

НАЦИОНАЛЬНАЯ  
АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ  
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ  
им. С. П. ТИМОШЕНКО

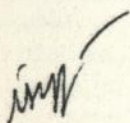
На правах рукописи

ГУЗЬ ИГОРЬ АЛЕКСАНДРОВИЧ

ТРЕХМЕРНАЯ ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ КОМПОЗИТОВ  
С РАЗЛИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ КОНТАКТА СЛОЕВ

01.02.04 - механика деформируемого твердого  
тела

А в т о р е ф е р а т  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук



Киев - 1994

АВ 30.307

Диссертацией является рукопись.

Работа выполнена в Институте механики АН Украины.

Научный консультант - доктор физико-математических наук,  
профессор БАБИЧ И.Ю.

Официальные оппоненты: член-корреспондент АН Украины,  
профессор ШУЛЬГА Н.А.

доктор физико-математических наук,  
профессор ПЕЛЕХ Б.Л.

доктор технических наук,  
профессор ГУЛЯЕВ В.И.

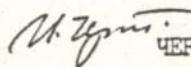
Ведущая организация - Киевский автомобильно-дорожный институт.

Защита состоится " 28 " июня 1994 г. в 10 часов на заседании специализированного ученого совета Д 016.49.01 при Институте механики АН Украины по адресу: 252057, Киев, ул.Нестерова, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики АН Украины (Киев, ул.Нестерова, 3).

Автореферат разослан " 23 " мая 1994 г.

Ученый секретарь  
специализированного ученого совета  
доктор технических наук, профессор



ЧЕРНЫШЕНКО И.С.

ЛННБ України ім.В.Стефаника



00777613 (V)

В. Стефаника  
і України

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Современный уровень развития техники требует создания материалов, обладающих одновременно легкостью, прочностью, надежностью, стойкостью к воздействию окружающей среды, а также достаточно экономичных при их производстве. Это ведет к широкому использованию композитных материалов, которые могут сочетать в себе столь различные свойства, во многих отраслях промышленности, а, следовательно, и к значительному повышению роли механики композитных материалов. Об этом свидетельствует ряд обобщающих монографий, вышедших в нашей стране, а также множество обзорных статей, посвященных технологии изготовления, изучению свойств и применения композитов, опубликованных в зарубежных изданиях. В них, в частности, отмечается, что к 2010 году доля производства композитов с металлической матрицей превзойдет долю производства стали.

К числу наиболее интересных, своеобразных и недостаточно исследованных явлений в механике композитов можно отнести разрушение при сжатии, в котором проявляются механизмы разрушения, характерные только для композитных и в основном не наблюдающиеся для однородных материалов. Одним из таких механизмов является разрушение вследствие потери устойчивости в структуре композитного материала. Эта неустойчивость обусловлена не размерами и формой образца (элемента конструкции), а его внутренней структурой — соотношениями между механическими и геометрическими характеристиками структурных элементов и различных неоднородностей естественного или технологического происхождения. (В дальнейшем термин разрушение будет использоваться именно в смысле разрушения вследствие потери устойчивости в структуре).

Весьма распространенной структурой композита является слоистая структура, когда все границы раздела структурных элементов параллельны одной плоскости. К тому же в реальных слоистых композитах вследствие технологии изготовления или условий эксплуатации возникают межкомпонентные дефекты различной природы — расслоения, трещины, непроклеи, зоны ослабления адгезии и т.п. несовершенства. При сжатии композита вдоль слоев и, следовательно, вдоль указанных дефектов, классический критерий разрушения Гриффитса-Ирвина или его обобщения неприменимы. Действи-

тельно, в данной ситуации все коэффициенты интенсивности напряжений и раскрытие берегов трещин равны нулю. В этом случае начало процесса разрушения принято связывать с потерей устойчивости в структуре материала, которая определяется, следуя работам А.Н.Гузя, в рамках трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ).

Направления изучения задач устойчивости композитов при сжатии вдоль межслоевых трещин можно классифицировать следующим образом. Первое направление связано с использованием различных прикладных расчетных схем и приближенных теорий, второе - с использованием точной постановки.

В рамках первого направления существует большое количество работ по использованию стержневых, оболочечных и им подобных расчетных схем (А.М.Михайлов, Л.М.Качанов, В.В.Болотин, Ю.Н.Работнов, В.П.Тамуж, Б.Л.Пелех и многие другие, в том числе в последние годы E.Paramichos, I.Vardoulakis, J.D.Whitcomb, J.G.Williams, Z.Kutlu, E.C.J.Wung, S.N.Chatterjee). Такой подход, названный "балочным приближением", применял еще в 30-ых годах И.В.Обреимов к родственным задачам. Существует также подход, связанный с описанием свойств композита в рамках континуального приближения (при этом нельзя различить межслоевые и внутрислоевые трещины) и использованием уравнений ТЛТУДТ (А.Н.Гузь). Конкретные задачи в рамках указанного подхода решались в работах В.М.Назаренко, В.Л.Богданова, В.И.Кнюха, И.П.Стародубцева.

Второе направление базируется на наиболее точной из существующих в настоящее время постановок - модель кусочно-однородной среды с использованием уравнений ТЛТУДТ. В рамках указанного точного подхода устойчивость слоистых композитов исследовалась лишь при идеальном контакте слоев (без трещин) - жестком сцеплении или проскальзывании без трения всех слоев. При этом изучены только пространственная осесимметричная и плоская задачи для отдельных типов структур, состоящих из упругих слоев. А именно: внутренняя неустойчивость композитов, состоящих из двух чередующихся слоев при их жестком сцеплении (для сжимаемых и несжимаемых слоев в работах А.Н.Гузя, И.Ю.Бабица) и проскальзывании без трения (для несжимаемых слоев в работах А.Д.Чернышова, В.В.Гусева); поверхностная неустойчивость слоистых полупространств (В.Н.Чехов, В.П.Корж, В.С.Стукотилов). Кроме того, существуют

отдельные работы по исследованию устойчивости пакета слоев конечной длины или конечного числа упругопластических слоев (А.В. Скаченко). Причем, в перечисленных выше работах изучен только случай периодических вдоль слоев форм потери устойчивости.

Таким образом, устойчивость композитов с межслоевыми трещинами в рамках точной постановки до настоящего времени не рассматривалась. Также отсутствуют решения пространственных неосесимметричных задач о внутренней неустойчивости при идеальном контакте слоев; пространственных и плоских задач для случая упругопластических слоев; не изучен вопрос о локальных формах потери устойчивости.

Целью работы является исследование устойчивости при сжатии композитных материалов с различными условиями на границе раздела слоев в рамках точной постановки (модель кусочно-однородной среды с использованием соотношений ТЛТУДТ), включая:

1. Постановку и разработку аналитических и численных методов решения задач для композитов при локальных и периодических формах потери устойчивости при условиях жесткого сцепления или проскальзывания без трения слоев и с учетом межслоевых трещин.
2. Установление верхней и нижней оценок для критических параметров нагружения при сжатии композита вдоль слоев с межслоевыми дефектами; обоснование континуальной теории разрушения композитов исходя из точной постановки задачи.
3. Разработку комплекса программ с использованием метода конечных разностей для решения задач устойчивости композитов с межслоевыми трещинами.
4. Получение числовых результатов для конкретных композитных материалов, анализ закономерностей и механических эффектов.

Научная новизна и значимость. В работе впервые дана строгая постановка новых классов задач об устойчивости при сжатии композитов с различными условиями контакта слоев для локальных и периодических вдоль слоев форм потери устойчивости. Указанная постановка основана на использовании модели кусочно-однородной среды и основных соотношений ТЛТУДТ и является наиболее точной из известных в настоящее время. С помощью предложенных аналитических методов решены задачи о внутренней неустойчивости компо-

зитов при жестком сцеплении и проскальзывании без трения слоев, при этом впервые рассмотрена пространственная неосесимметричная задача для сжимаемых и несжимаемых упругих слоев; пространственные и плоская задачи для упругопластических слоев. Разработан подход, позволяющий одновременно исследовать как периодические вдоль слоев, так и локальные формы потери устойчивости. Предложена и обоснована оценка критических параметров нагружения для композитов с межслоевыми трещинами. Исходя из результатов, полученных в рамках модели кусочно-однородной среды, проведено строгое обоснование континуальной теории разрушения слоистых композитов. С использованием метода конечных разностей развита методика решения задач устойчивости при сжатии вдоль межслоевых микротрещин, структурных трещин и макротрещин. Во всех перечисленных классах задач получены числовые значения применительно к реальным конструкционным материалам.

Достоверность результатов обеспечивается:

а) использованием наиболее точной из известных в настоящее время постановок задачи (модель кусочно-однородной среды, соотношения ТЛТУДГ);

б) при применении аналитических методов:

- получением характеристических определителей в замкнутой форме;
- решением характеристических уравнений с наперед заданной точностью;

в) при применении численного метода конечных разностей:

- доказанностью сходимости используемой разностной схемы;
- совпадением числовых результатов с ранее полученными на тестовых примерах;
- практической сходимостью разностной схемы на последовательности сеток;

г) непротиворечивостью всех полученных результатов соображениям физического характера, их согласованностью друг с другом.

Практическая ценность заключается в создании методик, позволяющих определять значения критических параметров нагружения во всех рассмотренных классах задач устойчивости композитов с различными условиями контакта слоев; получении конкретных результатов для реальных конструкционных материалов с межслоевыми трещинами; установлении верхней и нижней оценок для композитов с межслоевыми дефектами исходя из результатов при жестком сцеп-

лении и проскальзывании без трения слоев; получении числовых характеристик точности континуальной теории разрушения слоистых композитов. Полученные в рамках точной постановки, результаты настоящей работы могут использоваться как эталонные при оценке точности различных прикладных расчетных схем и приближенных теорий, а также при расчете на устойчивость и прочность конкретных элементов конструкций из композитных материалов.

**Апробация работы.** Результаты диссертации докладывались и обсуждались на IX Международной конференции по композитным материалам (Мадрид, Испания, 1993); V и IX Международных конференциях по механике композитных материалов (Рига, Латвия, 1990, 1993); III Всесоюзной конференции по механике неоднородных структур (Львов, 1991); I Всесоюзной конференции по технологическим проблемам прочности несущих конструкций (Запорожье, 1991); Всероссийской конференции "Проблемы надежности и долговечности" (Москва, Россия, 1992); УП Всесоюзной научной школе "Деформирование и разрушение материалов с дефектами и динамические явления в горных породах и выработках" (Симферополь, 1990); IX Зимней школе по механике сплошных сред (Пермь, Россия, 1991); Школе "Современные методы в теории краевых задач" (Воронеж, Россия, 1992); III и IV Всесоюзных школах молодых ученых по численным методам механики сплошных сред (Дорно, Россия, 1991, 1992); XII-XIII Научных конференциях молодых ученых Института механики АН Украины (Киев, 1989-1993); III Симпозиуме "Устойчивость и пластичность в механике деформируемого твердого тела" (Тверь, Россия, 1992); I Научно-техническом семинаре "Динамика и устойчивость композиционных структур" (Львов, 1991).

В полном объеме диссертационная работа докладывалась на семинаре Института легких структур и аэрокосмической механики (Вена, Австрия, 1993); семинаре по механике и теории течения Венского Технического Университета (Вена, Австрия, 1993); семинаре Института механики Леобенского Горного университета (Леобен, Австрия, 1993); семинаре отдела механики композиционных сред Института механики АН Украины (Киев, 1994); семинаре кафедры теоретической и прикладной механики Киевского автомобильно-дорожного института (Киев, 1994); семинаре кафедры механики сплошных сред Киевского университета (Киев, 1994), общеполитинститутском семинаре по механике Института механики АН Украины (Киев, 1994).

Публикации. По результатам диссертации опубликовано 42 научные работы.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы, включающего 200 наименований, содержит 70 рисунков и 14 таблиц. Общий объем работы 271 страница.

### ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан краткий обзор работ, относящихся к теме диссертации. Обоснована актуальность проблематики, сформулирована цель диссертации, отмечены новизна, научная и практическая значимость работы, кратко изложены результаты, полученные в диссертации.

В первой главе приводятся некоторые основные соотношения ТЛУДТ для сжимаемых и несжимаемых тел применительно к пространственной и плоской задачам устойчивости с указанием способа построения решений при однородных докритических деформациях; дана общая постановка задачи устойчивости для композита произвольной слоистой структуры; проведено обоснование оценок критических параметров нагружения при сжатии композита вдоль межслоевых дефектов и классификации материалов слоев.

Постановка задачи сводится к следующей. Рассматривается композит, имеющий произвольную слоистую структуру, т.е. состоящий из произвольной комбинации пакетов слоев и полупространств. Для каждого из слоев вводится лагранжева система координат (рис. I), которая в недеформированном состоянии совпадает с декартовой. Все величины, относящиеся к недеформированному состоянию, обозначены индексом "0". Индекс "(i)" будет обозначать, что данная величина характеризует i-ый слой. Ниже приводятся основные положения постановки задачи:

- в композите имеют место межслоевые дефекты различной природы (трещины, зоны проскальзывания без трения и т.п.);

- композит находится в условиях сжатия вдоль слоев "мертвыми нагрузками", приложенными на бесконечности таким образом, что обеспечивается одинаковое укорочение вдоль всех слоев (однородное докритическое состояние  $\epsilon_{ii}^{0(i)} = \epsilon_{ii}^{0(j)}$ ,  $i = 1, 2$ , но  $\epsilon_{11}^{0(i)} \neq \epsilon_{22}^{0(i)}$ );

- исследование проводится в рамках точной постановки (модель кусочно-однородной среды с использованием соотношений ТЛУУДГ);

- используется статический метод исследования статических задач ТЛУУДГ, достаточные условия применимости которого удовлетворяются при принятом способе нагружения;

- слои моделируются сжимаемыми или несжимаемыми, упругими или упругопластическими, изотропными или трансверсально-изотропными (с осью изотропии перпендикулярной слоям) телами;

- в случае упругопластических слоев применяется обобщенная концепция продолжающегося нагружения, позволяющая не учитывать изменение зон нагрузки-разгрузки в момент потери устойчивости.

Таким образом, в точной постановке необходимо решить уравнения устойчивости (линеаризированные уравнения в возмущениях) для сжимаемых слоев

$$\partial/\partial x_i (\omega_{ij\alpha\beta}^{(k)} \partial u_\alpha^{(k)} / \partial x_\beta) = 0 \quad (1)$$

для несжимаемых слоев (с условиями несжимаемости)

$$\frac{\partial}{\partial x_i^{(k)}} \left[ \omega_{ij\alpha\beta}^{(k)} \frac{\partial u_\alpha^{(k)}}{\partial x_\beta} + \left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_j^{o(k)}}{\partial x_i} \right) \rho^{(k)} \right] = 0,$$

$$\left( \delta_{ij} + \frac{\partial u_j^{o(k)}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

при следующих граничных условиях:

- в зоне жесткого сцепления слоев  $S_c$

$$t_{Ni}^{(k)} = t_{Ni}^{(k+1)}, \quad u_i^{(k)} = u_i^{(k+1)}; \quad (3)$$

- на берегах трещин  $S_{ce}$

$$t_{Ni}^{(k)} = 0, \quad t_{Ni}^{(k+1)} = 0; \quad (4)$$

- в зоне проскальзывания без трения ("дефекты со связанными берегами")  $S_{sl}$

$$t_{NN}^{(k)} = t_{NN}^{(k+1)}, \quad u_N^{(k)} = u_N^{(k+1)}, \quad t_{Nj}^{(k)} = 0, \quad t_{Nj}^{(k+1)} = 0; \quad (5)$$

- на свободной поверхности (если она входит в структуру)  $S_f$

$$t_{Ni} = 0; \quad (6)$$

- условие затухания возмущений на бесконечности

$$u_j = 0 \quad (7)$$

причем  $N = 3$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2$  соответствует пространственной,  $N = 2$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1$  - плоской задаче. Уравнения в возмущениях (1), (2) для перемещений  $\bar{u}$  и несимметричного тензора напряжений Кирхгофа  $\bar{\varepsilon}$  при соответствующих структуре граничных условиях (3)-(7) представляют собой задачу на собственные значения относительно параметров нагружения, входящих в компоненты тензоров  $\bar{\omega}$  и  $\bar{\varepsilon}$ . Компоненты этих тензоров зависят также от определяющих уравнений слоя.

Для композитов, содержащих дефекты типа (5) на отдельных участках границ раздела, в работе введены верхняя и нижняя оценки для критических параметров нагружения (КПН). При этом исследование не выходит за рамки модели кусочно-однородной среды и уравнений ТЛТУДГ. Предложенные оценки базируются на общеизвестном принципе механики об уменьшении КПН при потере устойчивости, если в системе произошло освобождение от части связей. Так, с одной стороны, КПН  $f$  для композитов с указанными дефектами должны быть меньше, чем КПН  $f^+$  для композита той же структуры с идеальным жестким сцеплением слоев (условие (3) вдоль всех границ раздела слое). С другой стороны,  $f$  должны быть больше, чем КПН  $f^-$  для композитов той же структуры при отсутствии части межслоевых связей, т.е. при проскальзывании слоев без трения (условие (5) на всех границах раздела). Следовательно, имеем оценку  $f^- < f < f^+$ . Значения  $f^+$  и  $f^-$  для конкретных структур композитов определяются, соответственно, во второй и третьей главах с использованием аналитических методов. КПН же для композитов с конкретными дефектами типа трещин вычисляются в шестой главе с помощью метода конечных разностей.

Если при однородных докритических деформациях дополнительно принять, что они являются осесимметричными ( $\varepsilon_{ii}^0 = \varepsilon_{22}^0$ ), то решения основных уравнений ТЛТУДГ - компоненты  $\bar{u}$  и  $\bar{\varepsilon}$  для каждого из слоев - можно выразить через потенциалы  $\chi$  и  $\psi$ , являющиеся решением уравнений (для пространственной задачи):

$$\left( \Delta_1 + \xi_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \psi = 0; \quad \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2};$$

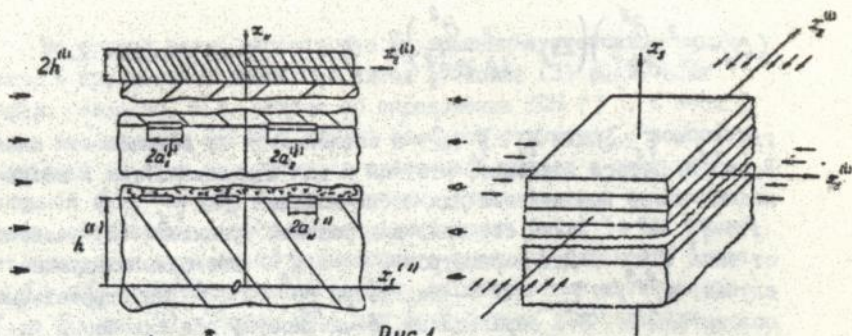


Рис. 1

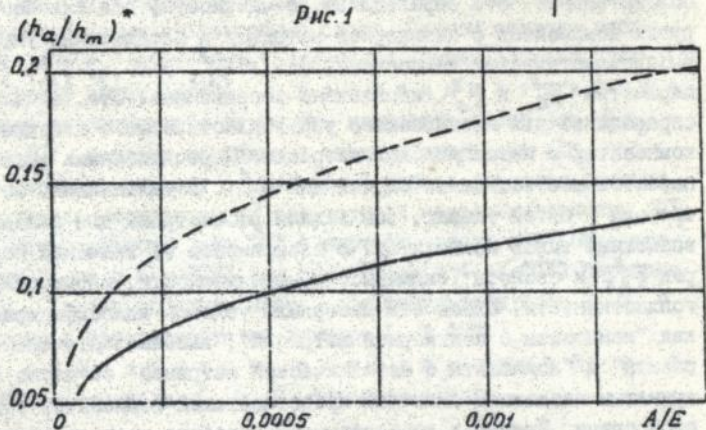


Рис. 2

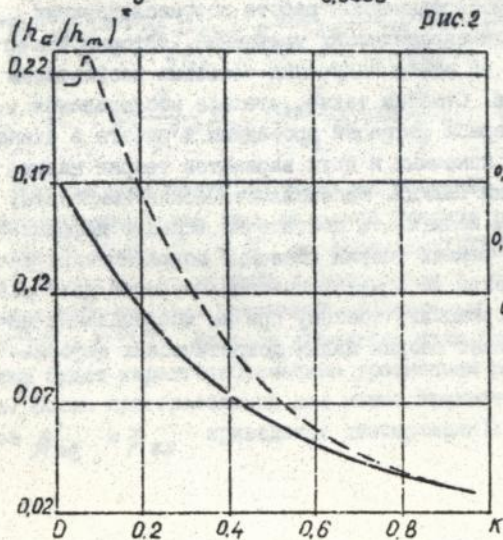


Рис. 3

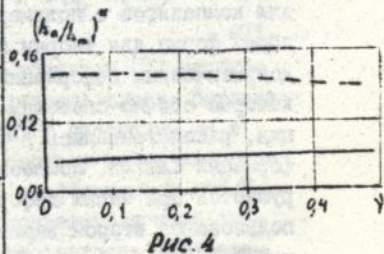


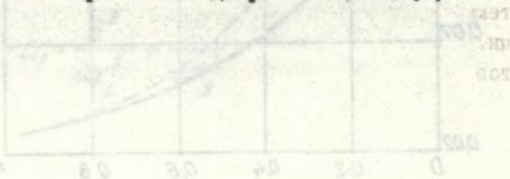
Рис. 4

$$\left(\Delta_i + \xi_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right) \left(\Delta_i + \bar{\xi}_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right) X = 0,$$

(8)

где  $\bar{\xi}_i = \xi_i(\bar{\omega})$  или  $\bar{\xi}_i = \xi_i(\bar{\xi})$  в зависимости от сжимаемости слоя. В работе строго доказано, что как и для сжимаемых, так и несжимаемых слоев выполняется для любых моделей  $Re \xi_i^2 > 0$ .

$Im \xi_i^2 = 0$ . Таким образом, вид решений уравнений (8) зависит от типа  $\xi_i^2$ . Для параметров  $\xi_2^2$  и  $\xi_3^2$  возможны следующие случаи. а)  $Im \xi_{2,3}^2 = 0$  - параметры  $\xi_2^2$  и  $\xi_3^2$  действительные положительные. Это справедливо, в частности, для сжимаемых упругих композитов с полимерной матрицей и несжимаемых упругих высокоэластических композитов. б)  $Im \xi_{2,3}^2 \neq 0$ ,  $\xi_2^2 = \bar{\xi}_3^2$  - параметры  $\xi_2^2$  и  $\xi_3^2$  комплексно-сопряженные. Это, в частности, справедливо для несжимаемого упругопластического связующего в композитах с металлической матрицей. Перечисленными выше исчерпываются все возможные случаи для  $\xi_j^2$ . В дальнейшем, во второй, третьей и пятой главах, все задачи рассмотрены для каждого из возможных типов композитов. В зависимости от значений параметров  $\xi_{2,3}^2$  и свойств (сжимаемости/несжимаемости, упругости/упругопластичности) слоев эти материалы условно классифицированы как "композиты с полимерной матрицей", высокоэластические композиты" и "композиты с металлической матрицей" согласно общепринятым названиям типичных представителей композитов с данными свойствами. Причем в диссертационной работе все исследования проведены при общем виде определяющих уравнений, которые конкретизировались только на этапе получения числовых результатов для реальных материалов. Отметим также, что все исследования для композитов с полимерной матрицей проведены в работе в единой общей форме для теории конечных и двух вариантов теории малых докритических деформаций ТЛУУДТ. Высокоэластические композиты, которые обычно способны испытывать достаточно большие деформации, рассматривались в рамках теории конечных докритических деформаций ТЛУУДТ. Композиты же с металлической матрицей даже разрушаются при малых деформациях, поэтому при их исследовании использовался второй вариант теории малых докритических деформаций ТЛУУДТ.



Во второй главе рассмотрена внутренняя неустойчивость композитов при жестком сцеплении слоев (условие (3) вдоль всех границ раздела), т.е. задача об определении КРН  $f^*$ . С этой целью исследуется частный случай слоистой структуры - композит, состоящий из двух чередующихся слоев наполнителя и связующего толщиной  $2h_a$  и  $2h_m$  (все величины, относящиеся к каждому из слоев, обозначены, соответственно индексами "a" и "m"). Композит находится в условиях равномерного сжатия в плоскости слоев ( $\epsilon_{11}^0 = \epsilon_{22}^0$ ). Метод решения основан на построении потенциалов  $\chi$  и  $\psi$  из (9) в явном виде для форм потери устойчивости (ФЛУ), периодических вдоль границ слоев. Причем периоды вдоль осей  $Ox_1$  и  $Ox_2$  могут быть различными, иными словами, рассматриваются в общем случае неосесимметричные ФЛУ. В силу периодичности структуры композита вдоль оси  $Ox_2$  изучаются ФЛУ, которые периодичны также и вдоль оси  $Ox_1$  с периодом, кратным периоду структуры. В работе строятся решения и все исследования проводятся для четырех неосесимметричных ФЛУ, которыми исчерпываются все ФЛУ с периодом вдоль оси  $Ox_2$  равным одному (1-ая и 3-ья ФЛУ) или двум (2-ая и 4-ая ФЛУ) периодам структуры. С целью экономии места, все результаты глав 2, 3, 5 представлены в автореферате на примере 1-ой ФЛУ.

Для композитов с полимерной матрицей потенциалы  $\chi$  и  $\psi$  строятся в виде

$$\begin{aligned} \chi_{ij}^{a,m} &= (A^{a,m} \operatorname{ch} \frac{\pi}{\ell_{12}^{a,m}} x_{3ij}^{a,m} + B^{a,m} \operatorname{ch} \frac{\pi}{\ell_{23}^{a,m}} x_{3ij}^{a,m}) \sin \frac{\pi}{\ell_1} x_1 \sin \frac{\pi}{\ell_2} x_2; \\ \psi_{ij}^{a,m} &= C^{a,m} \operatorname{sh} \frac{\pi}{\ell_{12}^{a,m}} x_{3ij}^{a,m} \cos \frac{\pi}{\ell_1} x_1 \cos \frac{\pi}{\ell_2} x_2; \quad \ell^{-2} = (\ell_1^{-2} + \ell_2^{-2})^{1/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу периодичности построенных решений, условиям (3) необходимо удовлетворять лишь на одной границе раздела слоев. Выразив  $u$  и  $\bar{\epsilon}$  через  $\chi$  и  $\psi$  по формулам ТЛУДТ и подставив их в (3), получим, после ряда преобразований, систему шести однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $A^{a,m}$ ,  $B^{a,m}$ ,  $C^{a,m}$ . Условие равенства нулю определителя этой системы будет характеристическим уравнением рассматриваемой задачи. После преобразований его можно привести к форме (вид элементов  $\beta'_{pq}$  и  $\beta_{rs}$  приведен в диссертации):

$$\det \|\beta_{\varepsilon s}\| \equiv \left(\frac{\ell_1 \ell_2}{\ell \alpha}\right)^2 (\omega_{133}^a + \omega_{1313}^a)^{-2} (\omega_{133}^m + \omega_{1313}^m)^{-2} (\omega_{3113}^a \xi_1^{a-1} \times$$

$$\times \text{ch} \alpha_a \xi_1^{a-1} \text{sh} \alpha_m \xi_1^{m-1} + \omega_{3113}^m \xi_1^{m-1} \text{ch} \alpha_m \xi_1^{m-1} \text{sh} \alpha_a \xi_1^{a-1}) \times$$

$$\times \det \|\beta'_{\rho q}\| = 0, \quad \varepsilon, s = \bar{1}, \bar{3}; \quad \rho, q = \bar{1}, \bar{4}. \quad (10)$$

В работе строго доказано, что корни, соответствующие рассматриваемому явлению внутренней неустойчивости, может давать только уравнение  $\det \|\beta'_{\rho q}\| = 0$ ;  $\rho, q = \bar{1}, \bar{4}$ , которое при соответствующей замене параметров волнообразования  $\alpha_{a,m}$  совпадает с характеристическим определителем осесимметричной пространственной задачи. Это позволяет представлять числовые результаты в единой форме для указанных классов задач.

Для высокоэластических композитов остаются в силе представления (9). Процедура получения характеристического определителя аналогична указанной выше, только необходимо использовать ТЛУДГ для несжимаемых тел. Характеристический определитель шестого порядка сводится к

$$\det \|\beta_{\varepsilon s}\| \equiv \left(\frac{\ell_1 \ell_2}{\alpha \ell}\right)^2 (\alpha_{3113}^a \xi_1^{a-1} \text{ch} \alpha_a \xi_1^{a-1} \text{sh} \alpha_m \xi_1^{m-1} +$$

$$+ \alpha_{3113}^m \text{ch} \alpha_m \xi_1^{m-1} \text{sh} \alpha_a \xi_1^{a-1}) \det \|\beta'_{\rho q}\| = 0, \quad \varepsilon, s = \bar{1}, \bar{3}; \quad \rho, q = \bar{1}, \bar{4} \quad (11)$$

В результате анализа (11) строго доказаны те же выводы, что и для композитов с полимерной матрицей.

Для композитов с металлической матрицей представление потенциалов  $\chi^a, \psi^{a,m}$  остается в виде (9) (наполнитель моделируется сжимаемым упругим телом), а для  $\chi^m$ :

$$\chi_{ij}^m = \left[ A^m \text{ch} \left( \frac{\sqrt{\xi}}{\ell} |\xi_2^m|^{-2} \text{Re} \xi_2^m x_{3(j)}^m \right) \cos \left( \frac{\sqrt{\xi}}{\ell} |\xi_2^m|^{-2} \text{Im} \xi_2^m x_{3(j)}^m \right) + \right.$$

$$\left. + B^m \text{sh} \left( \frac{\sqrt{\xi}}{\ell} |\xi_2^m|^{-2} \text{Re} \xi_2^m x_{3(j)}^m \right) \sin \left( \frac{\sqrt{\xi}}{\ell} |\xi_2^m|^{-2} \text{Im} \xi_2^m x_{3(j)}^m \right) \right] \sin \frac{\sqrt{\xi}}{\ell_1} x \sin \frac{\sqrt{\xi}}{\ell_2} x_2. \quad (12)$$

Выполнив ту же процедуру получения и анализа характеристического определителя приходим к

$$\det \| \beta_{\varepsilon s} \| = \varrho^{-2} \pi^{-2} (\rho_1 \rho_2)^2 (\omega_{113}^a + \omega_{113}^b)^2 (\omega_{313}^a \xi_{11}^{a-1} \operatorname{ch} \alpha \xi_{11}^{a-1} \operatorname{sh} \alpha \xi_{11}^{a-1} + \\ + 2 \xi_{11}^m \xi_{11}^{m-1} \operatorname{ch} \alpha \xi_{11}^{m-1} \operatorname{sh} \alpha \xi_{11}^{a-1}) \det \| \beta'_{\rho q} \| = 0; \quad \varepsilon, s = \overline{1, 6}; \quad \rho, q = \overline{1, 4}. \quad (13)$$

Как и для двух предыдущих типов композитов, в диссертации строго доказано (для всех четырех рассматриваемых  $\Phi IV$ ), что явление внутренней неустойчивости соответствуют только корни характеристического определителя четвертого порядка (он подчеркнут в (10), (11), (13)). Причем показана замена параметров волнообразования, при которой этот определитель совпадает с характеристическим определителем осесимметричной пространственной задачи.

В работе также решена плоская задача для композитов с металлической матрицей - построены потенциалы  $\chi^{a,m}$  и выведен характеристический определитель. Кроме того, для всех трех типов композитов доказывается, что при соответствующих заменах индексов в компонентах  $\tilde{\omega}$  и  $\tilde{\xi}$  и параметров  $\xi_j$ , характеристические уравнения для пространственных неосесимметричных задач переходят в уравнения для плоских задач. Следовательно, при установлении соответствия между параметрами нагружения в пространственных и плоских задачах (что в случае нелинейных определяющих уравнений возможно не всегда) числовые результаты для этих задач представимы в единой форме.

Полученные результаты проиллюстрированы **ч и с л о в ы м** **п р и м е р о м**. С этой целью проведена конкретизация характеристического определителя для частного случая композита с металлической матрицей - линейно-упругого изотропного сжимаемого наполнителя и несжимаемого изотропного упругопластического связующего со степенной зависимостью между интенсивностями напряжений и деформаций  $\sigma_{II}^0 = A(\varepsilon_{II}^0)^N$  (теория малых упругопластических деформаций). В результате характеристический определитель приведен к уравнению относительно двух переменных  $\| \det \beta'_{\rho q}(\varepsilon_{II}^0, \alpha_a) \| = 0$ , решением которого будут зависимости  $\varepsilon_{II}^N(\alpha_a)$ , где  $N = \overline{1, 4}$  - номер  $\Phi IV$ . Доказано, что явление внутренней неустойчивости может существовать (при критической деформации  $\varepsilon_{кр}$ ), если

$$\varepsilon_{кр} \equiv \min_N \left\{ \min_{\alpha > 0} \varepsilon_{II}^N(\alpha) \right\} < \min_N \left\{ \varepsilon_{II}^N(0) \right\}. \quad (14)$$

При анализе конкретных зависимостей  $\varepsilon_{II}''(\alpha_a)$ , полученных при фиксированных  $A, K, E$  (модуль Юнга),  $\nu$  (коэффициент Пуассона),  $h_a/h_m$  на ЭВМ, оказалось, что (I4) выполняется не при всех сочетаниях этих параметров. Так, при  $h_a/h_m < (h_a/h_m)^*$  явление внутренней неустойчивости возможно, а при  $h_a/h_m > (h_a/h_m)^*$  - невозможно. Зависимости  $(h_a/h_m)^*$  от  $A/E$  (при  $\nu = 0,3, K = 0,25$ );  $K$  (при  $A/E = 0,0005, \nu = 0,3$ );  $\nu$  (при  $A/E = 0,0005, K = 0,25$ ) представлены на рис. 2 - 4 (сплошные кривые соответствуют пространственной, штриховые - плоской задачам).

Отмеченное явление, заключающееся в невозможности внутренней неустойчивости при определенных сочетаниях геометрических и механических свойств слоев, ранее не отмечалось, в связи с чем представляется оправданным считать его новым механическим эффектом.

На рис. 5, 6 представлены значения критической деформации с учетом описанного выше механического эффекта в рамках пространственной задачи для реальных конструктивных композитов алюминий - сталь ( $E = 200$  ГПа,  $\nu = 0,3$ ; кривые 1 при  $A = 100$  МПа,  $K = 0,1$ ; кривые 2 при  $A = 100$  МПа,  $K = 0,25$ ; кривые 3 при  $A = 68$  МПа,  $K = 0,25$ ) и алюминий - бор ( $E = 400$  ГПа,  $\nu = 0,21$ , кривые 4 при  $A = 70$  МПа,  $K = 0,25$ ; кривые 5 при  $A = 130$  МПа,  $K = 0,43$ ). Здесь сплошная линия соответствует 1-ой ФПУ, штриховая - 2-ой ФПУ.

Заметим также, что в работе получены зависимости (в том числе и от других параметров) для значительно большего количества материалов.

В третьей главе рассмотрена устойчивость композитов периодической структуры при проскальзывании слоев без трения (условие (5) вдоль всех границ раздела), т.е. задача об определении КРН  $f''$ . При этом изучаются те же материалы, что и во второй главе в той же постановке, только вместо (3) используется (5). Решения строятся так же в явном виде для тех же четырех периодических вдоль слоев ФПУ. Процесс получения характеристических определителей аналогичен описанному во второй главе.

При исследовании пространственной неосесимметричной задачи характеристический определитель шестого порядка был приведен к виду

$$\det \| \gamma_{rs} \| \equiv \gamma_{11} \gamma_{44} \left( 1 + \frac{e_2^2}{e_1^2} \right)^2 \det \| \gamma'_{pq} \| = 0; \quad e, s = \bar{1}, \bar{6}; \quad \rho, q = \bar{1}, \bar{4}, \quad (15)$$

где для композитов с полимерной матрицей

$$\gamma_{11} \gamma_{44} \equiv (\omega_{113}^a + \omega_{1313}^a)^{-1} (\omega_{113}^m + \omega_{1313}^m)^{-1} \frac{\omega_{3113}^a}{\xi_1^a} \frac{\omega_{3113}^m}{\xi_1^m} ch \frac{\alpha_a}{\xi_1^a} ch \frac{\alpha_m}{\xi_1^m}; \quad (16)$$

для высокоэластических композитов

$$\gamma_{11} \gamma_{44} \equiv \frac{\alpha_{3113}^a}{\xi_1^a} \frac{\alpha_{3113}^m}{\xi_1^m} ch \frac{\alpha_a}{\xi_1^a} ch \frac{\alpha_m}{\xi_1^m}; \quad (17)$$

для композитов с металлической матрицей

$$\gamma_{11} \gamma_{44} \equiv \frac{\omega_{3113}^a}{\xi_1^a} \frac{\alpha_{3113}^m}{\xi_1^m} (\omega_{113}^a + \omega_{1313}^a)^{-1} ch \frac{\alpha_a}{\xi_1^a} ch \frac{\alpha_m}{\xi_1^m}. \quad (18)$$

В диссертации строго доказано, что корни, соответствующие изучаемому явлению, может иметь только уравнение  $\det \| \gamma'_{pq} \| = 0$ .

$\rho, q = \bar{1}, \bar{4}$ , где

$$\begin{aligned} \gamma'_{ij} &= \beta'_{ij}, \quad i=2,4, \quad j=1, \dots, 4; \quad \gamma'_{ij} = \beta'_{ij}, \quad j=1, 2; \\ \gamma'_{ij} &= \beta'_{ij}, \quad j=3, 4; \quad \gamma'_{ij} = 0, \quad j=3, 4; \quad \gamma'_{ij} = 0, \quad j=1, 2. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $\beta'_{pq}$  - элементы соответствующих характеристических определителей для случая жесткого сцепления слоев из второй главы. Причем, в результате сравнения полученного характеристического определителя с характеристическим определителем пространственной осесимметричной задачи (которая также была решена в ходе настоящего исследования) сделан вывод о их совпадении при замене параметров волнообразования, что позволяет представлять результаты в единой форме для указанных задач.

При решении плоской задачи для тех же типов композитов показано, что при определенных заменах индексов в компонентах  $\tilde{\alpha}$  и  $\tilde{\omega}$  и параметров  $\tilde{\xi}_j$  характеристический определитель плоской задачи можно получить из решения пространственной задачи, что является аналогичным результатам второй главы для жесткого сцепления слоев. Однако, при нелинейных определяющих уравнениях не всегда можно представить в единой форме числовые значения КПН в указанных задачах (в качестве примера

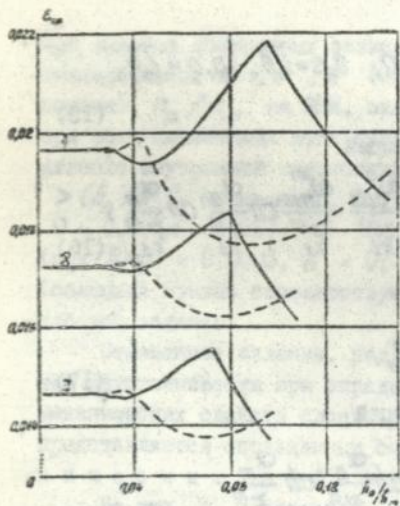


Рис. 5

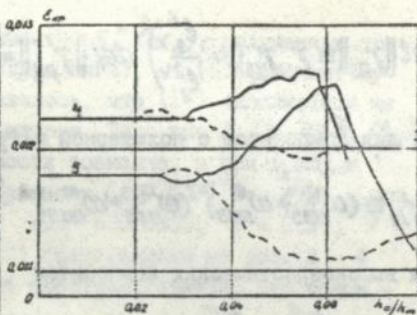


Рис. 6

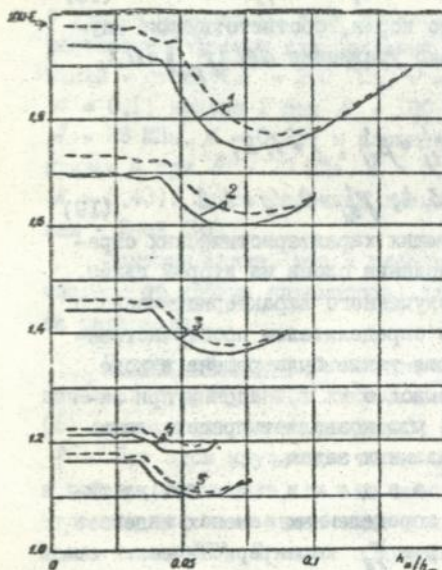


Рис. 7

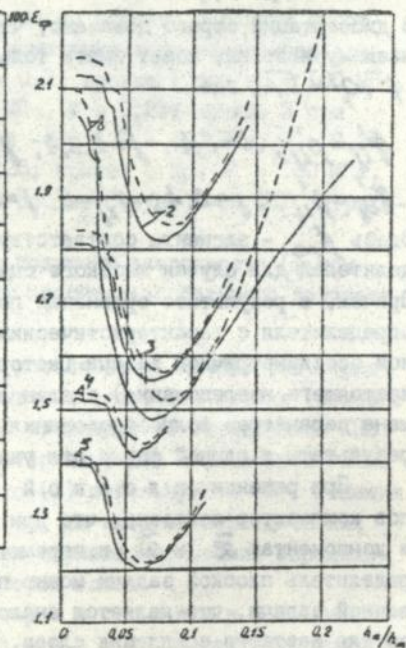


Рис. 8

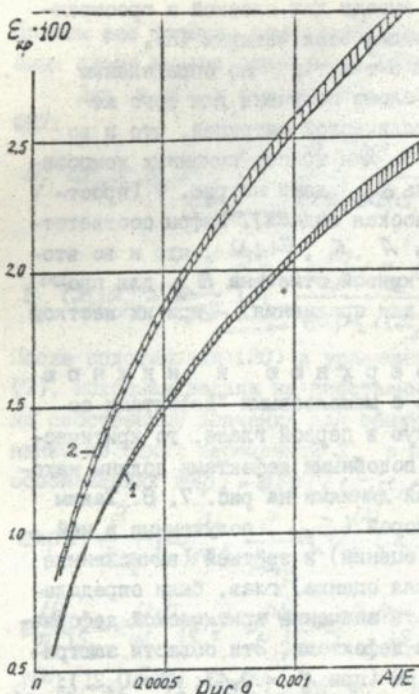


Рис. 9

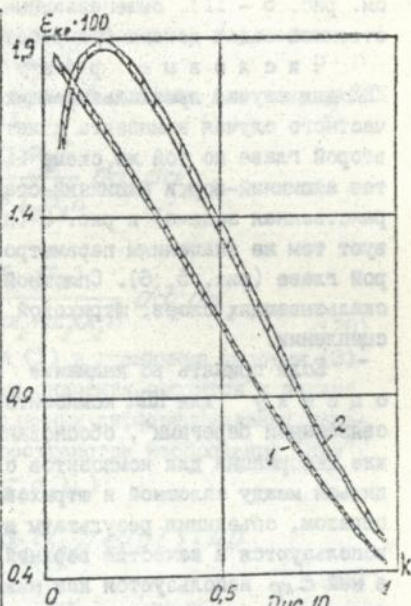


Рис. 10

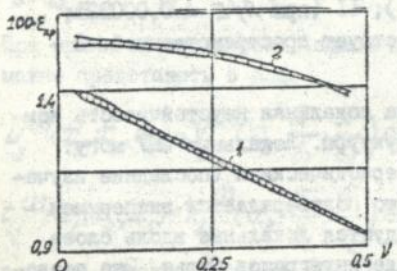


Рис. 11

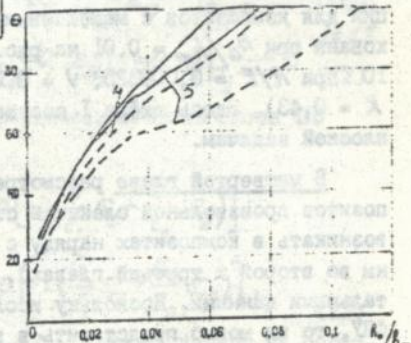


Рис. 12

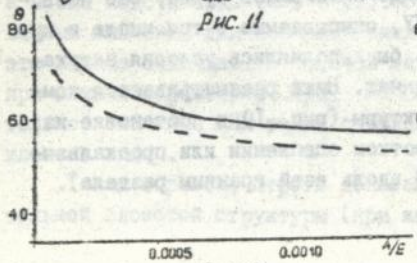


Рис. 15

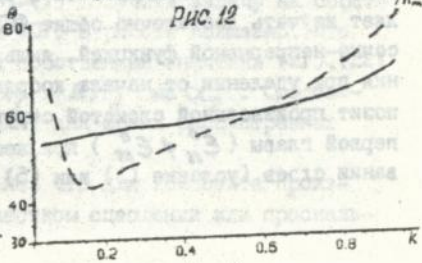


Рис. 14

ЛНБ ім. В. Стефаника  
АН України

см. рис. 5 - II). Вышеназванные выводы для плоской и пространственной задач доказаны в работе для всех четырех ФПУ.

Числовые результаты по определению КРН для случая проскальзывающих слоев получены для того же частного случая композита с металлической матрицей, что и во второй главе по той же схеме (I3). Для конструкционных композитов алюминий-бор и алюминий-сталь  $\epsilon_{кр}$  дана на рис. 7 (пространственная задача) и рис. 8 (плоская задача). Цифры соответствуют тем же значениям параметров  $A, K, E, \nu$ , что и во второй главе (рис. 5, 6). Сплошной кривой отмечена  $\epsilon_{кр}$  для проскальзывающих слоев, штриховой (для сравнения) - при их жестком сцеплении.

Если принять во внимание верхнюю и нижнюю оценку для КРН композитов с межслоевыми "дефектами со связанными берегами", обоснованную в первой главе, то критические деформации для композитов с подобными дефектами должны находиться между сплошной и штриховой линиями на рис. 7, 8. Таким образом, объединив результаты второй ( $\epsilon_{кр}$ , полученные в ней используются в качестве верхней оценки) и третьей (вычисленные в ней  $\epsilon_{кр}$  используются как нижняя оценка) глав, были определены области, в которых может лежать значение критической деформации для композитов с межслоевыми дефектами. Эти области заштрихованы при  $h_a/h_m = 0,01$  на рис. 9 (при  $K = 0,43; \nu = 0,21$ ); I0 (при  $A/E = 0,000325; \nu = 0,21$ ); II (при  $A/E = 0,000325; K = 0,43$ ). Здесь цифра I соответствует пространственной, 2 - плоской задачам.

В четвертой главе рассмотрена локальная неустойчивость композитов произвольной слоистой структуры. Локальные ФПУ могут возникать в композитах наряду с периодическими (последние изучены во второй и третьей главах), что подтверждается экспериментальными данными. Поскольку исследуются локальные вдоль слоев ФПУ, то их можно представить в виде интегралов Фурье. Это позволяет изучать достаточно общие ФПУ, описываемые в том числе и кусочно-непрерывной функцией, лишь бы выполнялись условия затухания при удалении от начала координат. Ниже рассматривается композит произвольной слоистой структуры (рис. I) в постановке из первой главы ( $\epsilon_{II}^0 \neq \epsilon_{III}^0$ ) при жестком сцеплении или проскальзывании слоев (условие (3) или (5) вдоль всей границы раздела).

Причем все формулы приведены для сжимаемых слоев, для несжимаемых слоев анализ проводится аналогично.

Для пространственной задачи для локальных ФПУ:

$$U_j^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_j^{(k)}(x_3, \alpha_1, \alpha_2)}{\exp[i(x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2)]} d\alpha_1 d\alpha_2;$$

$$\pm_{ij}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon_{ij}^{(k)}(x_3, \alpha_1, \alpha_2)}{\exp[i(x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2)]} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (20)$$

После подстановки (20) в уравнения (I) и граничные условия (3)-(7), исходная задача на собственные значения сводится к задаче на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений по одной переменной  $x_3$  в пространстве изображений (при обозначениях  $\exp I = \exp[i(x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2)]$ ):

$$\exp I \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \omega_{ij\alpha\beta}^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_3} (\sigma_\alpha^{(k)}(x_3, \alpha_1, \alpha_2) / \exp I) \right] = 0; \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zi}^{(k)}|_{S_c} = \varepsilon_{zi}^{(k+1)}|_{S_c}; \quad \sigma_i^{(k)}|_{S_c} = \sigma_i^{(k+1)}|_{S_c}; \quad \varepsilon_{zz}^{(k)}|_{S_c} = \varepsilon_{zz}^{(k+1)}|_{S_c}; \quad i = \bar{1, 2}; \\ \sigma_s^{(k)}|_{S_{se}} = \sigma_s^{(k+1)}|_{S_{se}}; \quad \varepsilon_{sj}^{(k)}|_{S_{se}} = 0; \quad \varepsilon_{sj}^{(k+1)}|_{S_{se}} = 0; \quad \varepsilon_{zi}|_{S_r} = 0; \quad \sigma_i|_{x_3 \rightarrow -\infty} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

При принятой постановке задачи периодические вдоль слоев ФПУ можно представить в виде

$$U_j^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = V_j^{(k)}(x_3, \frac{\pi}{\ell_1}, \frac{\pi}{\ell_2}) \exp[-i(\frac{\pi}{\ell_1} x_1 + \frac{\pi}{\ell_2} x_2)];$$

$$\pm_{ij}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) = R_{ij}^{(k)}(x_3, \frac{\pi}{\ell_1}, \frac{\pi}{\ell_2}) \exp[-i(\frac{\pi}{\ell_1} x_1 + \frac{\pi}{\ell_2} x_2)]. \quad (23)$$

а после подстановки (23) в (I), (3)-(7) получить задачу на собственные значения для периодических ФПУ. В работе показано, что эта задача совпадает с задачей на собственные значения (21), (22) при замене параметров  $\pi/\ell_1$  на  $\alpha_1$  и  $\pi/\ell_2$  на  $\alpha_2$ . Следовательно, значения КРН также совпадают для обоих рассмотренных классов задач.

Таким образом, строго доказано, что для композита произвольной слоистой структуры (при жестком сцеплении или проскаль-

звании без трения слоев) КРН для локальной (представимой в виде интегралов Фурье) и периодической вдоль слоев ФПВ совпадают. Это справедливо как для сжимаемых, так и для несжимаемых, упругих или упругопластических слоев.

В диссертационной работе исследована также плоская задача для локальных ФПВ. В этом случае представления имеют вид

$$u_i^{(k)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\ell}} \int_{-\infty}^{+\infty} u_i^{(k)}(x_2, \alpha_1) \exp(-i x_1 \alpha_1) d\alpha_1;$$

$$t_{ij}^{(k)}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\ell}} \int_{-\infty}^{+\infty} e_{ij}^{(k)}(x_2, \alpha_1) \exp(-i x_1 \alpha_1) d\alpha_1 \quad (24)$$

После анализа полученных задач на собственные значения для локальных и периодических ФПВ доказано то же утверждение о совпадении КРН, что и для пространственной задачи.

Следовательно, числовые результаты в пространственных и плоских задачах устойчивости композитов при сжатии вдоль слоев достаточно получать для одной из задач - либо для периодических вдоль слоев ФПВ, либо для локальных ФПВ, т.к. в силу доказанных утверждений они автоматически распространяются и на другую задачу. Так, вычисленные во второй и третьей главах значения критической деформации для периодических ФПВ в равной мере справедливы и для локальных ФПВ (см. рис. 2 - II).

В пятой главе проводится обоснование континуальной теории разрушения слоистых композитов при сжатии.

Отметим, что исходя из результатов, полученных для композитов с идеальным контактом слоев в предыдущих главах, можно провести ряд важных исследований. Так, широкое распространение континуальной теории разрушения в связи со значительным упрощением решения задач в ее рамках делает весьма актуальным исследование ее точности. Как известно, континуальное приближение применимо, если характерный размер рассматриваемого явления (в данном случае это  $\ell$  - длина поперечной ФПВ) значительно больше характерного размера структуры материала (в данном случае толщина слоя  $h$ ). Тогда материал считается однородным анизотропным с приведенными постоянными. Подход же, основанный на модели кусочно-однородной среды (он используется в настоящей работе) свободен от подобных ограничений и является наиболее точным. Если результаты

континуальной теории следуют из результатов, полученных в рамках модели кусочно-однородной среды, то данная континуальная теория называется асимптотически точной. До сих пор оценки точности континуальной теории, с точки зрения модели кусочно-однородной среды, проводились лишь для задач статики и задач о распространении упругих волн (Рытов, Бреховских) и отсутствуют для явления потери устойчивости в структуре композита. Изучение точности континуальной теории в вышеуказанном смысле проведено в диссертации для всех трех рассматриваемых типов композитов.

В случае пространственной задачи для композитов, состоящих из чередующихся слоев наполнителя и связующего, характеристические определители получены во второй главе. Согласно вышеприведенным рассуждениям, для перехода к континуальной теории в этих определителях необходимо положить

$$2(h_0 + h_m) = h \ll \ell = 1 / \sqrt{\rho_1^{-2} + \rho_2^{-2}} \implies \alpha_{0,m} \frac{\mathcal{E} h_{0,m}}{\ell} \rightarrow 0 \quad (25)$$

и выполнить предельный переход.

Для композитов с полимерной матрицей в результате указанной процедуры показано, что 2-ая и 4-ая ФУ в континуальном приближении не дают корней, соответствующих рассматриваемому явлению. Уравнения же для 1-ой и 3-ей ФУ приобретают вид (26), (27)

$$(\xi_2^{a-2} - \xi_3^{a-2}) (\xi_2^{m-2} - \xi_3^{m-2}) \omega_{111}^a \omega_{111}^m (\omega_{133}^a + \omega_{1313}^a) (\omega_{133}^m + \omega_{1313}^m) \times \\ \times ((h_m h_a^{-1} \omega_{3113}^a + \omega_{3113}^m) (\omega_{1331}^a + h_m h_a^{-1} \omega_{1331}^m) - h_m h_a^{-1} (\omega_{1313}^a - \omega_{1313}^m)^2) = 0; \quad (26)$$

$$(\xi_2^a \xi_3^a \xi_2^m \xi_3^m)^{-1} (\xi_2^{a-2} - \xi_3^{a-2}) (\xi_2^{m-2} - \xi_3^{m-2}) \omega_{3113}^a \omega_{3113}^m (\omega_{1333}^a + \omega_{1313}^a) \times \\ \times (\omega_{1333}^m + \omega_{1313}^m) ((\omega_{111}^a + h_m h_a^{-1} \omega_{111}^a) (\omega_{3333}^m + h_m h_a^{-1} \omega_{3333}^m) + h_m h_a^{-1} (\omega_{1133}^a - \omega_{1133}^m)^2) = 0 \quad (27)$$

Из (26) для случая хрупкого разрушения (оно происходит при малых докритических деформациях и, следовательно, может быть исследовано в рамках второго варианта теории малых докритических деформаций ТЛТУДТ) в диссертации получено, что  $\langle \sigma_{11}^0 \rangle = \langle G_{13} \rangle$ . Это совпадает с известным результатом континуальной теории хрупкого разрушения слоистых композитов при сжатии ( $\langle \sigma_{11}^0 \rangle$  - приведенное напряжение для композита,  $\langle G_{13} \rangle$  - приведенный модуль сдвига).

Уравнение же (27) дает

$$-\langle \sigma_{II}^0 \rangle = \langle A_{II} \rangle + S_m S_0 (A_{13}^0 - A_{13}^m)^2 (A_{33}^m S_0 + S_m A_{33}^0)^{-1} \langle A_{II} \rangle + \langle G_{13} \rangle. \quad (28)$$

Следовательно, континуальное приближение соответствует I-ой ФПУ.

Для высокоэластических компози- тов при условии (25) показано, что в общем случае 2-ая, 3-я и 4-ая ФПУ не дают корней, соответствующих физическому смыслу рассматриваемого явления. Из характеристического определителя для I-ой ФПУ получено уравнение

$$\left( \xi_2^{a-2} - \xi_3^{a-2} \right) \chi_{\xi_2}^{-m-2} \chi_{\xi_3}^{-m-2} \chi_{\xi_1}^{-1} \left( \frac{S}{V} \right)^2 \left[ \frac{h}{h_0} (\omega_{113}^m - \omega_{113}^a)^2 - (\omega_{131}^m + \frac{h}{h_0} \omega_{131}^m) \chi_{\xi_2}^{-m} \chi_{\xi_3}^{-m} + \frac{h}{h_0} \omega_{113}^a \right] = 0 \quad (29)$$

из которого, после ряда преобразований, следует  $\langle S_{II}^0 \rangle = -\langle \mu_{13} \rangle / \lambda_1^4$ , что совпадает с результатами континуальной теории (где  $\langle S_{II}^0 \rangle$  - приведенные обобщенные напряжения).

Для композитов с металлической матрицей 2-ая и 4-ая ФПУ также не описывают исследуемое явление в континуальном приближении. Это доказано при условии (25). При этом для I-ой и 3-ей ФПУ получены уравнения, соответственно, (30), (31):

$$\left( \xi_2^{a-2} - \xi_3^{a-2} \right) \chi_{\xi_2}^{-m-1} \chi_{\xi_3}^{-m-1} \text{Re} \xi_2^m \text{Im} \xi_2^m \omega_{111}^a (\omega_{1133}^a + \omega_{1313}^a) \left[ \frac{h^2}{h_0^2} \omega_{1115}^a \omega_{1351}^m + \frac{h}{h_0} \omega_{1351}^m (\omega_{1351}^m - \omega_{1315}^a + 2\omega_{1315}^a \omega_{1315}^m + \omega_{1115}^a \omega_{1331}^a - \omega_{1315}^a) + \omega_{1311}^a \omega_{1115}^m \right] = 0. \quad (30)$$

$$\left( \xi_2^{a-2} - \xi_3^{a-2} \right) \chi_{\xi_2}^{-m-1} \chi_{\xi_3}^{-m-1} \text{Re} \xi_2^m \text{Im} \xi_2^m \omega_{1113}^a (\omega_{1133}^a + \omega_{1313}^a) \chi_{\xi_2}^{-1} \chi_{\xi_3}^{-1} (\omega_{1351}^m \omega_{1115}^m)^{1/2} \times \times \left[ \frac{h^2}{h_0^2} \omega_{1335}^a + \frac{h}{h_0} (2\omega_{1135}^a + \omega_{1111}^m + \omega_{1335}^m - 2\omega_{1133}^m) + \omega_{1111}^a \right] = 0. \quad (31)$$

После ряда преобразований, уравнение (30) дает результат, совпадающий с результатами континуальной теории пластического разрушения ( $\langle \sigma_{II}^0 \rangle = -\langle \mu_{13} \rangle$ ). В то же время, из (31) для 3-ей ФПУ в длинноволновом приближении доказана оценка, аналогичная (28).

Таким образом, в рамках пространственной неосесимметричной задачи, в работе доказано, что континуальная теория разрушения слоистых композитов является асимптотически точной, а ее результаты следуют в качестве длинноволнового приближения из результатов, полученных в рамках модели кусочно-однородной среды для I-ой ФПУ. Это справедливо для всех трех рассматриваемых типов композитов.

Аналогичные исследования были проведены и для плоской

задачи для тех же типов композитов. При этом также была строго доказана справедливость вышеприведенного вывода.

Числовые результаты по оценке точности континуальной теории, следовательно, можно получить, сравнив величину критической деформации, вычисленную в рамках модели кусочно-однородной среды во второй главе (I4), с величиной  $\epsilon_{к.т.}$ , вычисленной из первой ФУ при (25) тоже в рамках модели кусочно-однородной среды. В качестве примера в работе рассмотрен тот же композит с металлической матрицей, что и во второй и третьей главах, для которого получены многочисленные зависимости относительной точности континуальной теории  $\theta = \epsilon_{кр.} / \epsilon_{к.т.} \cdot 100\%$  от свойств материала. Часть из них приведена на рис. 12-14. А именно: на рис. 12 - для композита алюминий-бор (цифры соответствуют тем же значениям параметров, что и на рис. 5-8); а также при  $h_a/h_m = 0,02$ : на рис. 13 - при  $K = 0,43$ ;  $\nu = 0,21$ ; на рис. 14 - при  $A/E = 0,001$ ;  $\nu = 0,21$ . Сплошная линия обозначает пространственную задачу, штриховая - плоскую.

В шестой главе исследуется плоская задача устойчивости композитов при сжатии вдоль межслоевых трещин. Рассматривается произвольная слоистая структура (рис. 1) в постановке первой главы - уравнения (1), (2) с граничными условиями (3), (4), (6), (7). В зависимости от соотношения между длинами трещин и толщинами слоев предложена классификация постановок задач - для макротрещин, структурных трещин и микротрещин. Наиболее общий случай - это макротрещины, т.е. трещины, длины которых сравнимы или превосходят толщины слоев (рис. 1). Микротрещинами названы трещины, длины которых значительно меньше толщин слоев, на границе которых они находятся. Для микротрещин можно ввести упрощение и рассматривать устойчивость более простой структуры-двух полуплоскостей с теми же трещинами на границе (рис. 15). Если же трещины не являются микротрещинами, а в структуре есть слои, лежащие выше и ниже трещин, но не соседние с ними, такие, что их толщины значительно больше длин трещин, имеет место случай структурных трещин. При этом вместо первоначальной структуры можно исследовать устойчивость пакета слоев (при наличии тех же трещин) между двумя полуплоскостями, которыми заменяются слои большой толщины (рис. 16).

Для численного решения рассматриваемых задач в работе применялся метод конечных разностей. Слои при этом моделировались

сжимаемыми линейно-упругими телами. Была составлена разностная схема, имеющая первый порядок аппроксимации в сеточном аналоге нормы пространства  $C$ . Разностные операторы получены вариационно-разностным способом. Причем, как предложено в работах Ю.В.Коханенко, операторы записывались в углох ячеек сетки, что позволило представлять их единообразно для любой слоистой области с трещинами. При решении сеточных уравнений использовался градиентный итерационный метод нахождения минимального собственного числа разностной задачи на собственные значения.

Численное решение состояло из следующих этапов: а) введение разностной сетки с неравномерным по обоим направлениям шагом; б) установление в результате численного эксперимента относительных размеров области, покрытой сеткой, и трещин, обеспечивающих выполнение условий затухания (7); в) непосредственное решение задачи на последовательности сеток. Причем на этапах б) (при увеличении относительных размеров области разбивки и трещин) и в) (при сгущении сетки в два раза) контролировалось совпадение результатов с точностью до трех значащих цифр. Практическая реализация метода осуществлена комплексом программ, составленных на языке  $PL/I$ , время счета одной задачи на ЭЕМ ЕС 10-66 составляло 10-50 минут в зависимости от типа трещин, при этом использовались сетки, имеющие до 25951 узла.

Исследования проводились как для изотропных, так и для ортотропных слоев. В качестве примера последних взят так называемый композит с продольно-поперечной укладкой слоев, каждый из которых состоит из матрицы, армированной непрерывными параллельными волокнами (направления армирования в соседних слоях взаимноперпендикулярны). Причем размеры структурных элементов внутри слоя таковы, что каждый из слоев считался однородным ортотропным телом со своими приведенными постоянными, вычисленными по формулам Л.П.Хорошуна. Для каждого из расположений трещин вычисления проводились для основных видов конструкционных материалов подобной структуры, т.е. для случаев алюмоборосиликатного  $E$ -стекла (Пирекс), высокомодульного  $M$ -стекла, ароматического полиамидного (арамидного) органического волокна Кевлар-49, углеродного волокна Торнел-300, борных волокон Avco и Hamilton Ltd. division в эпоксидных, полиэфирных, кремнийорганических, фенолформальдегидных матрицах. Осуществлялось также сравнение результатов ра-

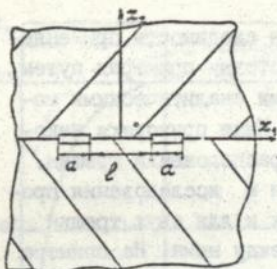


Рис. 15

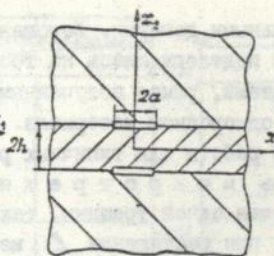


Рис. 16

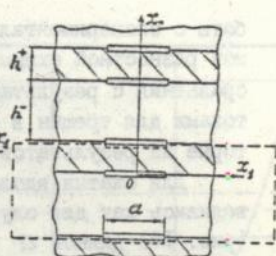


Рис. 17

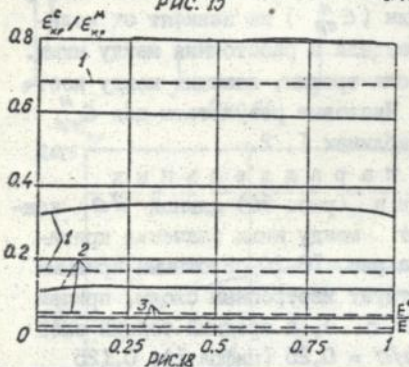


Рис. 18

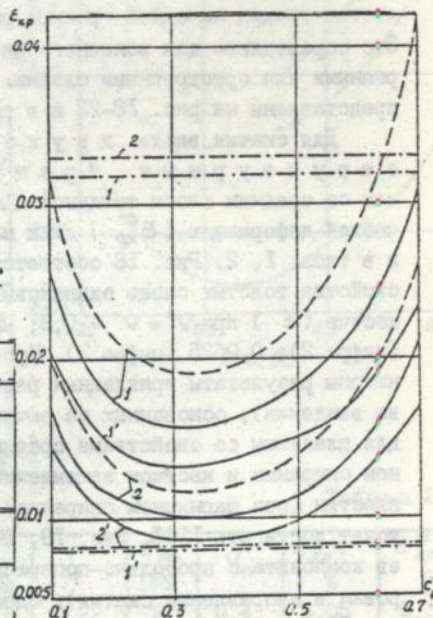


Рис. 20

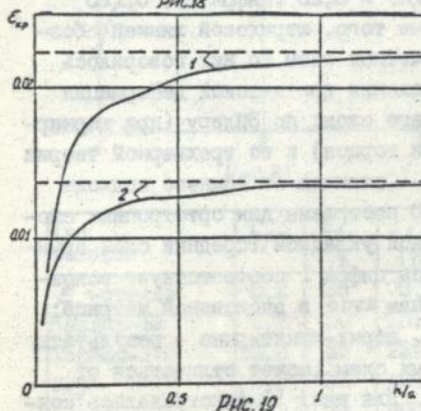


Рис. 19

Таблица I.

Тип волокон	$h^*/a$	$h/a$	$C_f, \%$	$E_f, \text{ГПа}$	$\nu_f$	$E_m, \text{ГПа}$	$\nu_m$	$\epsilon_{кр}, \%$	$\epsilon_{кр}^m, \%$	$\epsilon_{кр}^m, \%$
Бор	0,5	I	50	400	0,21	2	0,4	I,00	I,30	I,37
Торнел-300	0,5	I	50	239	0,2	2	0,4	I,76	2,10	2,26

боты с экспериментальными данными. Хорошая сходимость применяемой разностной схемы подтверждалась на тестовых примерах путем сравнения с результатами, ранее полученными аналитическими методами для трещин в однородном материале. Ниже приводятся некоторые из результатов работы для типичных расположений трещин.

Для сжатия вдоль микро трещин исследования проводились как для случая одной трещины, так и для двух трещин (рис. 15) длиной  $a$  при растяжении  $\ell$  между ними. На примере вычислений при разнообразных  $\ell$  показано, что критические деформации при сжатии вдоль микротрещин ( $\epsilon_{кр}^H$ ) не зависят от количества трещин на одной границе раздела и расстояния между ними. Это справедливо для конечного числа трещин, лежащих между изотропными или ортотропными слоями. Числовые результаты для  $\epsilon_{кр}^H$  представлены на рис. 18-22 и в таблицах 1, 2.

Для сжатия вдоль двух параллельных структурных трещин (рис. 16) длиной  $2a$  каждая со средним слоем толщиной  $2h$  между ними значения критической деформации ( $\epsilon_{кр}^C$ ) даны на рис. 18-20 сплошными кривыми и в табл. 1, 2. Рис. 18 соответствует изотропным слоям, причем свойства толстых слоев одинаковы ( $\epsilon^*$ ), а средний тонкий слой жестче ( $\epsilon^-$ ) при  $\nu^+ = \nu^- = 0,3$ ;  $h/a = 0,25$  (цифра 1); 0,125 (цифра 2); 0,0625 (цифра 3). Кроме того, штриховой линией обозначены результаты прикладных расчетных схем (о них говорилось во введении), основанных на вычислении критической деформации для пластины со свойствами среднего слоя: по Эйлеру (при шарнирном опирании и жестком закреплении торцов) и по трехмерной теории пластин (при шарнирном опирании) - отличие от точного подхода может достигать 112%. Рис. 19, 20 построены для ортотропных слоев композита с продольно-поперечной укладкой (средний слой армирован в направлении сжатия). Здесь цифра 1 соответствует волокнам Торнел-300; 2 - борным волокнам Avco в эпоксидной матрице; штриховые линии обозначают  $\epsilon_{кр}^H$ , штрих-пунктирные - результаты вышеуказанных прикладных расчетных схем (может отличаться от точного подхода в несколько раз). Для рис. 19 фиксировалась концентрация волокон  $C_f = 50\%$ , для рис. 20 -  $h/a = 0,2$  (цифры без штрихов) и 0,1 (цифры со штрихами).

Для сжатия вдоль периодической системы параллельных макротрещин длиной  $a$  каж-

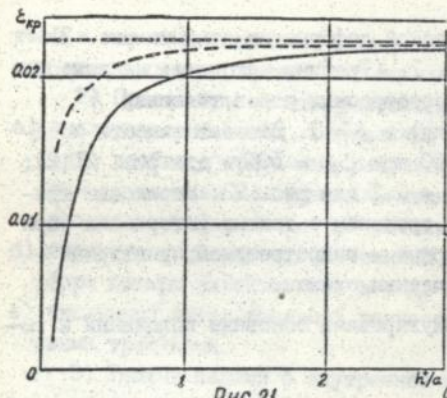


Рис. 21

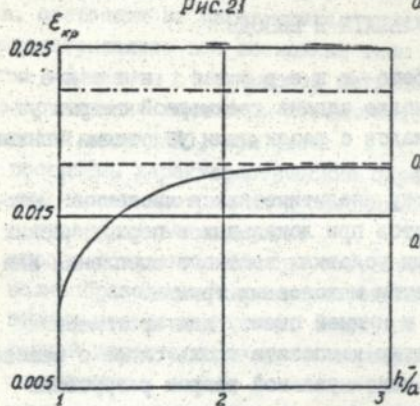


Рис. 22

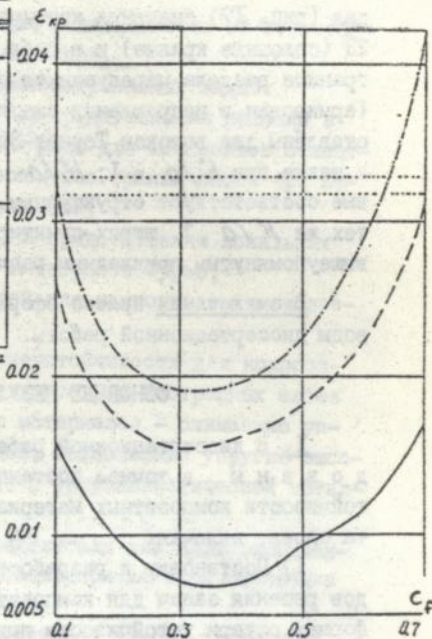


Рис. 23

Таблица 2.

Тип волокон	$h/a$	$C_f$ , %	$E_f$ , ГПа	$\nu_f$	$E_m$ , ГПа	$\nu_m$	$\epsilon_{кр}^c$ , %	$\epsilon_{кр}^m$ , %
E-стекло	0,2	35	73,5	0,22	2	0,4	4,05	5,59
Кевлар-49	0,2	50	131	0,2	2	0,4	2,99	3,92
Торнел-300	0,2	50	239	0,2	2	0,4	1,81	2,26
Бор	0,2	35	400	0,21	2	0,4	1,00	1,16
	0,2	50	400	0,21	2	0,4	1,13	1,37
	0,2	50	403	0,21	2,8	0,4	1,53	1,89
	0,2	50	403	0,21	4	0,4	2,11	2,62
	0,1	50	400	0,21	4	0,4	1,72	2,62
	0,5	50	400	0,21	4	0,4	2,46	2,62

дая (рис. 17) значения критической деформации даны на рис. 21-23 (сплошные кривые) и в табл. I. (Трещины находятся на каждой границе раздела чередующихся ортотропных слоев толщиной  $h^+$  (армирован в направлении сжатия) и  $h^-$ ). Все зависимости представлены для волокон Торнел-300 при  $C_f = 50\%$  - для рис. 21, 22; а также при  $h^-/a = 1$ ;  $h^+/a = 0,2$  для рис. 23. Штриховые кривые соответствуют структурным трещинам в тех же материалах (при тех же  $h^+/a$ ), штрих-пунктирные - микротрещинам, пунктирные - вышеупомянутым прикладным расчетным схемам.

В заключении кратко сформулированы основные положения и выводы диссертационной работы.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

I. В диссертационной работе впервые исследованы в точной постановке задачи трехмерной теории устойчивости композитных материалов с различными условиями контакта слоев, включая:

1) Постановку и разработку аналитических и численных методов решения задач для композитов при локальных и периодических формах потери устойчивости при условиях жесткого сцепления или проскальзывания слоев и с учетом межслоевых трещин.

2) Установление верхней и нижней оценок для критических параметров нагружения при сжатии композита вдоль слоев с межслоевыми дефектами; обоснование континуальной теории разрушения композитов исходя из точной постановки задачи.

3) Разработку комплекса программ с использованием метода конечных разностей для решения задач устойчивости композитов с межслоевыми трещинами.

4) Получение числовых результатов для конкретных композитных материалов, анализ закономерностей и механических эффектов.

II. Основные результаты работы заключаются в следующем:

1) Дана общая точная постановка (модель кусочно-однородной среды с использованием уравнений ТЛУДУТ) трехмерных задач устойчивости при сжатии композитов с различными условиями контакта слоев. При этом обоснована верхняя и нижняя оценки для критических параметров нагружения композитов с межслоевыми дефек-

тами и классификация постановок задач в зависимости от соотношения между длинами трещин и толщинами слоев.

2) Предложены методы решения рассматриваемых задач:

- а) аналитический метод, основанный на представлении решений в виде двойного тригонометрического ряда для композитов с жестким сцеплением или проскальзыванием без трения слоев при периодических формах потери устойчивости;
- б) аналитический метод, основанный на представлении локальных форм потери устойчивости в виде интегралов Фурье;
- в) численный метод конечных разностей для композитов с межслоевыми трещинами.

3) Решены задачи о внутренней неустойчивости для композитов, состоящих из чередующихся трансверсально-изотропных слоев (рассматривались все возможные типы материалов - сжимаемые упругие композиты с полимерной матрицей, несжимаемые упругие высокоэластические композиты и композиты с упругопластической металлической матрицей), при этом:

- а) построены характеристические определители для пространственных неосесимметричных и плоских задач при жестком сцеплении и проскальзывании слоев;
- б) строго доказано, что при соответствующей замене параметров волнообразования характеристические определители пространственных неосесимметричных задач не имеют корней, отличных от корней характеристических определителей пространственных осесимметричных задач; показаны замены, при которых характеристические уравнения пространственных задач переходят в уравнения плоских задач;
- в) разработан алгоритм и составлены программы на языке Фортран-4 нахождения критических деформаций для конкретной модели композита.

4) Строго доказано для композита произвольной слоистой структуры, что критические параметры нагружения для локальных (представимых в виде интегралов Фурье) и периодических вдоль слоев форм потери устойчивости совпадают.

5) Доказана асимптотическая точность континуальной теории разрушения слоистых композитов при сжатии, при этом:

- а) для всех рассматриваемых типов материалов показано, что результаты континуальной теории следуют в качестве длинноволно-

вого приближения из результатов для I-ой формы потери устойчивости в рамках модели кусочно-однородной среды;

б) получены числовые результаты, характеризующие точность континуальной теории для конкретной модели композита.

б) Решены задачи устойчивости композитов при сжатии вдоль межслоевых трещин, для чего:

а) составлена разностная схема, позволяющая исследовать задачи устойчивости для любой слоистой области с трещинами, практическая реализация которой осуществлена комплексом программ на языке  $PL/I$  ;

б) получены значения критических деформаций для характерных расположений трещин между изотропными и ортотропными линейно-упругими сжимаемыми слоями - микротрещин, двух параллельных структурных трещин, периодической системы параллельных макротрещин.

III. После анализа многочисленных числовых результатов были обнаружены новые механические эффекты и закономерности:

I) Выявлены новые механические эффекты, заключающиеся в том, что:

а) явление внутренней неустойчивости возможно не при всех значениях механических и геометрических характеристик слоистого композита (для конкретных материалов установлены пределы изменения параметров, при которых возможна внутренняя неустойчивость);

б) критические деформации не зависят от количества микротрещин, лежащих на одной границе раздела сжимаемых линейно-упругих ортотропных слоев, и расстояния между ними.

2) Отмечены следующие закономерности:

а) область значений относительной толщины слоев композита с упругопластической матрицей, при которых возможна внутренняя неустойчивость, увеличивается с увеличением  $A/E$  или уменьшением  $K$  и практически не зависит от  $\nu$  ;

б) внутренняя неустойчивость при жестком сцеплении или проскальзывании без трения слоев может наступать по I-ой или 2-ой формам в зависимости от свойств материала. Увеличение концентрации жесткого наполнителя в композитах с металлической матрицей может приводить как к увеличению, так и к уменьшению

критической деформации, которая увеличивается с увеличением  $A/E$  и уменьшением  $\nu$  и может немонотонно зависеть от  $K$  ;

- в) отличие верхней и нижней оценок для критических деформаций композитов с межслоевыми дефектами применительно к композициям с металлической матрицей не превышает 3+5% для пространственной, а при  $h_a/h_m < 0,15$  и для плоской задачи, что делает предложенную оценку вполне приемлемой (особенно для инженерных расчетов);
- г) точность континуальной теории для композитов с металлической матрицей выше для пространственной, чем для плоской задачи, она уменьшается с увеличением  $A/E$  , немонотонно зависит от  $K$  (для плоской задачи) и практически не зависит от  $\nu$  . При этом при небольших концентрациях наполнителя ( $h_a/h_m < 0,2$ ) результаты континуальной теории могут отличаться в несколько раз от полученных в рамках точной постановки;
- д) взаимодействие двух параллельных структурных трещин может снижать значение критической деформации (по сравнению со случаем микротрещины) более, чем на порядок. Но при расстоянии между ними большем, чем их длина, взаимовлияние не сказывается (отличие не более 1%). Причем прикладные расчетные схемы не описывают рассматриваемое явление даже на качественном уровне и отличаются от полученных точных результатов в несколько раз;
- е) взаимодействие трещин в периодической системе параллельных межслоевых микротрещин может приводить к снижению критической деформации более чем в два раза по сравнению со случаем двух параллельных структурных трещин. Однако при толщинах слоев в два раза больших, чем длина трещин, отличие не превосходит 1%. Прикладные расчетные схемы и в этом случае не описывают рассматриваемое явление даже на качественном уровне и вносят существенные (в несколько раз) количественные погрешности.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах автора:

1. Пространственные неосесимметричные задачи теории устойчивости слоистых высокоэластических композитных материалов // Прикл. механика.- 1989.- 25, № II.- С. 26-31.
2. Пространственные неосесимметричные задачи теории устойчивости

- композитных материалов с металлической матрицей // Прикл. механика.- 1989.- 25, № 12.- С. 35-41.
3. О континуальном приближении в пространственных неосесимметричных задачах теории устойчивости слоистых сжимаемых композитных материалов // Прикл. механика.- 1990.- 26, № 3.- С. 23-27.
  4. Исследование устойчивости слоистых композитных материалов с алюминиевой матрицей // Прикл. механика.- 1990.- 26, № 5.- С. III-III4.
  5. О применимости континуальной теории разрушения слоистых композитных материалов с металлической матрицей (пространственная задача) // Прикл. механика.- 1990.- 26, № 6.- С. II2-II5.
  6. О внутренней неустойчивости слоистых композитов с металлической матрицей // Механика композит. материалов.- 1990.- № 6.- С. I05I-I056.
  7. Исследование локальной потери устойчивости слоистых несжимаемых композитных структур // Механика композит. материалов.- 1991.- № 1.- С. 3I-39.
  8. Локальная неустойчивость слоистых сжимаемых композитов (пространственная задача) // Изв. АН СССР. МТТ.- 1991.- № 2.- С. 49-56.
  9. Асимптотическая точность континуальной теории внутренней неустойчивости слоистых композитов с несжимаемой матрицей // Прикл. механика.- 1991.- 27, № 7.- С. 62-68.
  10. Влияние механических характеристик слоев на внутреннюю неустойчивость композита // Прикл. механика.- 1991.- 27, № 12.- С. II0-II4.
  - II. Плоская задача устойчивости композита с проскальзывающими слоями // Механика композит. материалов.- 1991.- № 5.- С. 845-850.
  12. Оценка критических параметров нагружения для композитов с неполным контактом слоев // Прикл. механика.- 1992.- 28, № 5.- С. 22-27.
  13. Устойчивость композита при сжатии вдоль трещины на границе раздела слоев // ДАН.- 1992.- 325, № 3.- С. 455-458.
  14. Устойчивость композитных материалов с межслойными трещинами // Механика композит. материалов.- 1992.- № 5.- С. 603-608.
  15. Устойчивость композита при сжатии вдоль двух микротрещин на

- границе раздела слоев // ДАН.- 1993.- 328, № 4.- С. 437-439.
16. Внутренняя неустойчивость слоистого массива с металлической матрицей при проскальзывании слоев // Изв. РАН. МТТ.- 1993.- № I.- С. 89-95.
  17. О расчетных схемах в трехмерной теории устойчивости (модель кусочно-однородной среды) для композитов с трещинами между слоями // Прикл. механика.- 1993.- 29, № 4.- С. 31-38.
  18. Композиты с межслойными трещинами: устойчивость при сжатии вдоль двух микротрещин между ортотропными слоями // Механика композит. материалов.- 1993.- № 6.- С. 791-798.
  19. Об устойчивости композита, образованного продольно-поперечной укладкой слоев, с трещиной на границе раздела // Прикл. механика.- 1993.- 29, № II.- С. 53-56.
  20. Investigation of local forms of stability loss in laminated composites (three-dimensional problem) // Proc. of the Ninth Int. Cong. on Composite Materials (Madrid, 12-16 July, 1993).- Vol.6. Composite properties and applications.- P. 377-383.

Результаты диссертации также вошли в сборники трудов всех конференций, школ и симпозиумов, перечисленных на стр. 5.

Подписано к печати 13.05.1994 г. Формат 60x84/16  
Бумага офсетная Усл.-печ. лист, 2,0. Уч.-изд. лист 2,0.  
Тираж 100. Заказ 249.

Полиграф. уч-к Института электродинамики АН Украины,  
252057, Киев-57, проспект Победы, 56.

458026

AB 30.307

**AB 30.307**