Академія наук України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова

На правах рукопису

ЛЯШКО Ольга Вікторівна

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ПРОЕКТНЕ ОБГРУНТУВАННЯ ВАРТОСТІ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ГІДРОСПОРУД

05.13.16 — застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання і математичних методів у наукових дослідженнях

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Київ 1994

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова Академії наук України.

Наукові керівники: академік АН України
СЕРГІЄНКО Іван Васильович,
доктор фізико-математичних наук
ДЕЙНЕКА Василь Степанович.

Офіційні опоненти: академік АН України
ГРИГОРЕНКО Ярослав Михайлович,
кандидат фізико-математичних наук
ГУЛЕНКО Володимир Петрович.

Провідна організація: Київський університет імені
Т. Г. Шевченка.

Захист відбудеться «30» червня 1994 р. о 11.00 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 016.45.01 при Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова АН України за адресою:

252650 Київ МСД 22, проспект Академіка Глушкова, 40.

З дисертацією можна ознайомитись у науково-технічному архіві інституту.

Автореферат розісланий «30» травня 1994 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради СИНЯВСЬКИЙ В. Ф.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. За останні роки увага математиків до розвитку, дослідження та впровадження методів розв"язування задач дискретного прогнозування не послаблюється. Це, насамперед, обумовлено тим, що розв"язок багатьох практично важливих задач тим чи іншим шляхом зводиться до розв"язування задач дискретного програмування. Так, наприклад, побудова гідротехнічної споруди, як правило, пов"язана із необхідністю мінімізації деякого функціоналу, в який може бути закладено сенс розмірів, складності, вартості, високий рівень надійності та ін. Розв"язок таких задач тісно пов"язаний з використанням моделей і методів дискретної оптимізації при деяких обмеженнях на фільтраційні характеристики. До цих же задач можна віднести деякі екологічні проблеми, де вимагається урахування міграції забруднень, процесів переносу вологи і тепла при розрахунку конструкції мінімальної ваги з обмеженнями на характеристики міцності та багато інших задач.

На даний момент часу в області дискретної оптимізації проводяться інтенсивні дослідження з розробки методів розв"язування різних класів задач. У зв"язку з цим потрібно відмітити роботи В.С.Михалевича, І.В.Сергієнка, Ю.І.Журавльова, Н.З.Шора, В.А.Трубіна, Дж.Данціга, Дж.Бендерса та інших як вітчизняних, так і закордонних вчених. Але постійно зростаючі потреби практики вимагають додаткових досліджень у цій області знань. Так, наприклад, при побудові математичної моделі задачі мінімізації вартості гідроспоруди ми приходимо до задачі монотонного цілочисельного програмування, тобто до задачі, цільова функція і обмеження якої є монотонними функціями. Природним при цьому стає питання розробки методу розв"язування, який враховував би ці особливості задачі.

Усе вищевикладене дозволяє зробити висновок, що побудова математичних моделей задач про мінімізацію вартості різних гідроспоруд та розробка ефективних методів їх розв"язування є актуальною задачею.

Мета роботи: І. Побудувати математичні моделі задач про мінімізацію вартості різних гідроспоруд як задачі математичного програмування.

2. Побудувати ефективний алгоритм розв"язування задач цілочисельного програмування, в яких цільова функція і обмеження є монотонними функціями.

3. На основі побудованого алгоритму отримати чисельний розв"язок практично важливої задачі про мінімізацію вартості гідроспоруди при заданих умовах руху грунтових вод.

Методика дослідження полягає у використанні апарату теорії фільтрації і теорії дискретного програмування.

Наукова новизна. В дисертації побудовані математичні моделі задач мінімізації вартості широкого класу гідроспоруд. Побудований алгоритм для розв"язування задач монотонного цілочисельного програмування і показана його ефективність на даному класі задач. Отримані результати є новими.

Практична і теоретична цінність. Використаний у дисертаційній роботі підхід дав змогу розглядати задачі про мінімізацію вартості гідроспоруд при заданих умовах руху грунтових вод як задачі дискретного програмування.Побудована на основі запропонованого методу розрахункова методика і розроблений комплекс програм використані для розв"язання важливої прикладної задачі.

Основні дослідження проводилися в рамках науково-дослідних тем "Розробка автоматизованої системи моделювання процесів тепломасопереносу" (номер держреєстрації 6.04.01/014 за програмою ДКНТ України) і "Розробка теоретичних основ автоматизації чисельного моделювання і оптимізації фізичних полів на персональних комп"ютерах" (номер держреєстрації I/214 Державного фонду з фундаментальних досліджень - ДКНТ України).

Реалізація результатів роботи. Результати дисертаційної роботи використані в Інституті гідротехніки та меліорації Української Академії аграрних наук при проектуванні нових гідротехнічних споруд.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на науково-технічних конференціях "Застосування обчислювальної техніки, математичних методів і моделювання в автоматизації експериментальних досліджень" (м.Київ, 1987 р., м.Шацьк, 1988 р.), Всеукраїнській науковій конференції пам"яті Г.М.Положія (м.Київ, 1994 р.), наукових семінарах кафедри обчислювальної математики Київського університету (м.Київ, 1986-1994 р.р.), І Українську конференцію з автоматичного управління (м.Київ, 1994 р.).

Публікації. За темою дисертаційної роботи опубліковано 6 друкованих праць.

Структура роботи. Дисертаційна робота складається із вступу, трьох глав, висновку, списку основної використаної літератури.

ЗМІСТ РОБОТИ

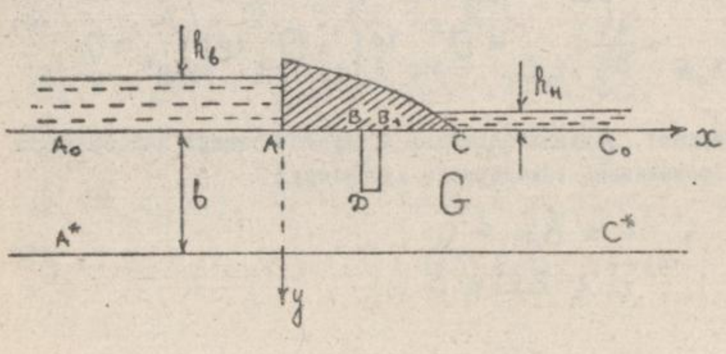
У вступі зроблено огляд результатів досліджень, пов"язаних з темою дисертації, обгрунтовано актуальність обраної теми, визначено метод дисертаційної роботи, подано короткий вигляд її змісту.

У першій главі побудовані математичні моделі задач мінімізації вартості широкого класу гідроспоруд.

У першому параграфі розглядається задача мінімізації вартості одношпунтового флютбета при заданих умовах руху грунтових вод. У п.І.І.І. цього параграфа будується математична модель вищевказаної задачі як задачі математичного програмування: серед усіх одношпунтових флютбетів довжиною із розмірами шпунта BD (мал.І) знайти той, який надає мінімум функціоналу вартості

$$\Phi_0(l_1, l_2, l_3) = \int_0^{l_1+l_2} c_1(x)\,dx + \int_0^{l_3} c_2(y)\,dy \to \min, \qquad (I)$$

де $l_1+l_2 = AC$, $l_3 = BD$, $c_1(x)$ - функція вартості одиниці довжини флютбета в точці $(x,0)$, $c_2(y)$ - функція вартості одиниці довжини шпунта в точці (l_1, y),



при таких обмеженнях на фільтраційні характеристики:

$$Q \le Q_g\,,\ \underline{P}_g \le P \le \overline{P}_g\,,\ V_c \le V_g\,, \tag{2}$$

де V_c - швидкість рідини в кінцевій точці флютбета C ; Q_g , $\underline{P}_g$, $\overline{P}_g$, V_g - допустимі значення витрат води під гідроспорудою, тиску під флютбетом і швидкості фільтраційного потоку в точці C . Значення цих величин повинні забезпечити запас міцності і стійкості гідроспоруди, які гарантуватимуть її роботу в реальних умовах експлуатації.

Фільтраційні характеристики потоку (Q - витрати рідини під гідроспорудою, P - тиск, $V=|\vec{V}|$) визначаються через значення функції течії $\Psi(x,y)$ чи потенціалу швидкості $\varphi(x,y)$, які пов"язані між собою умовами Коші-Рімана:

$$\begin{aligned} V &= -\int_\Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial \vec{n}}\, ds = \mathcal{F}_3(\Psi)\,, \\ Q &= \int_\Gamma \frac{\partial\varphi}{\partial \vec{s}}\, ds = \mathcal{F}_1(\Psi)\,, \\ P &= -\rho g\left(\frac{\varphi}{\varkappa} + y\right) = \mathcal{F}_2(\Psi)\,, \end{aligned} \tag{3}$$

де Γ - лінія течії, $\vec{S}$ - вектор дотичної до лінії течії.

Функція $\varphi(x,y)$ є розв"язком крайової задачі для рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0\,,$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{A_0A} = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_{C_0C} = 0\,,\quad \varphi\big|_\Gamma = Q\,,\ \varphi\big|_{A^*B^*} = 0\,. \tag{4}$$

Нарешті, довжина флютбета і шпунта повинні задовольняти деяким обмеженням інженерного характеру:

$$\begin{aligned} a &\le AC \le c\,, \\ 0 &\le BD \le b\,, \end{aligned} \tag{5}$$

де b - глибина залягання водотривкості

Математична модель (I)-(5) є задача математичного програмування.

В п.І.І.2. задача математичного програмування (I)-(5) замінюється на задачу цілочисельного програмування. Для цього область G розв"язку задачі покривається сітковою множиною

$$\mathfrak{M} = \{(\xi_i, \eta_k) \mid \xi_i = i h_0, \eta_k = k h_1;\ i, k \in Z;\ h_0, h_1 - const\}$$

таким чином, щоб виконувались рівності

$$l_1 = h_0(x_1 + \tfrac{1}{2}),\ l_2 = h_0(x_2 + \tfrac{1}{2}),\ l_3 = h_1(x_3 + \tfrac{1}{2}),$$

де

$$\begin{gathered} x_i - \text{цілі } (i = 1,2,3), \\ a - \frac{h_0}{2} \le h_0 x_1,\quad a - \frac{h_0}{2} \le h_0 x_2,\quad x_3 \geqslant 0, \\ h_0 x_1 + h_0 x_2 \le c - h_0,\quad h_1 x_3 \le b - \frac{h_1}{2}. \end{gathered} \tag{6}$$

Функціонал (I) при цьому переходить у такий:

$$\begin{gathered} \Phi_0(l_1, l_2, l_3) = \Phi_0(h_0(x_1 + \tfrac{1}{2}), h_0(x_2 + \tfrac{1}{2}), h_1(x_3 + \tfrac{1}{2})) = \\ = F_0(x_1, x_2, x_3), \end{gathered} \tag{7}$$

а обмеження (2) запишуться у вигляді

$$Q_j(x_1, x_2, x_3) \geqslant 0,\quad (j = \overline{1,4}), \tag{6}$$

$$\begin{gathered} Q_1(x_1, x_2, x_3) = Q_g - \mathcal{F}_1(x_1, x_2, x_3), \\ Q_2(x_1, x_2, x_3) = \overline{P}_g - \max_i \mathcal{F}_2(i, 1, x_1, x_2, x_3), \\ Q_3(x_1, x_2, x_3) = \min_i \mathcal{F}_2(i, 1, x_1, x_2, x_3) - \underline{P}_g, \\ Q_4(x_1, x_2, x_3) = V_g - \mathcal{F}_3(x_1 + x_2, 1, x_1, x_2, x_3), \\ \mathcal{F}_j(i, k, x_1, x_2, x_3) = \mathcal{F}_j(\varphi(\xi_i, \eta_k)),\ (j = \overline{1,4}). \end{gathered} \tag{9}$$

Таким чином, отримали задачу цілочисельного програмування: знайти точку $x^*=(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$, яка мінімізує функціонал (7) при обмеженнях (6), (8), (9).

Із варіаційних теорем Г.М.Положія доведені два важливих твердження.

<u>Твердження I</u>. Функції $Q_j(x_1, x_2, x_3)$ $(j=\overline{1,4})$, визначені рівностями (9), є монотонно зростаючими

<u>Твердження 2</u>. Функціонал $F_0(x_1, x_2, x_3)$, визначений рівністю (7), є монотонно зростаюча функція своїх аргументів.

Наприкінці першого параграфа зроблені деякі зауваження щодо коректності заміни задачі (I)-(5) її чисельною моделлю, тобто показано, що розв"язок задачі (6)-(9) може бути як завгодно близьким до розв"язку задачі (I)-(5).

У другому параграфі першої глави розглянуті деякі інші практичні задачі про мінімізацію вартості гідроспоруд при заданих умовах руху грунтових вод. Так, побудовані математичні моделі задачі про оптимізацію флютбета з перепадами, шпунтами, заглибленими частинами і дренами; задачі фільтрації через земляні перемички, дамби, плотини, причому із узагальненнями на випадок введення екрануючого ядра (непроникного або слабопроникного) включення в перемичку); математична модель задачі вибору оптимальної системи дренів. Для всіх перелічених класів задач побудовані функціонали вартостей і обмеження і показана їх монотонність.

В третьому параграфі сформульована загальна задача цілочисельного математичного програмування, до якої зведені всі приклади, розглянуті в попередніх параграфах: необхідно знайти точку $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка надає мінімум функціоналу

$$F(X) \to \min, \tag{I0}$$

при умовах

$$\begin{gathered} Q_i(X) \geqslant 0, \quad j=\overline{1,m}, \\ L_i(X) \geqslant 0, \quad i=\overline{1,K}, \\ X \in A = \prod_{i=1}^{n} A_i, \quad A_i = \{a_i, a_{i+1}, \dots, b_i\}, \quad i=\overline{1,n}, \end{gathered} \tag{II}$$

де a_i, b_i ($i=\overline{1,n}$) - цілі числа; $F(X)$, $Q_i(X)$ ($i=\overline{1,m}$) - визначені і зростаючі на множині A функції, причому зображення функцій $Q_i(X)$ у вигляді явних аналітичних виразів не обов"язкове; функції $L_i(X)$ ($i=\overline{1,k}$) визначені на множині A і мають явний аналітичний вигляд.

Задачу (10), (11) назвемо задачею монотонного цілочисельного програмування (ЗМЦП).

Для перевірки точки $X \in A$ на виконання обмежень (11) необхідно кожного разу розв"язувати крайову задачу теорії фільтрації. Тому, незважаючи на скінченність множини A, безпосередній перебір усіх її точок даному класі задач неможливий. Ця обставина і привела до необхідності розробки методів розв"язку ЗМЦП (10), (11), в яких обмеження $Q_i(X) \geq 0$ перевірялися б найменш можливій кількості точок множини A.

Означення 1. Точка $X \in D = A \cap B$, де

$$B = \{X \mid Q(X) \geq 0\}, \quad Q(X) = \min_i \{Q_i(X)\},$$

називається допустимою точкою.

Означення 2. Множиною точок, які підходять для значення $f \in R$, називається множина

$$P(f) = \{X \in A \mid F(X) < f\}.$$

Лексикографічно упорядковану в порядку спадання множину $P(f)$ будемо позначати $\overline{P}(f)$.

Доведена теорема, на якій базується основна ідея алгоритму розв"язування ЗМЦП.

Теорема 1. Нехай $X \in D$, $f = F(X)$. Тоді:

а) якщо $\overline{P}(f) \cap D = \emptyset$, то X - розв"язок задачі;

б) якщо X не є розв"язком ЗМЦП, то розв"язок знаходиться в множині $P(f)$.

Загальна ідея алгоритму розв"язування ЗМЦП (10), (11) така.

Нехай $D \neq \emptyset$, відомі: точка $X^0 \in D$, значення $f_0 = F(X^0)$, множина $P(f_0)$, деяка послідовність точок Z^p, $p=\overline{0,r}$ ($Z^0 = X^0$) і відповідна їй послідовність чисел $f_p = F(Z^p)$, де $r \geq 0$ - деяке число, причому

$$\{Z^p \mid p=\overline{0,r}\} \subset D \cap \mathcal{P}(f_0), \ f_{p+1} < f_p, \ p=\overline{0,r-1}. \quad (12)$$

На початку $r+1$-ї ітерації знаходження розв"язку X^* задачі (10), (11) будуємо множину $\overline{\mathcal{P}(f_r)}$. Якщо $\overline{\mathcal{P}(f_r)} = \emptyset$, то $X^* = Z^r$. В іншому випадку проводимо послідовний перегляд точок множини $\overline{\mathcal{P}(f_r)}$, починаючи з першої. Під переглядом точки розуміємо перевірку її на належніоть області (11) шляхом обчислення в цій точці значення функції

$$Q(X) = \min_i \{Q_i(X)\}.$$

Якщо в множині $\overline{\mathcal{P}(f_r)}$ допустимих точок не існує, то Z^r - розв"язок задачі. Якщо ж допустима точка знайдена, то збільшуємо r на одиницю, знайдену точку приймаємо за елемент Z^{r+1} послідовності Z^p і розв"язок задачі продовжуємо. При цьому умови (12) виконуються.

Доведена

Теорема 2. Запропонований ітераційний алгоритм є скінченною процедурою.

Обгрунтоване твердження про те, що для знаходження розв"язку задачі число точок, в яких необхідно обчислювати значення функції $Q(X)$, значно менше $|A|$.

Друга глава дисертації складається із чотирьох параграфів і присвячена конкретизації загальної ідеї алгоритму, його покрокової побудови, питанням ефективності, а також побудові алгоритму знаходження локального мінімуму в ЗМШП.

В першому параграфі отримані рекурентні співвідношення для побудови множин $\mathcal{P}(f_r)$ ($r \geq 0$), які сформульовані у вигляді теорем.

Теорема 3. Компоненти точки $X^{1,r}$ знаходяться за рекурентним співвідношенням

$$x_i^{1,r} = \begin{cases} z_i^r, & i < m_{r-1}(S^*), \\ z_i^r - 1, & i = m_{r-1}(S^*), \\ \Phi(f_r, X^{1,r}(i-1)), & i > m_{r-1}(S^*), \end{cases}$$

де $m_{r-1}(s^*) = \max\{i \mid x_i^{s^*,r-1} \neq a_i,\ i=\overline{1,n}\}$,

$$X^{1,r}(i-1) = (x_1^r, x_2^r, \dots, x_{i-1}^r),$$

$$\Phi(f_r, X^{1,r}(i-1)) = \max\{x_i \mid (x_1^{1,r}, x_2^{1,r}, \dots, x_{i-1}^{1,r}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \overline{\mathcal{F}(f_r)}\}.$$

<u>Теорема 4</u>. Нехай відомі точка $X^{s,r} \in \overline{\mathcal{P}(f_r)}$ і число

$$m_r(s) = \max\{i \mid x_i^{s,r} \neq a_i,\ i=\overline{1,n}\}.$$

Тоді

$$x_i^{s+1,r} = \begin{cases} x_i^{s,r}, & i < m_r(s), \\ x_i^{s,r} - 1, & i = m_r(s) \\ \Phi(f_r, X^{s+1,r}(i-1)), & i > m_r(s), \end{cases} \quad s = \overline{1, n_r},$$

де $n_r = |\mathcal{P}(f_r)|$.

В другому параграфі розглядається процедура направленого неявного перебору точок множини $\overline{\mathcal{P}(f_r)}$.

Встановлені такі теореми.

<u>Теорема 5 (правило відсіювання I)</u>. Якщо $X^{s,r} \in \overline{\mathcal{P}(f_r)}$, $X^{s,r} \notin \mathcal{D}$, то $\ell(s, i_r(s))$ точок, що слідують $\overline{\mathcal{P}(f_r)}$ за точкою $X^{s,r}$, не належать множині $\mathcal{D}$ і явному перегляду за точкою $X^{s,r}$ належить точка $X^{s(r),r}$, де

$$\ell(s, i_r(s)) = (x_{i_r(s)}^{s,r} - a_{i_r(s)}) \prod_{j=i_r(s)+1}^{n} (b_j - a_j),$$

$$i_r(s) = \max\{i \mid x_i^{s,r} \neq b_i,\ i=\overline{1,n}\},$$

$$s(r) = s + \ell(s, i_r(s)) + 1 .$$

Під явним переглядом точки X розуміється перегляд цієї точки, при якому вимагається обчислення значення $Q(X)$.

Теорема 6 (правило відсіювання П). Нехай

$$X^{s,r} \in \mathcal{D},\ x_i^{s,r} = b_i,\ i = \overline{j_r(s), n}\quad,$$

де індекс $j_r(s)$ такий, що виконується система умов

$$(x_1^{s,r}, x_2^{s,r}, \ldots, x_{i-1}^{s,r}, x_i^{s,r} - 1, b_{i+1}, \ldots, b_n) \notin \mathcal{D},\ i = \overline{j_r(s), n}.$$

Тоді

$$\{X^{i,r} \mid i = s, s_2,\ s_2 = s + l(s, j_r(s))\} \not\subset \mathcal{D}.$$

Теорема 7 (критерій оптимальності). Нехай на кроці r алгоритму при послідовному перегляді точок множини $\mathcal{P}(f_r)$ отримана точка $X^{s,r}$:

$$X^{s,r} = (a_1, a_2, \ldots, a_{i_r(s)-1}, x_{i_r(s)}, b_{i_r(s)+1}, \ldots, b_n)$$

Тоді: а) якщо $X^{s,r} \notin \mathcal{D}$, то Z^r - розв"язок задачі;

б) якщо $X^{s,r} \in \mathcal{D}$, то $X^{s,r}$-розв"язок задачі.

В третьому параграфі побудований покроковий алгоритм розв"язку задачі (10), (11), а також обговорена його ефективність шляхом порівняння числа явно і неявно переглянутих точок.

Четвертий параграф присвячений побудові алгоритму знаходження локального мінімума в ЗМЦП (10), (11), коли її точний розв"язок неможливо знайти за припустимий час.

Третя глава присвячена постановці обчислювального експерименту по дослідженню запропонованого алгоритму при розв"язуванні тестових і практичних задач.

В першому параграфі аргументовано обирається і розв"язується тестова задача монотонного цілочисельного програмування. Задача розв"язується при різних вимірностях, результати порівнюються із розрахунками цієї ж задачі методом вектора спаду. Зроблене порівняння дозволяє зробити висновок, що при вимірностях, характерних для класу розглядуваних задач (потужність множини A порядку $10^3 \div 10^5$), запропонований точний алгоритм не поступається навіть наближеному методу вектора спада. Результати експерименту вказують також на значну кількість точок множини A , які переглянуті неявно. Так, при $n = 5$ $(|A| = 10^5)$

всього явно переглянутих точок виявилось лише 683.

В другому параграфі наведені результати обчислювального експерименту по розв"язуванню практичної задачі мінімізації вартості одношпунтового флютбета з фіксованим перепадом при заданих умовах руху грунтових вод.

На закінчення наведено висновки за дисертаційною роботою.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

I. Побудовані математичні моделі для задач мінімізації вартості складних гідроспоруд при заданих умовах руху грунтових вод.

2. Отримані задачі зведені до задач монотонного цілочисельного програмування. Показана коректність переходу від неперервної задачі до задачі МЦП.

3. Розроблено метод розв"язування ЗМЦП, при якому кількість точок, які переглядаються на допустимість явно, мінімізується.

4. На основі запропонованого методу розроблено комплекс програм, який дозволяє автоматизувати розрахунки широкого класу гідроспоруд, оптимальних за вартістю.

5. Чисельно реалізована постановка обчислювального експерименту по дослідженню розробленого алгоритму при розв"язуванні тестових і важливих прикладних задач.

Основні положення дисертаційної роботи опубліковані у таких роботах:

I. Ляшко О.В., Третяк В.П. Математическая модель задачи оптимизации размеров многошпунтового флютбета и алгоритм ее решения.// Тези доп. наук. -техн. конф. "Застосування обчислювальної техніки, математичних методів і моделювання в автоматизації експериментальних досліджень".- Київ, 1987. - С. 66-67.

2. Ляшко О.В. Решение одного класса задач минимизации стоимости гидросооружений.// Тези доп. наук. -техн. конф "Застосування обчислювальної техніки і математичних методів у наукових та економічних дослідженнях".- Київ, 1988. - С.63.

3. Ляшко О.В., Третяк В.П. Розв"язування одного класу задач цілочислового програмування// Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та технічні науки. - 1988 . - № 7. - С. 76-78.

4. Ляшко О.В. Нахождение локального экстремума в задаче об определении оптимальных размеров гидротехнических сооружений // Тези доп. наук. техн. конф. "Застосування обчислювальної техніки і математичних методів у наукових та економічних дослідженнях". Тернопіль, 1989. - С. 93.

5. Ляшко О.В. Про знаходження локального мінімума в одній задачі цілочислового програмування // Дослідження операцій. - 1991. - № 39. - С. 37.

6. Ляшко О.В., Третяк В.П. Алгоритм решения одного класса задач целочисленного программирования с ограничениями, заданными в неявном виде // Кибернетика и системный анализ. - 1993. - № 6. - С. 15-16.

Підп. до друку 25.05.94. Формат 60×84/16. Папір друк. № 2. Офс. друк. Ум. друк. арк. 0,70. Ум. фарбо-відб. 0,82. Обл.-вид. арк. 0,75. Тираж 100 прим. Зам. 591.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова АН України
252207 Київ 207, проспект Академіка Глушкова, 40

Ав 30.394