Міністерство освіти України
Київський університет ім. Тараса Шевченка

На правах рукопису

Медведев Георгій Сергійович

УДК 519.632

ЕФЕКТИВНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ СПЕКТРАЛЬНИХ ЗАДАЧ

01.01.07 - обчислювальна математика

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Київ

1994

Робота виконана на кафедрі обчислювальної математики факультету кібернетики Київського університету ім. Тараса Шевченка .

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор Приказчиков Віктор Георгійович.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор Ляшенко Ігор Миколаєвич,
кандидат фізико-математичних наук Хіміч Олександр Миколаєвич

Провідна організація: Інститут механіки АН України.

Захист відбудеться "28" 06. 1994 р. о 14 год. на засіданні спеціалізованої ради Д.068.18.16. в Київському університеті ім. Тараса Шевченка за адресою:

252127 Київ 127, проспект Академіка Глушкова, 6, факультет кібернетики, ауд. .

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Київського університету ім. Тараса Шевченка (вул. Володимирська, 58).

Автореферат розіслано "18". 05. 1994 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
кандидат фіз.-мат. наук,
доцент А.В.Кузьмін

І. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Багато науково-технічних проблем приводять до розв'язування задач на власні значення (в.з.) для еліптичних операторів. Вони виникають, наприклад, при обчисленні хвилеводів, резонаторів, пластин, оболонок, стержнів та інших конструкцій. Більшість практичних задач не піддаються аналітичному розв'язуванню, тому до них застосовують методи обчислювальної математики. При обранні та побудові алгоритмів наближеного розв'язку важливо, щоб вони мали достатню точність та були економічні. Підвищення точності може досягатися або шляхом збільшення порядку алгебраїчної задачі, або удосконаленням чисельного алгоритму. Зрозуміло, що обмежені можливості навіть сучасних обчислювальних машин роблять перший варіант не завжди прийнятним. А у спектральних задачах це посилюється ще і тим, що похибка дискретного аналогу збільшується разом з ростом номеру в.з.. Тому для таких задач особливо важливо правильно обрати метод розв'язування та застосовувати засоби підвищення точності. Ефективність чисельного розв'язування значно збільшується, якщо вдається врахувати властивості конкретного класу задач.

У теперішній час широко застосовуються методи, які використовують перехід від рівняннь для функцій, заданих в області, до рівняннь для функцій, заданих на внутрішніх та зовнішніх границях підобластей. Такий підхід до розв'язування різноманітних задач математичної фізики застосовується у методах декомпозиції області (Агошков В.І., Лебедєв В.І.), методах граничних елементів (Громадка II Т., Лей Ч.), методах часткових областей (Позняк Л.Т.), методі сумарних зображень (Положій Г.М., Ляшенко І.М.). Особливий практичний інтерес представляють методи отримання двосторонніх оцінок для в.з. (Вайнштейн А., Гулд С., Позняк Л.Т.).

Інформація про похибку чисельного методу важлива, тому що вона характеризує точність наближенних розв'язків та швидкість збіжності методу, а також у ряді випадків дозволяє визначити характер наближення дискретних в.з. до точних. Повне уявлення про похибку дає головний член розвинення похибки наближених в.з. по ступенях параметру дискретизації (Приказчиков В.Г.). Знання головного доданку похибки надає можливість уточнювати розв'язки, отримувати двосторонні оцінки та показує як треба збурювати схеми низького порядку точності для отримання більш високого порядку.

М е т а р о б о т и. Побудова та обгрунтування алгоритмів чисельного розв'язування спектральних задач для еліптичних операторів другого порядку. Дослідження похибки наближених методів. Отримання двосторонніх оцінок для в.з. .

Н а у к о в а н о в и з н а. Для рівняннь з кусково-сталими коефіцієнтами в областях, складених з прямокутників, отримано кусково-аналітичне подання розв'язку у вигляді рядів по власних функціях (в.ф.) допоміжних задач. На основі цього подання побудовано чисельний алгоритм, який зводить розв'язування задачі в області до рівняннь на границях прямокутних підобластей. Доведено збіжність цього чисельного методу, отримано оцінки похибки наближених в.з. до точних та швидкості збіжності. Показано, як за допомогою невеликого модифікування методу розв'язування, отримувати двосторонні оцінки в.з..

Чисельний метод реалізовано для задачі на в.з. для оператора Лапласа у L-подібній області та рівняннь з кусково-сталими коефіцієнтами у областях, складених з прямокутників.

Отримано головний доданок похибки дискретного в.з. різнецевої схеми для еліптичного оператору зі змінними коефіцієнтами четвертого порядку точності. Показано, як уточнювати в.з., обчислюючи поправку за допомогою схеми другого порядку точності.

П р а к т и ч н а ц і н н і с т ь. Досліджений у дисертації алгоритм може бути використований для обчислення неоднорідних хвилеводів, резонаторів та мембран складної форми.

А п р о б а ц і я р о б о т и. Результати дисертаційної роботи доповідалися на семінарах на кафедрах обчислювальної математики та обчислювальних методів математичної фізики факультету кібернетики Київського університету та відділу чисельних методів Інституту кібернетики АН України.

П у б л і к а ц і ї. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1-3].

С т р у к т у р а   т а   о б ' є м   р о б о т и. Дисертація складається із вступу, чотирьох параграфів, додатку та списку літератури. Робота містить   сторінок машинописного тексту.

II. ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі наводиться огляд основних робіт з досліджуваної теми, обгрунтовується актуальність та структура роботи, дається скорочений зміст дисертації .

У   п е р ш о м у   п а р а г р а ф і досліджується задача на в.з. для оператора Лапласа у L-подібній області

$$\Delta u + \lambda u = 0, \qquad x \in \Omega = \bigcup_{i=1}^{3} \Omega^i$$

$$u = 0, \qquad x \in \partial\Omega,$$

де $\Omega^1 = (0,1) \times (1,2), \Omega^2 = (0,1) \times (0,1), \Omega^3 = (1,2) \times (0,1)$.

Варіаційне формулювання цієї задачі складається у знаходженні таких пар $(\lambda, u), \lambda \in R^1, u \in \dot{W}_2^1(\Omega)/\{0\}$, які задовольняють інтегральній тотожності

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_\Omega uv dx \qquad \forall v \in \dot{W}_2^1(\Omega) \tag{1}$$

Існує послідовність позитивних в.з. задачі (1)

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \ldots, \qquad \lim_{k \to \infty} \lambda_k = \infty,$$

відповідних в.ф. $u_k, k = \overline{1,\infty}$, які складають повні системи у гільбертових просторах $L_2(\Omega)$ і $\dot{W}_2^1(\Omega)$.

В п.1 досліджується гладкість в.ф. та доводиться твердження про подання розв'язку. В.ф. u_k задачі (1) належать простору $\dot{W}_2^\alpha(\Omega), \alpha < 5/3$, а сліди в.ф. та їх нормальних похідних на γ_i $u_k|_{\gamma_i} \in \dot{W}_2^\beta(\gamma_i)$, $\partial u/\partial \nu|_{\gamma_i} \in W_2^{\beta-1}(\gamma_i)$, $i = 1, 2$, де $\beta = \alpha - 0.5$,

$$\gamma_1 = \{(x,y) | y = 1, \quad 0 \leq x \leq 1\}, \quad \gamma_2 = \{(x,y) | x = 1, \quad 0 \leq y \leq 1\}.$$

Нам будуть потрібними в.з. та в.ф. наступних допоміжних задач

$$\Delta e + \mu e = 0, \quad x \in \Omega^i, \tag{2}$$

$$e = 0, \quad x \in \partial\Omega^i, \quad i = 1,2,3. \tag{3}$$

Через $\{e_k^i | k = \overline{1,\infty}\}, i = 1,2,3$ позначимо ортонормовану в $L_2(\Omega^i)$ систему в.ф. задачі (2),(3), відповідних розміщеним у зростанні з урахуванням кратності в.з. $\Lambda^i = \{\mu_k^i | k = \overline{k,\infty}\}, i = 1,2,3$.

*Означення.*Функцію $\psi \in W_2^1(D), D \subset R^2$ будемо називати *гармонічною в області* D, якщо вона задовольняє тотожності

$$\int\limits_D \nabla\psi\nabla v dx = 0, \qquad \forall v \in \dot{W}_2^1(D).$$

Твердження 1

Нехай u *є в.ф. задачі (1), яка відповідає в.з.* λ, *тоді звуження* u *на* $\Omega^i, i = 1,2,3$ *надається у вигляді*

$$u^i = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^i e_k^i + \phi^i, \tag{4}$$

де

$$A_k^i = \begin{cases} \dfrac{\lambda \int\limits_{\partial\Omega_i} u \dfrac{\partial e_k^i}{\partial \nu} dx}{\mu_k^i(\lambda - \mu_k^i)}, & \text{якщо} \quad \lambda \neq \mu_k^i, \\ \text{деяка стала,} & \text{якщо} \quad \lambda = \mu_k^i, \end{cases}$$

ν *- вектор зовнішній нормалі ,*
ϕ^i *- гармонічна в* Ω^i *функція, яка дорівнює* u^i *на* $\partial\Omega^i$. *Ряд у (4) збігається рівномірно.*

Крім того, у випадку $\lambda \in \Lambda^i$ *виконуються рівності*

$$\int\limits_{\partial\Omega^i} u \frac{\partial e_k^i}{\partial \nu} dx = 0, k \in K_\lambda^i = \{l \in N | \mu_l^i = \lambda\}. \tag{5}$$

В п.2 на основі твердження 1 побудовано алгоритм наближеного розв'язування вихідної задачі.

Розвинемо сліди u на γ_i, $i = 1.2$ у ряди Фурьє по функціях $g_k^i(x_i) = sin(\pi k x_i)$ $k = \overline{1,\infty}$

$$u|\gamma_1 = \sum_{k=1}^{\infty} N_k sin(\pi k x_1), \quad u|\gamma_2 = \sum_{k=1}^{\infty} M_k sin(\pi k x_2),$$

де N_k, M_k– невизначені коефіцієнти.

Застосовуючі твердження 1, звуження u на Ω^i, $i = 1, 2, 3$ надаємо у вигляді рядів, коефіцієнти яких виражаються за допомогою N_k, M_k.

Далі вирази для u_i зшиваються по неперервності нормальних похідних на γ_1, γ_2, що дозволяє отримати рівняння для наближених в.з..

Спочатку досліджується випадок наближеного визначення $\lambda \notin \Lambda = \bigcup_{i=1}^{3} \Lambda^i$. Подання в.ф. підставляються у наступні умови узгодження

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} u^2(1, x_2) - \frac{\partial}{\partial x_1} u^3(1, x_2)\right] sin(\pi k x_2) dx_2 = 0 \quad ,$$
$$\int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x_2} u^1(x_1, 1) - \frac{\partial}{\partial x_2} u^2(x_1, 1)\right] sin(\pi k x_1) dx_1 = 0 \quad , k = \overline{1, n},$$

отримаємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (с.л.а.у.)

$$A^n(\lambda)(N_1 \dots N_n M_1 \dots M_n)^T = 0. \qquad (6)$$

Корні рівняння

$$det A^n(\lambda) = 0$$

приймаються за *наближені в.з.*.Після розв'язування с.л.а.у. (6) відносно $(N_1 \dots N_n M_1 \dots M_n)$ отримаємо кусково-аналітичний вираз *наближених в.ф.*.

Окремо досліджується належність $\lambda \in \Lambda$ до спектру задачі (1). Для цього будуються окремі рівняння, які використовують умови (5).

В п.3 для обгрунтування методу чисельного розв'язування доводиться його еквівалентність до проекційного. Побудовано простори $H_n \subset \dot{W}_2^1(\Omega)$ для яких виконується

Твердження 2.

Наближений розв'язок задачі (1) (λ_n, u_n) задовольняє тотожності

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla v dx = \lambda_n \int_\Omega u_n v dx \qquad \forall v \in H_n$$

та, навпаки, якщо для деякої функції $u_n \in H_n$ вірна ця тотожність, то (λ_n, u_n) є наближеним розв'зком задачі (1).

В п.4 оцінюється похибка наближеного розв'язку та швидкість збіжності алгоритму. Збіжність методів типа Гальоркіна - Рітца у спектральних задачах для еліптичних операторів добре досліджена (див., наприклад, роботи J.H.Bramble, G.Fix, J.E.Osborn). Похибка в.з. та в.ф. визначається похибкою інтерполяції в обраному просторі, в якому вирішується наближена задача

$$\varepsilon_n = \sup_u \quad \inf_v \frac{\|u - v\|_1}{\|u\|_1}, \quad u \in U(\lambda), \quad v \in H_n,$$

де

$\| \quad \|_1$ - норма у просторі $\dot{W}_2^1(\Omega)$,

$U(\lambda)$ - власний підпростір, відповідний λ .

Відоме наступне

Твердження 3

Розв'язки (λ_n, u_n) наближених задач збігаються до розв'язку (λ, u) задачі (1) при $n \to \infty$, та мають місце наступні оцінки

$$\lambda_n - \lambda \leq C\varepsilon_n^2.$$

Якщо $v \in U_n(\lambda_n), \|v\|_1 = 1$, то

$$\inf_u \|u - v\|_1 \leq C\varepsilon_n, \quad u \in U(\lambda),$$

де $U_n(\lambda_n)$ - власний підпростір, відповідний λ_n,

$C-$ позитивна стала, яка не залежить від n.

Наступне твердження встановлює оцінку для похибки інтерполяції

Твердження 4.

Вірна оцінка

$$\varepsilon_n \le C n^{-\alpha+1} \quad \sup_u (\|u\|_{\beta,\gamma_1} + \|u\|_{\beta,\gamma_2}), \qquad u \in U(\lambda), \quad \|u\|_1 = 1,$$

де $\| \quad \|_{\beta,\gamma_i}$ *- норма у просторі* $W_2^\beta(\gamma_i)$, $i = 1, 2$,
C *не залежить від* n.

Таким чином, для наближених в.з. задачі (1) має місце оцінка

$$0 \le \lambda_n^k - \lambda^k \le C_k n^{-\tau}, \quad \tau < \frac{4}{3}$$

де λ^k *- в.з. задачі (1) з порядковим номером* k,
λ_n^k *- наближені в.з.,*
C_k *- позитивна стала, незалежна від* n.

Із варіаційних властивостей задачі виходить, що наближені в.з. збігаються до точних зверху.

В другому параграфі побудовано та обгрунтовано модифікування методу, що надає нижні границі в.з. вихідної задачі. У цьому випадку застосування обчислювального алгоритму еквівалентно реалізації методу Вайнштейна. На відміну від методу, який розглядався у роботах Л.Т.Позняка, в нашому випадку у розрахункових рівняннях не виникають ряди, наближення яких скінченними сумами на практиці може приводити до погіршування швидкості наближених розв'язків до точних та втрати властивості наближених в.з. оцінювати точні знизу. Наведені результати обчислення в.з. та чисельні оцінки показника τ *методом экстраполяції Річардсона.*

У третьому параграфі застосування методу узагальнюється для задач з кусково-сталими коефіцієнтами. Викладання надається на прикладі розв'язування задачі для області

$$\Omega = \{(x_1, x_2) | 0 < x_1, x_2 < 1\},$$

яка має внутрішню границю

$$\gamma = \{(x_1, x_2) | x_1 = d, 0 < x_2 < 1\},$$

що розбиває її на дві підобласті

$$\Omega^1 = \{(x_1, x_2) | 0 < x_1 < d, 0 < x_2 < 1\},$$

$$\Omega^2 = \{(x_1, x_2) | d < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}.$$

В області Ω вирішується задача на в.з.

$$Lu + \lambda u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{7}$$
$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{8}$$

де

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x_1} p_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} p_2 \frac{\partial u}{\partial x_2},$$

$$p_i(x_1, x_2) = \begin{cases} p_i^1 > 0, & \Omega^1, \\ p_i^2 > 0, & \Omega^2, \ i = 1, 2; \end{cases}$$

$$< u > = < p_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} > = 0,$$

<> - стрибок граничних значеннь при підході до границі γ с різних сторін.

В п.1 досліджується гладкість в.ф..

В п.2 доведено твердження про подання розв'язку для задач типу (7),(8) та побудовано чисельний алгоритм, що забезпечує двосторонні границі для в.з..

Наведено результати чисельного експерименту.

У четвертому параграфі розглядається задача визначення λ і відповідних функцій $u(x) \in \dot{W}_2^1(\Omega)/\{0\}$, що задовольняють інтегральній тотожності

$$[u, v] = \lambda(u, v) \qquad \forall v \in \dot{W}_2^1(\Omega) \tag{9}$$

з білінійними формами

$$[u, v] = \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + q(x) uv \right) dx, \qquad (u, v) = \int\limits_\Omega r(x) uv dx,$$

де $q(x), r(x)$ - вимірні, обмежені в $\Omega = \{0 \le x_i \le l_i, i = 1, 2\}$ функції

$$0 \le q(x) \le c_2, \qquad 0 < c_1 \le r(x) \le c_2.$$

Для цієї задачі у прямокутній області побудовано дискретний аналог четвертого порядку точності по в.з. (Приказчиков В.Г.,

$$\Delta^h y + \frac{h^2}{12}\left(2B - b^2(\mu)\right) y - (q - \lambda^h r)y = 0, y \in Y, \qquad (10)$$

де

$$\Delta^h y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} \qquad By = y_{\bar{x}_1 x_1 \bar{x}_2 x_2}, \qquad b(\mu) = q - \mu r,$$

Y - простір сіткових функцій, які дорівнюють нулю на границі Ω, $\mu = \mu^h$ - в.з. дискретної задачі другого порядку точності відносно в.з.

$$\Delta^h \tilde{y} - (q - \mu^h r)\tilde{y} = 0, \qquad \tilde{y} \in Y. \qquad (11)$$

Для різнецевої схеми четвертого порядку доведено

Твердження 5.

Якщо коефіцієнти вихідної задачі належать простору $W_2^4(\Omega)$, то похибка схеми (10) відносно некратних в.з. характеризується оцінкою

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lambda - \lambda^h}{h^4} = \frac{1}{720}(-3\int\limits_\Omega \Delta^2 f u dx + 2\int\limits_\Omega f_{x_1x_1}u_{x_2x_2}dx + 2\int\limits_\Omega f_{x_2x_2}u_{x_1x_1}dx +$$

$$+5\int\limits_\Omega (q-\lambda r)^3 u^2 dx - 10\int\limits_\Omega \{(u_{x_1x_1})^2 + (u_{x_2x_2})^2\} dx \int\limits_\Omega (q-\lambda r)dx),$$

$$\int\limits_\Omega r u^2 dx = 1, \qquad f = (q - \lambda r)u,$$

де λ, λ^h - відповідні в.з. вихідної та дискретної задач, u - в.ф., відповідна в.з. λ.

Наслідок 1. Якщо коефіцієнти вихідної задачі сталі функції $q(x) = q, \quad r(x) = r$, то похибка схеми (10) відносно некратних в.з. характеризується оцінкою

$$\lim_{h\to 0} \frac{\lambda - \lambda^h}{h^4} = \frac{q - \lambda r}{360} \Big(\int_\Omega \{(\Delta u)^2 + 2(u_{x_2x_1})^2\} dx -$$

$$-5 l_1 l_2 \int_\Omega \{(u_{x_1x_1})^2 + (u_{x_2x_2})^2\} dx \Big) , \quad \int_\Omega r u^2 dx = 1.$$

Наслідок 2. Для досить малих h можно використовувати формулу уточнення в.з. λ^h:

$$\lambda_{\text{ут}} = \lambda^h + \frac{h^4}{720} \{ -3 \sum_{i=2}^{N_1-2} \sum_{j=2}^{N_2-2} (\Delta^h \Delta^h y y)_{ij} h^2 + 2 \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} (f_{\bar{x}_1 x_1} y_{\bar{x}_2 x_2})_{ij} h^2 +$$

$$+2 \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} (f_{\bar{x}_2 x_2} y_{\bar{x}_1 x_1})_{ij} h^2 + 5 \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} ((q - \lambda^h r)^3 y^2)_{ij} h^2 -$$

$$-10 \Big(\sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} (y^2_{\bar{x}_1 x_1} + y^2_{\bar{x}_2 x_2})_{ij} h^2 \Big) \Big(\sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} (q - \lambda^h r)_{ij} h^2 \Big),$$

де λ^h - в.з. задачі (10), а відповідна в.ф. y визначена по схемі (11) другого порядку точності.

III. ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

1. Для класу задач типу (1),(7),(8) доведено кусково-аналітичні подання розв'язків.

2. Побудовано метод наближеного розв'язування задач означенного класу, що забезпечує

- перехід від задач в області, до рівнянь на границях підобластей;
- двосторонні оцінки в.з..

3. Доведено збіжність чисельного методу, отримано оцінки для похибок наближених в.з. та швидкості збіжності алгоритму.

4. Алгоритм застосовано до розв'язування конкретних задач, створено програмну реалізацію запропонованного методу.

5. Отримано головний доданок похибки наближених в.з. різницевої схеми четвертого порядку точності для задачі (9). Показано, як уточнювати в.з. до шостого порядку точності за допомогою схеми другого порядку.

IV. ПУБЛІКАЦІЇ ПО ТЕМІ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Приказчиков В.Г., Медведєв Г.С. Розв'язування спектральних задач у кусково-однорідних середовищах // Обчислювальна та прикладна математика, вип. 76, 1992.

2. Приказчиков В.Г., Медведев Г.С. Приближённый метод решения спектральной задачи в невыпуклой области // Деп. в ГНТБ Украины 16.03.94, N 535-Ук94.

3. Приказчиков В.Г., Медведев Г.С. Асимптотическая оценка погрешности дискретной задачи четвертого порядка точности // Деп. в ГНТБ Украины 18.04.94, N 726-Ук94.