МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. І.І.Мечнікова

На правах рукопису

ЧАДАЄВ Олександр Михайлович

ПРОЕКЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ РІМАНА І СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. У ВИНЯТКОВОМ ВИПАДКУ

01.01.01 – математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

ОДЕСА – 1994

Роботу виконано на кафедрі обчислювальної математики Одеського державного університету ім. І.І.Мечнікова.

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент Тихоненко М.Я.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор Аров Д.З.
кандидат фізико-математичних наук, доцент Нєчаєв А.П.

Провідна організація: Державний університет Молдови

Захист дисертації відбудеться "17" червня 1994 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої Ради Д 05.01.01 з фізико-математичних наук (математика) при Одеському державному університеті ім. І.І.Мечнікова за адресою:

270000, г.Одеса, вул. П.Великого, 2, ауд. 91 .

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці Одеського державного університету.

Автореферат розіслано "16" 05 1994 р.

Вчений секретар
спеціалізованої Ради
доцент Стоколос О.М.

Загальна характеристика роботи.

Дисертаційна робота присвячена обгрунтуванню застосованності проекційних методів наближеного розв'язування виняткового випадку задачі Рімана та її застосувань, а також сингулярних інтегральних рівнянь (с.і.р.) з ядром Коші в узагальнених просторах Гельдера.

Актуальність теми.. Крайові задачі і с.і.р. різного виду часто виникають при розв'язуванні різних задач математичної фізики, теорії пружності, теорії дифракції, аеро- і гідродинаміки, теорії фільтрації та інш. При цьому відшукання точного розв'язку, як правило, викликає значні труднощі. В зв'язку з цим виникає необхідність обгрунтування наближених методів розв'язування указаних задач.

В цьому напрямку за останній час отримано велику кількість результатів, огляди яких можна знайти в працях Іванова В.В.[1], Габдулхаєва Б.Г.[2], Белоцерковського С.М. і Ліфанова І.К.[3], Пресдорфа З.[4], Золотаревського В.А.[5]. При цьому більшість робіт присвячено наближеному розв'язуванню крайових задач і с.і.р. в нормальному випадку, тобто коли символ задачі не дорівнює нулю на контурі. Дослідженню же виняткового випадку присвячено лише декілька робіт.

Поряд з цим, широкий круг прикладних задач зводиться до розв'язування саме виняткового випадку крайових задач і с.і.р.

---

1) Иванов В.В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. -Киев: Наукова думка, 1968. -287 с.

2) Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. -Казань:Изд-во Казанск. ун-та, 1980. -231 с.

(ряд таких задач розглянуто в § 7 цієї дисертації). В зв'язку з цим викликає інтерес обгрунтування наближених методів їх розв'язування. У роботі З.Пресдорфа[4] пропонуєтся схема, яка дозволяє звести обгрунтування проекційних методів розв'язування виняткового випадку задачі Рімана и с.і.р. до розв'язування задач з нормально розв'язними операторами. В запропонованії роботі вказана схема застосовується для обгрунтування проекційних методів розв'язування виняткового випадку крайової задачі Рімана і с.і.р.,а також їх різних узагальнень та застосувань в узагальнених просторах Гельдера.

Таким чином, в дисертації розвиваються і узагальнюються методи наближеного розв'язування крайових задач теорії аналітичних функцій і с.і.р., що і визначає її актуальність.

Мета роботи. Обгрунтування проекційних методів (методи редукції і колокації), щодо їх застосування до наближенного розв'язування виняткового випадку задачі Рімана і с.і.р. на одиничному колі в узагальнених просторах Гельдера, а також їх застосувань.

Методика досліджень. При обгрунтуванні результатів в дисертації істотно використуються методи загальної теорії наближених методів, теорії крайових задач і сингулярних інтегральних

---

3) Белоцерковский С.М.,Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. -М.:Наука,1985. -254 с.

4) Пресдорф З. Некотрые классы сингулярных уравнений. -М.:Мир, 1979. -495 с.

5) Золотаревский В.А. Конечномерные метода решения сингулярных интегральных уравнений на замкнутых контурах.-Кишинев:Штиинца, 1991. -134 с.

рівнянь теорії аналітичних функцій, функціонального аналізу, конструктивної теорії функцій.

Наукова новизна. В дисертації отримано наступні основні результати:

1. Встановлено повну неперервність комутатора T=Sa-aS в узагальнених просторах Гельдера.

2. Обгрунтовано методи редукції та колокації наближеного розв'язування виняткового випадку скалярної та матричної задачі Рімана, а також узагальненої задачі Рімана на одиничному колі в узагальнених просторах Гельдера, на основі чого обгрунтовано метод редукції наближеного розв'язування виняткового випадку нескінчених систем алгебраїчних рівнянь з різницевими індексами.

3. Описано клас мішаних крайових задач для нескінчених систем диференціально-різницевих рівнянь, які зводяться до виняткового випадку задачі Рімана на одиничному колі. та запропоновано метод їх наближеного розв'язування.

4. Обгрунтовано методи редукції та колокації наближеного розв'язування виняткового випадку с.і.р. та їх систем на одиничному колі в узагальнених просторах Гельдера, а також деяких їх узагальнень.

Теоретична і практична цінність роботи. Дисертація носить в основному теоретичний характер. Одержані в ній результати можуть бути використані для подальшого розвитку наближених методів розв'язування крайових задач теорії аналітичних функцій, с.і.р. і їх узагальнень, а також для розв'язування конкретних прикладних задач, які зводяться до задачі Рімана і с.і.р.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідалися і обговорювалися на III Республіканському симпозиумі з диференціальних і інтегральних рівнянь (м.Одеса-1982 р.), на II Всесоюзній школі з теорії операторів в функціональних просторах (м.Мінськ-1982 р.), на III Республіканській конференції "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе" (м.Київ-1982 р.), на I і II Республіканських конференціях "Интегральные уравнения в прикладном моделировании" (м.Київ-1983,1986 р.р.), на IV і V Всесоюзних симпозіумах "Метод дискретных особенностей в задачах математической физики" (м.Харків-1989 р.,м.Одеса-1991р.), на конференціях "Гаховские чтения" (м.Одеса-1986-1989 р.р.), на наукових семінарах "Загальна теорія наближених методів" при Одеському університеті (керівник - доц.Тихоненко М.Я.),на одеському міському семінарі "Крайові задачі і сингулярні інтегральні рівняння" (керівник - проф.Литвінчук Г.С.), на щорічних наукових конференціях професорсько-викладацького складу Одеського держуніверситету (м.Одеса-1981-1983 р.р.) та Миколаївського педагогічного інституту (м.Миколаїв-1985-1993 р.р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в восьми роботах, список яких наведено в кінці автореферату. Результати двох робіт одержани сумісно з Тихоненком М.Я., однієї - сумісно з Диденком В.Д. и Мацкулом В.М.

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається з вступу, трьох глав, разбитих на 10 параграфів, та списку цитованої літератури, що містить 81 найменування. Обсяг роботи - 112 сторінок машинописного тексту.

Зміст дисертації.

У вступі до роботи наводиться короткий огляд деяких результатів, які є близькими до теми дисертації, а також коротко викладається зміст роботи.

Перша глава дисертації складається з двох параграфів. Тут досліджується питання повної неперервності комутатора Sa-aS (S-оператор сингулярного інтегрування, a-оператор множення на функцію $a(t)$) в узагальнених просторах Гельдера. В подальшому ці результати істотно використовуються для обгунтування застосованності проекційних методів.

У § 1 встановлено повну неперервність комутатора Sa-aS, який діє з простору $H_{\omega^{(1)}}$ в простір $H_{\omega^{(2)}}$. Будемо розглядати модулі неперервності $\omega(\delta)$, які задовольняють умовам Барі-Стечкіна:

$$\int_0^h \frac{\omega(\xi)}{\xi}\, d\xi < +\infty \tag{1}$$

$$\int_0^\delta \frac{\omega(\xi)}{\xi}\, d\xi + \delta \int_\delta^h \frac{\omega(\xi)}{\xi^2}\, d\xi = O(\omega(\delta)),\ \delta \longrightarrow +0. \tag{2}$$

Теорема 1.1. Нехай модуль неперервності $\omega^{(1)}$ задовольняє умову (1), а модуль неперервності $\omega^{(2)}(\delta)$ задовольняє умову (2). Якщо $a(t)\in H_{\omega^{(2)}}$, то оператор $T=Sa-aS$: $H_{\omega^{(1)}} \longrightarrow H_{\omega^{(2)}}$ є обмеженим.

Теорема 1.2. Нехай модулі неперервності $\omega^{(1)}$ і $\omega^{(2)}$ задовольняють умову (2). Якщо $a(t)\in H_{\omega^{(2)}}$, то оператор $T=Sa-aS$: $H_{\omega^{(1)}} \longrightarrow H_{\omega^{(2)}}$ є повно неперервним.

Параграф 2 присвячено доведенню повної неперервності оператора T: $H_{\omega^{(1)}} \longrightarrow H^{(r)}_{\omega^{(2)}}$. Основні результати цього параграфу сформульовано в теоремах 2.1 и 2.2.

Теорема 2.1. Нехай модуль неперервності $\omega^{(1)}$ задовольняє умову (1), а модуль неперервності $\omega^{(2)}(\delta)$ задовольняє умову (2). Якщо $a(t)\in H^{(r+1)}_{\omega^{(2)}}$, то оператор $T=Sa-aS$: $H_{\omega^{(1)}} \longrightarrow H^{(r)}_{\omega^{(2)}}$ є обмеженим.

Теорема 2.2. Нехай модулі неперевності $\omega^{(1)}$ і $\omega^{(2)}$ задовольняють умову (2). Якщо $a(t)\in H_{\omega^{(2)}}^{(r+1)}$, то оператор $T=Sa-aS$: $H_{\omega^{(1)}}\longrightarrow H_{\omega^{(2)}}^{(r)}$ є повно неперервним.

На закінчення першого і другого параграфів формулюються аналогічні твердження для випадку, коли оператор T діє в просторах вектор-функцій.

Друга глава дисертації присвячена обгрунтуванню методів колокації і редукції наближеного розв'язування виняткового випадку скалярної і матричної задачі Рімана на одиничному колі, а також деяких задач, які зводяться до задачі Рімана.

Третій парагараф має в основному реферативний характер. Тут ми наводимо необхідні результати з теорії наближених методів: вводяться оператори Лагранжа і Фур'є, вивчаються їх властивості, наводиться загальна схема Пресдорфа З.[4], яка дозволяє звести розв'язування крайових задач і с.і.р. у винятковому випадку до розв'язування задач, в яких оператор є нормально розв'язним. В цьому параграфі вводяться також простори нескінченовимірних векторів-коефіцієнтів Фур'є функцій, які належать H_ω. Ці простори в подальшому використовуються при побудові розв'язків крайових задач для нескінченних систем диференціально-різницевих рівнянь.

У четвертому параграфі дисертації наведено обгрунтування методів колокації і редукції наближеного розв'язування виняткового випадку скалярної задачі Рімана на одиничному колі Г:

$$\Phi^{+}(t)=\frac{\rho_{+}(t)}{\rho_{-}(t)}\,G_1(t)\Phi^{-}(t)+g(t),\qquad t\in\Gamma, \qquad (3)$$

де $\rho_{+}(t)=\prod_{i=1}^{l}(t-a_i)^{\alpha_i}$, $\rho_{-}(t)=\prod_{s=1}^{p}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{b_s}\right]^{\beta_s}$, a_i, b_s -точкі Г,

α_i, β_s - натуральні числа ($i=\overline{1,l}$, $s=\overline{1,p}$).

Наближений розв'язок задачі (3) будемо шукати у вигляді

$$\Phi_n^+(t)=\sum_{k=0}^{n} c_k t^k, \quad \Phi_n^-(t)=\sum_{k=-n}^{-1} c_k t^k ,$$

а невідомі коефіцієнти c_k визначаються з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\rho_-(t_j)\sum_{k=0}^{n} c_k t_j^k + \rho_+(t_j)G_1(t_j)\sum_{k=-n}^{-1} c_k t_j^k = \rho_-(t_j)g(t_j) \qquad (4)$$

де $t_j=\exp(2\pi ij/(2n+1))$, $j=\overline{-n,n}$, для метода колокації або

$$\sum_{k=0}^{n} c_k d_{jk} + \sum_{k=-n}^{-1} c_k d_{jk} = g_j , \quad j=\overline{-n,n},$$

де d_{jk}, b_{jk}, g_j - коефіцієнти Фур'є видповидно функції $\rho_-(t)t^k$, $G_1(t)\rho_+(t)t^k$, $\rho_-(t)g(t)$, для метода редукції.

Позначимо $F(\delta)=\omega^{(1)}(\delta)/\omega^{(2)}(\delta)$ і

$$r=\max(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_p).$$

Теорема 4.1. Нехай $G_1(t)\in H_{\omega^{(1)}}^{(r+1)}$, $g(t)\in H_{\omega^{(1)}}^{(r)}$, $G_1(t)\neq 0$, $t\in\Gamma$, $\operatorname{ind} G_1(t)=0$ і функція $F(\delta)\ln\delta \longrightarrow 0$ коли $\delta\longrightarrow +0$. Тоді система лінійних алгебраїчних рівнянь (4) є розв'язною для достатньо великих n. При цьому наближені розв'язки $\Phi_n^{\pm}(t)$ задачі (3) збігаються у просторі $H_{\omega^{(2)}}$ до її точного розв'язку $\Phi_*^{\pm}(t)$ із швидкістю .

$$\| \Phi_n^{\pm}(t)-\Phi_*^{\pm}(t) \|_{H_{\omega^{(2)}}} = O\left(F\left(\frac{1}{n}\right) \ln n\right).$$

Аналогічну теорему 4.2 доведено для метода редукції.

Якщо ж вимагати більшої гладкості функції $G_1(t)$ і $g(t)$: $G_1(t)\in H_{\omega^{(1)}}^{(r+k+1)}$, $g(t)\in H_{\omega^{(1)}}^{(r+k)}$, де k-натуральне число, то тверджження теорем 4.1 і 4.2 зберегають силу, при цьому до оцінки швидкості збіжності додається множник n^{-k}.

У п'ятому параграфі обгрунтовано методи колокації і редукції наближеного розв'язання виняткового випадку матричної задачі Рімана. Тут також обгрунтовано наближене розв'язування узагальненої задачі Рімана шляхом зведення її до матричної задачі Рімана.

На основі результатів § 4 у шостому параграфі обгрунтовано метод редукції наближеного розв'язування нескінченних систем алгебраїчних рівнянь виду

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{j-k}\varphi_k + \sum_{k=-\infty}^{-1} b_{j-k}\varphi_k = g_j, \qquad j=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

а також дискретного рівняння Вінера-Хопфа

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{j-k}\varphi_k = g_j, \qquad j=0,1,2,\ldots,$$

шляхом наближеного розв'язування відповідної задачі Рімана.

В § 7 описано клас мішаних крайових задач для нескінченних систем диференціально-різницевих рівнянь із сталими коефіцієнтами, які зводяться до матричної задачі Рімана на одиничному колі. Наприклад, крайова задача

$$\frac{d^2u_k(x)}{dx^2} + u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x) = 0, \quad k = 0,\pm1,\pm2,\ldots, \; x\in[0;1],$$

$$u_k(0) = 0, \; k=0,1,2,\ldots, \qquad \left.\frac{du_k(x)}{dx}\right|_{x=0} = 0, \; k=-1,-2,\ldots,$$

$$u_k(1) = f_k, \; k=0,1,2,\ldots, \qquad \left.\frac{du_k(x)}{dx}\right|_{x=1} = 0, \; k=-1,-2,\ldots$$

зводиться до розв'язування задачі Рімана

$$\begin{cases} \Phi_1^+(t)=-\alpha \operatorname{ctg} \alpha \ \ \Phi_1^-(t) + \dfrac{\alpha}{\sin \alpha} \left[\Phi_2^-(t)+F^+(t) \right], \\ \Phi_2^+(t)=- \dfrac{\alpha}{\sin \alpha} \ \Phi_1^-(t) + \alpha \operatorname{ctg} \alpha \left[\Phi_2^-(t)+F^+(t) \right], \ t\in\Gamma, \end{cases} \tag{5}$$

символ якої має на Γ нуль другого порядку в точці $t=1$.
Тут $\alpha= \alpha(t)= (t-1)/\sqrt{t}$, $F^+(t)$-відома функція, яка визначається крайовими умовами. При цьому розв'язок початкової задачі пов'язано з розв'язком задачі (5) наступною рівністю

$$u_k(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{1}{\alpha}\Phi_1^+(t)\sin\alpha x+\Phi_1^-(t)\cos\alpha x\right]t^{-k-1}dt, \ k=0,\pm1,\pm2,\dots .$$

Далі в цьому параграфі на основі результатів §§ 4 і 5 пропонується метод наближеного розв'язування зазначених мішаних крайових задач. Наведено результати чисельного розв'язання однієї крайової задачі методом колокації.

Третя глава дисертації присвячена наближеному розв'язуванню виняткового випадку с.і.у., а також їх систем.

В § 8 на основі результатів §§ 4 і 5 обгрунтовано методи колокації і редукції наближеного розв'язування виняткового випадку с.і.у. виду

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau + \int\limits_{\Gamma}K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=g(t), \ t\in\Gamma,$$

і систем с.і.у. з ядром Коші у випадку, якщо символ рівняння має на Γ скінченну кількість нулів цілих кратностей.

У § 9 застосовуються результати § 8 для наближеного розв'язування с.і.у. з комплексно спряженими значеннями невідомої функції:

$$a(t)\varphi(t)+b(t)\overline{\varphi(t)}+\frac{c(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+d(t)\overline{\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau}+$$

$$+\int\limits_{\Gamma}K_1(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau+\overline{\int\limits_{\Gamma}K_2(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau}=f(t),\quad t\in\Gamma$$

Результати § 8 також застосовуються в § 10 для наближеного розв'язування виняткового випадку с.і.у. із зсувом Карлемана:

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left\{a_k(t)\varphi\left[\alpha_k(t)\right]+\frac{c_k(t)}{\pi i}\int\frac{\varphi(\tau)}{\tau-\alpha_k(t)}d\tau\right\}+$$

$$+\int\limits_{\Gamma}K(t,\tau)d\tau=g(t),\, t\in\Gamma,$$

де $\alpha(t)$ - прямий або обернений зсув, який відображає взаємно однозначно одиничне коло Γ саме на себе і задовольняючий умову Карлемана

$$\alpha_m(t)\equiv t,\quad \alpha_k(t)\not\equiv t,\quad 1\le k\le m-1,$$

де m- натуральне, $\alpha_k(t)=\alpha[\alpha_{k-1}(t)]$, $\alpha_0(t)\equiv t$.

Насамкінець вважаю своїм приємним обов'язком висловити глибоку вдячність за всебічне сприяння і допомогу у роботі своєму науковому керівнику доценту Тихоненку М.Я.

Список робіт автора за темою диссертації.

1. Чадаев А.М. О сходимости метода коллокаций для систем сингулярных интегральных уравнений в исключительном случае // III Республиканский симпозиум по дифференциальным и интегральным уравнениям:Тез.докл.,1-3 июня 1982 г.-Одесса,1982.-С.227.

2. Чадаев А.М. Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравнения в исключительном случае //Школа по теории

операторов в функциональных пространствах:Тез.докл.,4-11 июля 1982 г.-Минск,1982.-С.228.

3. Чадаев А.М. Приближенное решение систем сингулярных интегральных уравнений в некоторых функциональных пространствах //Интегральные уравнения в прикладном моделировании:Тез.докл. Республиканской научно-технической конференции, 4-6 октября 1983 г.-Киев,1983.ч.II.-С.229-230.

4. Чадаев А.М. О полной непрерывности одного интегрального оператора//Одесск.ун-т.-Одесса,1983 г.-16 с.-Деп.в УкрНИИНТИ 21.11.83. -№ 1297.Ук-Д83.

5. Диденко В.Д.,Мацкул В.Н.,Чадаев А.М. К прямым методам приближенного решения сингулярных интегральных уравнений с сопряжением//Интегральные уравнения в прикладном моделировании:Тез. докл.II Республиканской конференции,15-19 октября 1986 г. -Киев, 1986.Ч.2.-С.91-92.

6. Тихоненко Н.Я.,Чадаев А.М. О методе редукции приближенного решения систем сингулярных интегральных уравнений в исключительном случае //Изв.вузов.Матем.-1987.-№ 5.-С.71-74.

7. Чадаев А.М. О приближенном решении некоторых задач математической физики//Метод дискретных особенностей в задачах математической физики: Тез.докл. IV Всесоюзного симпозиума, 18-22 мая 1989 г. -Харьков,1989.ч.II.-С.283-285.

8. Тихоненко Н.Я.,Чадаев А.М. Приближенное решение краевой задачи Римана в исключительном случае в пространствах непрерывных функций//Метод дискретных особенностей в задачах математической физики: Тез.докл. V Всесоюзного симпозиума, 15-19 сентября 1991 г.-Одесса,1991.ч.II.-С.55-56.

Чадаев