АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ
МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ

ІМ. Я.С.ПІДСТРИГАЧА

На правах рукопису

ЗУБКО ВОЛОДИМИР ІВАНОВИЧ

УДК 539.3

ЦИЛІНДРИЧНИЙ ЗГИН ПАКЕТА ПЛАСТИН З УРАХУВАННЯМ СИЛ ТЕРТЯ НА ПОВЕРХНЯХ РОЗДІЛУ

Спеціальність 01.02.04 - механіка деформівного твердого тіла

А в т о р е ф е р а т

дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук

Львів - 1994

Робота виконана в [illegible]
і математики ім. Я.С.Підс[illegible]

НАУКОВИЙ КЕРІВНИК - [illegible]
науковий співробітник [illegible]

ОФІЦІЙНІ ОПОНЕНТИ - доктор фізико-математичних наук, професор Осадчук В.А.; кандидат фізико-математичних наук, доцент Сухорольський М.А.

ПРОВІДНЕ ПІДПРИЄМСТВО - Івано-Франківський державний технічний університет нафти і газу

Захист відбудеться "27" червня 1994 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради К 016.59.01 по присудженню вченого ступеня кандидата фізико-математичних і кандидата технічних наук при Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача АН України /м. Львів, вул. Матейка, 4/.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача АН України /м. Львів, вул. Наукова, 3-б/.

Відгук на автореферат просимо надсилати на адресу:

290053, м. Львів, вул. Наукова 3-б,
вченому секретарю спеціалізованої ради.

Автореферат розіслано "25" травня 1994 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради,
кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник ШЕВЧУК П.Р.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В різних областях сучасної техніки широке застосування набувають конструкції, в яких несучими органами, сприймаючими навантаження, є пакети пластин. Використання пакетів пластин в подібних конструкціях є актуальним, бо дає змогу зменшити жорсткість системи, зберігаючи при цьому її міцність. В роботі моделюється пружина з жорстким і пружним елементами трансформації переміщень, які взаємодіють з пакетами пластин. Інтенсивне впровадження у виробництво композиційних матеріалів зумовило те, що пластини досліджуються трансверсально-ізотропні. Механіко-математичне моделювання поведінки несучих органів даної конструкції в умовах навантаження приводить на першому етапі до постановки та розв'язання задачі про згин пакета пластин з урахуванням сил тертя на поверхнях розділу.

Постановки та методи розв'язання контактних задач з урахуванням сухого тертя, що використовують континуальні моделі суцільного середовища, досить розвинені. Серед них поширеними є метод сингулярних інтегральних рівнянь, варіаційно-різницевий метод, апарат варіаційних нерівностей. В числі інших ці методи дозволяють встановити фундаментальні закономірності фрикційного контакту пружних тіл і розв'язувати конкретні задачі. Фундаментальні результати у цьому напрямку одержані в роботах Александрова В.М., Бабешка В.А., Вовкушевського А.В., Воровича І.І., Галіна Л.А., Гольдштейна Р.В., Григолюка Е.І., Грилицького Д.В., Кизими Я.М., Кравчука А.С., Кузьменка В.І., Левіна А.А., Моссаковського В.І., Спектора А.А., Толкачова В.М., Bufler H., Johnson K.L., Haslinger J., Keer L.M., Silva M.A.G. та інших авторів. Разом з тим дослідження з використанням названих методів нерідко відрізняє громіздкість математичного апарату, яка ще більш зросте з урахуванням анізотропії, а також відсутність аналітичних розв'язків. Тому залишається актуальним пошук нових методів розв'язання контактних задач, здатних відобразити анізотропію фізико-механічних властивостей матеріалу та задовольнити потреби інженерної практики. Для цього, як показує досвід, найбільш придатними є підходи, які використовують моделі і методи теорії оболонок, пластин і стержнів. Бо пониження розмірності задачі спрощує процес виводу та розв'язання рівнянь в порівнянні з відповідними рівняннями трьохмірної задачі теорії пружності та дозволяє отримувати достатньо точні результати. Однак свої труднощі тут виникають на етапі моделювання об'єкта дослідження.

На теперішній час існує досить широке коло уточнених теорій оболонок, пластин і стержнів, здатних врахувати ефекти поперечного зсуву і обтиснення і дозволяючих одержати розподіл контактних напружень без фізичних невідповідностей. Про найбільш відомі з них викладено в монографіях Александрова В.М.і Мхитаряна С.М., Амбарцумяна С.А., Васильєва В.В., Гузя А.Н., Григолюка Е.І. і Толкачова В.М., Кантора В.Я., Моссаковського В.І., Гудрамовича В.С. і Макеєва Е.М., Осадчука В.А., Пелеха Б.Л.і Лазька В.А., Пелеха Б.Л. і Сухорольського М.А., Рассказова А.О., Соколовської І.І. і Шульги Н.А., Саркисяна В.С та інших авторів. Загальний огляд з проблеми контакту пластин і оболонок з жорсткими штампами зроблено Поповим Г.Я. і Толкачовим В.М.

Для визначення демпфуючої здатності та довговічності пакетів незв'язаних пластин важливе значення має розподіл контактних напружень. Однак дослідження їх розподілу в пакетах пластин при наявності в них зон зчеплення, проковзування і відлипання стикається з математичними труднощами і не є завершеним.

Таким чином, створення методики розрахунку напружено-деформованого стану пакетів трансверсально-ізотропних пластин з урахуванням зон зчеплення, проковзування і відлипання є актуальним.

Метою даної роботи є:

I. Розробка методики розрахунку напружено-деформованого стану пакетів трансверсально-ізотропних пластин з урахуванням зон зчеплення, проковзування і відлипання.

2. В рамках побудованої моделі розв'язання ряду задач згину пакетів пластин і балок.

3. Аналіз і дослідження асимптотичних (вироджених) розв'язків одержаної моделі.

Наукова новизна роботи визначається наступними результатами:

- розроблено механіко-математичну модель згину трансверсально-ізотропних пластин, в основі якої лежить модель Е.І.Григолюка і В.М.Толкачова, узагальнена шляхом врахування анізотропії;
- для розв'язання задачі циліндричного згину пакета пластин з урахуванням зон зчеплення, проковзування і відлипання побудовано модель, в якій проблема знаходження контактних напружень зводиться до інтегрування системи диференціальних рівнянь;
- знайдено алгоритм переходу від задачі згину пакета плас-

тин до задачі згину пакета балок, з допомогою якого можуть бути отримані всі результати, що відповідають балочній моделі;

- на базі побудованої моделі розв'язано задачу згину двошарового пакета пластин та вивчено вплив сил тертя та параметрів анізотропії на розподіл контактних напружень;

- встановлено межі зміни параметрів анізотропії, у відповідності з якими виконано граничні переходи.

Достовірність основних наукових результатів забезпечується строгістю застосованого математичного апарату, строгим асимптотичним аналізом розв'язків задачі, а також добрим узгодженням одержаних результатів з уже відомими частковими випадками.

Практична цінність роботи полягає в розробці методики розрахунку напружено-деформованого стану пакетів трансверсально-ізотропних пластин, на поверхнях розділу яких діють кулонівські сили тертя. Одержано інженерні формули для розрахунку напружено-деформованого стану пластинчатих пружин з наповнювачем, які використовуються в лабораторії механіки машин ІППММ АН України для проектування та вдосконалення відповідних пружних елементів. Річний економічний ефект від використання результатів досліджень у 1989 р. по Івано-Франківському виробничому об'єднанню "Карпатпресмаш" становив 131929 крб.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на 3 Всесоюзній конференції "Міцність, жорсткість та технологічність виробів із композиційних матеріалів" (Запоріжжя, 1989), 12 і 13 конференціях молодих вчених ІППММ АН УРСР (Львів, 1987 і 1989), а також в завершеному вигляді представлялись на семінарі лабораторії механіки машин ІППММ АН України (Івано-Франківськ) і спеціалізованому кваліфікаційному семінарі з механіки деформівного твердого тіла ІППММ АН України (Львів).

Публікації. Основні результати виконаних досліджень опубліковані в 8 наукових працях.

Обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, додатку, бібліографічного списку (85 назв), ілюстрацій (34 рис.). Загальний обсяг дисертації складає 150 сторінок.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі обгрунтовується актуальність теми роботи, її наукова і практична цінність, визначається мета роботи та відмічається новизна одержаних результатів. Дана анотація дисертації по розділах.

Перший розділ присвячений розробці уточненої математичної моделі згину пакета незв'язаних трансверсально-ізотропних пластин. На пакет діє симетричне відносно середини нормальне навантаження q(x). Кожній пластині відповідає декартова система координат $x_i\ y_i\ z_i$ $(i=\overline{1,n})$, початок якої знаходиться в центрі пластини. Припускається, що переміщення точок пластини задовольняють умовам плоскої деформації

$$u_o = u_o(x,z)\ ,\quad v_o = 0\ ,\quad w_o = w_o(x,z)\ , \tag{1}$$

де u_o, v_o, w_o - переміщення в напрямку осей x, y і z відповідно.

Перш за все, розглядаючи окрему пластину з пакета, на верхній та нижній поверхнях якої прикладено довільні навантаження, здійснюється побудова прикладної моделі згину трансверсально-ізотропних пластин. Для цього за основу було взято метод, запропонований для ізотропних тіл в моделі Е.І.Григолюка і В.М.Толкачова. Згідно з цим методом, побудова уточненої моделі згину пластин умовно розбивається на два етапи. Однак, якщо на першому етапі у вихідній моделі приймаються гіпотези Кірхгофа, то в даній моделі вводяться два малих параметри E/E_1 і E/G_1 (E, E_1 - модулі пружності в напрямку осей x (y) і z відповідно; G_1 - модуль зсуву в площинах xz і yz). Показано, що на першому етапі результати обох моделей будуть однакові.

Другий етап побудови уточненої моделі можна рахувати начебто наступним наближенням. Тут, як і у вихідній моделі, за основу прийнято одержаний в наближенні Кірхгофа та задовольняючий рівняння рівноваги закон зміни напружень σ_x, σ_y, σ_z і τ_{xz} по товщині пластини ($\tau_{xy}=0$, $\tau_{zy}=0$). При цьому σ_x і σ_y мають лінійний по товщині розподіл, τ_{xz} - квадратичний, а σ_z - кубічний. Інтегруючи співвідношення закону Гука для ε_z і γ_{xz} по товщині пластини, отримано закон зміни переміщень u_o і w_o . Із варіаційного рівняння Кастиліано одержано співвідношення узагальненого закону Гука, в яких замість переміщень серединної площини пластини $\bar{u}$ і $\bar{w}$ стоять середні по товщині переміщення u і w. Між $\bar{u}$, $\bar{w}$ і u, w знайдено зв'язок та одержано вирази для переміщень поверхонь пластини, які використовуються при розв'язанні контактних задач. Використовуючи рівняння рівноваги та співвідношення узагальненого закону Гука, одержано ключові рівняння згину (четвертого порядку по w і другого по u). Нарешті, із рівності нулю поверхневого інтегралу в варіаційному рівнянні Кастиліано отримано граничні умови. Слід відзначити, що при переході до ізотропного тіла результати приведеної моделі будуть збігатися з результатами моделі Е.І.Григолюка і В.М.Толкачова.

На цьому побудова прикладної моделі згину трансверсально-ізотропних пластин завершується. Проте залишилась нерозв'язаною проблема знаходження контактних напружень. Для її розв'язання прийнято припущеня, що між і та і+1 пластинами $(i=\overline{1,n-1})$ може знаходитися довільна кількість зон зчеплення та спряження (контакту). В зоні спряження виконуються умови рівності поверхневих прогинів і умова стиску

$$w_{oi}(-1,x) = w_{o,i+1}(1,x)\ ,\quad \sigma_{zi} < 0\ ,\quad |x-x^{k}_{oi}| < æ^{k}_{2i}\ . \qquad (2)$$

В зоні зчеплення до цих умов додадуться ще дві умови

$$u_{oi}(-1,x) = u_{o,i+1}(1,x),\quad |\tau_{xi}| < \mu_i|\sigma_{zi}|,\ |x-x^{l}_{oi}| < æ^{l}_{1i}, \qquad (3)$$

де $æ^{l}_{1i}$, $æ^{k}_{2i}$ - невідомі границі зон зчеплення і спряження; x^{l}_{oi}, x^{k}_{oi} - довільні величини; σ_{zi}, τ_{xi} - контактні напруження; μ_i - коефіцієнт тертя (k, l = 1,2,3,...). За межами зони зчеплення розміщена зона проковзування, де сили тертя підлягають закону Кулона. Далі йде зона відлипання, в якій контактні напруження рівні нулю.

Наступним кроком виконується операція диференціювання. Підставивши в рівності (2) і (3) вирази для переміщень поверхонь пластини, диференціюєм першу з них чотири рази, а другу - двічі. Ця операція, виконана з урахуванням рівнянь рівноваги та співвідношень узагальненого закону Гука, дозволяє виключити з виразів, що диференціюються, зусилля, моменти і переміщення, залишивши тільки поверхневі навантаження. В результаті одержимо рівняння для знаходження контактних напружень в пакеті

$$(A^{(i)}_{i} + A^{(i)}_{i+1})\sigma_{zi} = B^{(i)}_{i}\sigma_{z,i-1} + B^{(i)}_{i+1}\sigma_{z,i+1} + (C^{(i)}_{i} - C^{(i)}_{i+1})\tau_{xi} +$$

$$+ D^{(i)}_{i}\tau_{x,i-1} - D^{(i)}_{i+1}\tau_{x,i+1}\ ,\ |x-x^{k}_{oi}| < æ^{k}_{2i},\ i=\overline{1,n-1}, \qquad (4)$$

$$(A_i^{(2)} + A_{i+1}^{(2)})\tau_{xi} = B_i^{(2)}\tau_{x,i-1} + B_{i+1}^{(2)}\tau_{x,i+1} + (C_i^{(2)} - C_{i+1}^{(2)})\sigma_{zi} +$$

$$+ D_i^{(2)}\sigma_{z,i-1} - D_{i+1}^{(2)}\sigma_{z,i+1}\ , \quad |x-x_{oi}^1| < \text{æ}_{1i}^1, \quad i=\overline{1,n-1}, \qquad (5)$$

де $A_i^{(1,2)}$ і $B_i^{(1,2)}$ - диференціальні оператори четвертого порядку, $C_i^{(1)}$ і $D_i^{(1)}$ - п'ятого порядку, $C_i^{(2)}$ і $D_i^{(2)}$ - третього порядку. Загальний аналітичний розв'язок рівнянь (4) і (5) стикається з математичними труднощами. Однак у випадку пластин з однаковими фізико-механічними властивостями при відсутності сил тертя на поверхнях розділу такий розв'язок було знайдено. В нього, крім доданків, що відображають вклад зовнішнього навантаження, увійшли функції Крилова. Таким чином, в побудованій моделі задача визначення напружено-деформованого стану пакета послідовно зводиться до розв'язання системи диференціальних рівнянь, інтегрування ключових рівнянь згину та задоволення граничних умов.

При побудові уточненої моделі згину пакета пластин були використані умови плоскої деформації (1). Для розробки аналогічної моделі згину пакета балок розглянуто задачу плоского напруженого стану $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$, $\tau_{yz} = 0$. Припускається, що розмір балок в напрямку осі y надто малий в порівнянні з іншими розмірами. Крім того, вважається, що точки балок будуть в основному переміщуватись в площині xz. Керуючись схемою побудови уточненої моделі згину пакета пластин, можна одержати всі результати, що стосуються балочної моделі. Встановлено, що перехід від пластинчатої моделі до балочної можна здійснити з допомогою замін пружних постійних $E/(1-\nu^2) \to E$, $\nu\nu_1 \to 0$ і $\nu_1^2 \to 0$ (ν, ν_1 - коефіцієнти Пуассона). Решта постійних E_1, G_1 і ν_1 залишається без зміни.

<u>У другому розділі</u> в рамках побудованої моделі розглянуто задачу згину двошарового пакета пластин, що знаходиться під дією постійного зовнішнього навантаження $q(x) = q_o = \mathrm{const}$. Ширина пластин - 2a, товщина шару - h. Припускається наявність між пластинами лише однієї прицентрової зони зчеплення ($|x| < \text{æ}_1$) та однієї зони спряження ($|x| < \text{æ}_2$). На границях зон зчеплення і спряження виконуються умови неперервності (стиковки) по зусиллях $T_{x1,2}$, $Q_{x1,2}$, моментах $M_{x1,2}$ та переміщеннях $u_{1,2}$, $w_{1,2}$, кутах повороту перетину $\varphi_{x1,2}$ (індекси 1,2 означають номер пластини). Разом з тим на границях зон накладаються умови на контактні напруження

$$\tau x(\text{æ}_1-0)=\tau x(\text{æ}_1+0)=-\mu\sigma z(\text{æ}_1), \quad \tau x'(\text{æ}_1-0) = \tau x'(\text{æ}_1+0) = -\mu\sigma z'(\text{æ}_1),$$
$$\sigma z(\text{æ}_2-0) = \sigma z(\text{æ}_2+0) = 0 . \qquad (6)$$

Зауважимо, що неперервність в точці æ_1 дотичних напружень випливає з умов неперервності по q_x і m_x ($q_x = q_x^+ - q_x^-$, $m_x = h(q_x^+ + q_x^-)/2$; $q_x^{\pm}$ - дотичні навантаження на поверхнях $z = \pm h/2$), а першої похідної від них - з умов неперервності по ε^* і γ^* (ε^* і γ^* - моменти від переміщень; штрих у другій умові (6) означає першу похідну по x). Торці пакета пружньо защемлені. Виходячи з симетрії задачі, розглянуто лише половину пакета ($0 \leq x \leq a$).

Спочатку визначаються контактні напруження. Для цього розв'язуємо диференціальні рівняння, які при $n=2$ приводять до двох, незв'язаних між собою, лінійних диференціальних рівнянь четвертого порядку. Знайшовши їх загальний розв'язок (розв'язком однорідних рівнянь є функції Крилова), інтегруємо ключові рівняння згину і задовольняємо граничні умови.

Так, скориставшись умовами повного фізичного контакту в зоні зчеплення, знаходимо зв'язок між сталими інтегрування ключових рівнянь згину першої та другої пластин, зменшивши тим самим їх кількість у два рази. Дальше, задовольнивши умови неперервності в точках æ_1 і æ_2 по $T_{x1,2}$, $Q_{x1,2}$, $M_{x1,2}$ та $u_{1,2}$, $w_{1,2}$, $\varphi_{x1,2}$, знаходимо зв'язок між сталими інтегрування ключових рівнянь в зоні зчеплення ($0 \leq x < \text{æ}_1$) і відповідними сталими в зонах проковзування ($\text{æ}_1 < x < \text{æ}_2$) і відлипання ($\text{æ}_2 < x \leq a$). В результаті залишається дев'ять невідомих (три сталих інтегрування ключових рівнянь, чотири сталих інтегрування рівнянь для знаходження контактних напружень, з яких сталі c_{11} і c_{12} входять у вираз для нормальних напружень, а c_{21} і c_{22} - для дотичних, та невідомі границі æ_1 і æ_2), яким відповідає дев'ять граничних умов (шість на торцях пакета і три умови (6)).

Спочатку з розв'язку системи трьох рівнянь визначаються невідомі c_{11}, c_{12} і æ_2. При цьому c_{11} і c_{12} увійшли в систему лінійно, а проблема визначення æ_2 зводиться до знаходження кореня трансцендентного рівняння. Дальше, використовуючи чисельні значення трьох перших сталих, із системи трьох рівнянь визначаються невідомі c_{21}, c_{22} і æ_1. Сталі c_{21} і c_{22} теж увійшли в систему лінійно, а проблема визначення æ_1 зводиться до знаходження кореня трансцендентного рівняння. Нарешті, за готовими формулами обчислюються сталі інтегрування ключових рівнянь згину.

У третьому розділі в задачі згину двошарового пакета пластин виконано два ланцюжки граничних переходів. Перший полягає в переході від уточненої теорії до теорії, що не враховує поперечне обтиснення ($E/E_1 \to 0$, $E \neq 0$), і від останньої до теорії Кірхгофа ($E/G_1 \to 0$, $E/E_1 = 0$). Другий - в граничних переходах $E/E_1 \to 1/\nu_1^2$ та $E/G_1 \to 2(1+\nu)/\nu_1$ ($E/E_1 = 1/\nu_1^2$).

Перш ніж розпочати перший граничний перехід, виконуються підготовчі перетворення. В результаті у всіх співвідношеннях задачі здійснюється перехід від функцій Крилова до гіперболічних функцій (синуса і косинуса), від невідомих c_{11} і c_{12}, c_{21} і c_{22} до невідомих c_1 і δ_1, c_2 і δ_2 ($c_1 = (c_{11} - ic_{12})/2$, $\delta_1 = (c_{11} + ic_{12})/2$; $c_2 = (c_{21} - ic_{22})/2$, $\delta_2 = (c_{21} + ic_{22})/2$; $i^2 = -1$). З іншого боку, цей перехід можна представити у вигляді відповідних замін, виконавши які, переходимо до границі $E/E_1 \to 0$.

Після ряду перетворень, перейшовши до границі $E/E_1 \to 0$ у співвідношеннях для знаходження сталих інтегрування і границь зон, одержимо, що

$$\delta_1\Big|_{\eta\to 0} \sim e^{-\gamma\varkappa_2}\Big|_{\gamma\to\infty} \to 0\ ,\quad \delta_2\Big|_{\eta\to 0} \sim \frac{1}{\omega}\, e^{-\omega\varkappa_1}\Big|_{\omega\to\infty} \to 0\ . \quad (7)$$

Тут $\eta = E/E_1$. З першої границі випливає, що при $E/E_1 = 0$ нормальні напруження на границі зони контакту зазнають розриву, з другої - те, що похідна від дотичних напружень має розрив на границі зони зчеплення. Тому в моделі, що не враховує поперечне обтиснення, з розгляду виключаються дві останні умови (6). В результаті залишається сім невідомих, яким відповідає сім граничних умов.

Перехід до теорії Кірхгофа виконується на основі результатів попереднього граничного переходу. Було знайдено, що при $E/G_1 = 0$ ($E/E_1 = 0$) поперечні зусилля на границі зони контакту зазнають розриву. Величину його визначає стала R. Розрив пов'язаний з виникненням в точці $\varkappa_2$ нормальної реакції. Відзначимо, що наявність останньої зумовлює появу в точці $\varkappa_2$ також дотичної реакції $T = \mu R$. Стала T у даному випадку визначає величину розриву нормальних зусиль на границі зони контакту. Виконуючи перехід до границі $E/G_1 \to 0$ в решту співвідношеннях, було доведено, що

$$\lim_{E/G_1 \to 0} \text{æ}_1 = 0 . \qquad (8)$$

Причому величина зони зчеплення прямує до нуля прямо пропорційно до параметра зсуву E/G_1. Порушення умови (8), як показує аналіз, приводить до перевизначеності задачі. Таким чином, в рамках теорії Кірхгофа маємо шість невідомих, яким відповідає шість умов на торцях пакета.

Перехід до границі $E/E_1 \to 1/\nu_1^2$ (ν_1 -задане) здійснюється, використовуючи рівняння і вирази, одержані в результаті підготовчих перетворень до першого ланцюжка граничних переходів. При цьому використовується аналогія з граничним переходом $E/E_1 \to 0$.

Після ряду перетворень, дотримуючись схеми граничного переходу $E/E_1 \to 0$, було отримано, що

$$\delta_1\Big|_{\eta \to 1/\nu_1^2} \sim e^{-\gamma \text{æ}_2}\Big|_{\gamma \to \infty} \to 0, \; \delta_2\Big|_{\eta \to 1/\nu_1^2} \sim \frac{1}{\omega} e^{-\omega \text{æ}_1}\Big|_{\omega \to \infty} \to 0. \quad (9)$$

Тобто, при $\eta = 1/\nu_1^2$ кількість невідомих в задачі зменшується з дев'яти до семи і відповідно з розгляду виключаються дві останні умови (6).

Аналогічно, дотримуючись схеми граничного переходу $E/G_1 \to 0$, було знайдено, що при $E/G_1 = 2(1+\nu)/\nu_1$ ($E/E_1 = 1/\nu_1^2$; ν, ν_1 - задані) поперечні зусилля на границі зони контакту зазнають розриву. Стала R' характеризує величину розриву і відображає наявність в точці æ_2 нормальної реакції. Остання приводить до розриву нормальних зусиль на границі зони контакту і появи дотичної реакції $T' = \mu R'$.

Було доведено, що

$$\lim_{E/G_1 \to 2(1+\nu)/\nu_1} \text{æ}_1 = 0 . \qquad (10)$$

Причому величина зони зчеплення прямує до нуля прямо пропорційно до параметра ϕ_o', де $\phi_o' = E/G_1 - 2(1+\nu)/\nu_1$ ($\phi_o' > 0$). В результаті шести невідомим, які залишились, відповідає шість умов на торцях пакета.

При порівнянні результатів граничних переходів першого та другого ланцюжків звертається увага на схожість між ними, що, до речі, проявляється в аналогіях, які використовуються в роботі. Тому одержані в результаті граничних переходів моделі можна рахувати симетричними. Відмінність же полягає в тому, що в співвідюшеннях другого ланцюжка додатково присутні доданки з множником δ_ν ($\delta_\nu = h^2/(5\nu_1(1-\nu))$), виникнення яких пов'язане з доданками з множником λ ($\lambda = \eta\nu_1/(1-\nu)$), що стоять в співвідношеннях уточненої моделі.

Результати, одержані в розділі, є дійсними також для зовнішних навантажень типу $q_o ch(\xi x)$ і $q_o \cos(\xi x)$ і при довільних умовах на торцях пакета.

Четвертий розділ в основному відведений для результатів чисельних розрахунків напруженого стану двошарового пакета пластин, торці якого пружньо защемлені. Розрахунки виконано для трьох типів навантажень: $q_1(x) = q_o ch(\xi x)$ ($\xi a = 2$), $q_2(x) = q_o = const$ і $q_3(x) = q_o \cos(\xi x)$ ($\xi a = 1,57$).

В рамках побудованої моделі вивчено вплив параметрів E/E_1 і E/G_1 на розподіл контактних напружень. Обчислення проводились при різних значеннях коефіцієнтів a/h ($a/h>5$), ν, ν_1 ($\nu_1 > 0$) і μ. Область зміни параметрів знаходилась в межах $0 < E/E_1 < 1/\nu_1^2$ і $0 < E/G_1 < \infty$.

Було показано, що з ростом E/G_1 (E/E_1 - задане) величина зони контакту збільшується. При цьому розподіл нормальних напружень стає все більш рівномірним і зменшується їх концентрація біля границі зони. Вплив же параметра E/E_1 не є таким однозначним і його можна умовно розділити на два випадки. В першому випадку ($E/G_1 < 2(1+\nu)/\nu_1$) з ростом E/E_1 (E/G_1 - задане) в розподілі нормальних напружень з'являються осциляції, тоді як в другому ($E/G_1 > 2(1+\nu)/\nu_1$) їх немає. При цьому зміна концентрації нормальних напружень біля границі зони нтакту в обох випадках буде однакова. Спочатку з ростом E/E_1 концентрація зменшується, досягає мінімального значення, а потім поступово зростає. Крім того, викликає інтерес вплив параметра E/E_1 на величину зони контакту. Спочатку з ростом E/E_1 (E/G_1 - задане) величина зони контакту зростає, досягає максимального чачення, а потім поступово зменшується. Як показують розраху..и, з ростом E/G_1 вплив параметра зсуву на величину зони контакту все більш переважає над впливом параметра E/E_1. І при $E/G_1 > 2(1+\nu)/\nu_1$ вплив останнього поступово зменшується до нуля.

Що до розподілу дотичних напружень в зоні зчеплення, то вплив параметрів E/E_1 і E/G_1 зводиться в основному до зміни величини зони зчеплення, яка більш, ніж на порядок, менша від товщини пластини h. При цьому вплив цих параметрів на æ_1 буде аналогічний до їх впливу на величину зони контакту. З тією лиш різницею, що зміна параметра E/E_1 дає приріст у величині зони зчеплення на два порядки більший, ніж зміна параметра E/G_1.

В роботі досліджується вплив навантаження та умов на торцях пакета, зокрема нормальних зусиль і коефіцієнтів жорсткості пружних опор, на розподіл контактних напружень. При цьому до розгляду приймаються ізотропні пластини ($E/E_1=1$; $E/G_1=2,6$; $\nu=\nu_1=0,3$). Було встановлено, що з ростом відлипання концентрація нормальних напружень біля границі зони контакту збільшується, при $æ_2/a = 0,012 \div 0,015$ ($a/h=20$) досягає свого максимального значення і потім падає до нуля. Розрахунки показують, що при наявності відлипання концентрація напружень визначається головним чином величиною зони контакту. Якщо ж відлипання відсутнє, то на неї безпосередній вплив здійснюють жорсткості зовнішніх опор.

Далі вивчається випадок, коли на пакет, крім зазначених вище навантажень, діє двостороннє стискуюче навантаження $p= sq_o/2= const$ (s - параметр навантаження). Було виявлено, що з ростом стискуючих напружень величина зони контакту збільшується і при деякому p_{min} величина $æ_2= a$. Разом з тим відбувається зміна концентрації нормальних напружень біля границі зони контакту. Спочатку вона зростає, досягає максимального значення і при $æ_2 \sim a-3h$ поступово зменшується. Позначимо загальне навантаження, що діє на пакет через Q ($Q = \int_{-a}^{a} q(x)dx$). Нами встановлено, що між p_{min} і Q існує прямо пропорційна залежність. Із збільшенням в k раз загального навантаження ($q(x)$- монотонна на проміжку $0< x< a$ функція; q_o- задане) у стільки же разів зростають необхідні для усунення відлипання мінімальні напруження. З іншого боку, якщо загальне навантаження постійне, то зміна густини його розподілу майже не впливає на величину стискуючих мінімальних напружень.

В роботі досліджується розподіл дотичних напружень в зоні зчеплення при різних значеннях коефіцієнта тертя. Було виявлено, що із збільшенням коефіцієнта μ величина зони зчеплення зростає. Причому зростання $æ_1$ відбувається нелінійно. Чим більше μ, тим менше приріст $\Delta æ_1$ при збільшенні коефіцієнта тертя на $\Delta\mu$. Як показують розрахунки, аналогічним чином відбувається збільшення $æ_1$ з ростом однопараметричного стискуючого навантаження $p= sq_o/2 = const$. Тому визначити p'_{min}, при якому повністю відсутнє проковзування між пластинами, в даній моделі не виявилось можливим. Напевно, розв'язок проблеми можна знайти, якщо узагальнити модель.

приклад, замінити прийняте вище припущення про наявність між пластинами тільки однієї прицентрової зони зчеплення на інше, в якому допускається довільне число зон. З іншого боку, обчислення в роботі проводились, коли параметр s змінювався від 0 до 30. Тому не виключено, що розширення цього проміжку могло би вирішити поставлене питання.

Відзначимо, що в роботі також проводились порівняння результатів уточненої моделі з відповідними результатами моделі, що не враховує обтиснення, та моделі Кірхгофа. Так, в рамках моделі, яка не враховує обтиснення, було виявлено, що величина зони зчеплення, більш, ніж на три порядки, менша від товщини пластини h. Із збільшенням коефіцієнта тертя вона зростає, причому прямо пропорційно до коефіцієнта тертя. Аналогічним чином, як показують розрахунки, відбувається збільшення $æ_1$ з ростом параметра зсуву, що може служити підтвердженням того, що при $E/G_1 \to 0$ величина $æ_1 \to 0$. Розглядаючи ізотропні пластини, було виявлено, що із збільшенням параметра a/h зменшується відмінність між відповідними інтегральними характеристиками задачі (зусилля, моменти і переміщення) в рамках уточненої моделі і в рамках моделі Кірхгофа.

<u>Основні результати і висновки:</u>

I. Розроблено нову механіко-математичну модель згину трансверсально-ізотропних пластин, в основі якої лежить модель Е.І.Григолюка і В.М.Толкачова, узагальнена шляхом врахування анізотропії.

2. Для розв'язання задачі циліндричного згину пакета пластин побудовано нову модель, яка враховує наявність між пластинами зон зчеплення, проковзування і відлипання. Проблема знаходження контактних напружень в моделі зводиться до інтегрування системи диференціальних рівнянь.

3. У випадку пластин з однаковими фізико-механічними властивостями при відсутності сил тертя на поверхнях розділу одержано загальний аналітичний розв'язок системи диференціальних рівнянь, що є дійсний для пакетів з довільною кількістю пластин.

4. Знайдено алгоритм переходу від задачі згину пакета пластин до задачі згину пакета балок, з допомогою якого можуть бути отримані всі результати, що відповідають балочній моделі.

5. На базі побудованої моделі розв'язано задачу згину двошарового пакета пластин з урахуванням зон зчеплення, проковзування і відлипання. Вивчено вплив сил тертя та параметрів ані-

зотропії на розподіл контактних напружень. Дослідження проводились для різних типів навантажень та при змінних граничних умовах.

6. Досліджено вплив параметрів анізотропії на величину зони контакту в двошаровому пакеті пластин та двошаровому пакеті балок.

7. Досліджено вплив однопараметричного стискуючого навантаження на величину зони зчеплення.

8. Встановлено межі зміни параметрів анізотропії. Параметр E/E_1 обмежений знизу нулем, а зверху величиною $1/\nu_1^2$. У свою чергу, параметр E/G_1 має межу знизу зліва нуль, а зверху зліва $2(1+\nu)/\nu_1$. У відповідності із знайденими межами виконано два ланцюжки граничних переходів. Висловлюється припущення, що між значеннями $E/E_1 = 0$ і $E/E_1 = 1/\nu_1^2$ параметр E/G_1 обмежений зліва кривою $E/G_1 = 2\eta\nu_1(1+\nu) - 2(\eta(1-\eta\nu_1^2)(1-\nu^2))^{1/2}$ $(\eta = E/E_1)$.

9. Встановлено, що між отриманими в результаті граничних переходів моделями існує певна симетрія. Це дозволяє їх систематизувати (наприклад, теорія Кірхгофа та псевдотеорія Кірхгофа; теорія, що враховує тільки зсуви, та псевдозсувна теорія).

10. Виявлено, що для досліджуваних навантажень при переході до теорії Кірхгофа (псевдотеорії Кірхгофа) зона зчеплення зникає. Причому величина зони зчеплення прямує до нуля прямо пропорційно до параметра зсуву (параметра $\phi_o' = E/G_1 - 2(1+\nu)/\nu_1$).

<u>У додатку</u> представлені документи, що підтверджують використання результатів роботи на практиці.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах:

1. Шопа В.М., Полевой Б.Н., Зубко В.И. Цилиндрический изгиб двухслойной пластины с учетом сил трения //Прикладная механика. - 1988. - 24, №11. - С. 63-68.
2. Зубко В.И., Полевой Б.Н., Шопа В.М. Влияние сил трения, эффектов поперечного сдвига и обжатия на изгиб пакета пластин //Доклады АН УССР. Сер.А. - 1988. - №1. - С. 36-40.
3. Зубко В.И. К вопросам теории многослойных пластин //Матер. 12 конф. мол. учен. Ин-та прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР, Львов, 21-23 октября, 1987 /Ин-т прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР. - Львов, 1987. - С. 71-75.
4. Зубко В.И. Расчет двухслойной пластины при наличии зон сцепления, проскальзывания, отслоения //Матер. 13 конф.мол.учен.

Ин-та прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР, Львов, 11-12 мая, 1989 /Ин-т прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР.- Львов, 1989.- С. 47-51.

5. Зубко В.И., Полевой Б.Н., Шопа В.М. Влияние сил трения, эффектов поперечного сдвига и обжатия на изгиб пакета трансверсально-изотропных пластин //Тез. докл. 3 Всес.конф. "Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов": 24-26 окт., 1989. - Запорожье, 1989. - С.91.
6. Зубко В.И., Полевой Б.Н., Шопа В.М. Цилиндрический изгиб пакета пластин при наличии зон сцепления, проскальзывания, отслоения //Прикладная механика. - 1990. - 26, №3. - С. 61-69.
7. Зубко В.И., Полевой Б.Н., Шопа В.М. Цилиндрический изгиб пакета трансверсально-изотропных пластин при наличии зон сцепления, проскальзывания, отслоения //Механика композитных материалов. - 1990. - №3. - С. 508-512.
8. Зубко В.И., Полевой Б.Н., Шопа В.М. Построение аналитического решенич задачи изгиба пакета трансверсально-изотропных пластин //Доклады АН УССР. Сер.А. - 1990. - №10. - С. 44-48.

Підписано до друку 17.05.94 р. Формат 60х94 1/16

Тираж 100 Заказ 421 Друк офсетний

м. Івано-Франківськ, вул. Василіянок 48, фірма "ЛІК"