хімічна механіка композиційних матеріалів. 1 Міжнародний симпозіум. Івано-Франківськ. - 1993. - С. 32.

Підписано до друку І7.05.94р. Формат 60х84/І6 Друк офсет. Папір друк.
№ І Умов друк. арк. 0,93 Умов.фарбо-відб. І,І6. Обл.-вид.арк. 0,8
Тираж І00 прим. Зам. 2527

Львівська обласна книжкова друкарня.290000,м.Львів, вул.Стефаника,ІІ