КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

ХЛОБИСТОВ ВОЛОДИМИР ВОЛОДИМИРОВИЧ

УДК 519.65:62.50

ПОЛІНОМІАЛЬНА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ОПЕРАТОРІВ

01.01.07 - обчислювальна математика

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Київ - 1994

Робота виконана на кафедрі чисельних методів
математичної фізики Київського університету
ім. Тараса Шевченка

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук,
професор В.Л.Макаров

Офіційні опоненти: член-кореспондент АН Білорусії,
доктор фізико-математичних наук,
професор Л.О.Янович;
доктор фізико-математичних наук,
професор А.О.Чікрій;
доктор фізико-математичних наук,
професор Ю.А.Бєлов

Провідна організація: Інститут математики АН України

Захист дисертації відбудеться 28 червня 1994 р о 14 годині на засіданні спеціалізованої ради Д.068.18.16 в Київському університеті ім. Тараса Шевченка за адресою: 252127, Київ-127, проспект Академіка Глушкова, 6, факультет кібернетики, ауд. 40.

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці
Київського університету ім. Тараса Шевченка
(вул. Володимирська, 58.)

Автореферат розіслано 25 травня 1994 р.
Вчений секретар спеціалізованої ради
кандидат фізико-математичних наук,

доцент А.В.Кузьмін

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

<u>Актуальність теми.</u> Важливість дослідження задачі поліноміальної операторної інтерполяції обумовлена міркуваннями як теоретичного, так і практичного характеру. Це, по-перше, відсутність загальної теорії поліноміальної операторної інтерполяції, що містить в собі, як частинний випадок, класичну інтерполяцію функцій і узагальнює на операторному рівні основні аспекти поліноміальної інтерполяції. До таких належать: конструктивна побудова операторного інтерполянта, єдиність, властивість збереження інтерполянтом операторних поліномів відповідного степеня, узагальнення на випадок ермітової інтерполяції, аналіз точності інтерполяції, збіжність інтерполяційного процесу. Серед небагатьох публікацій в даній галузі найбільш цікавими є роботи таких авторів як Р.Кадісон, П.Прентер, У.Портер, П.І.Соболевський, С.Ульм, Л.О.Янович, В.Л.Рвачов, О.М.Литвин. Але наведені в цих роботах операторні інтерполянти або не конструктивні (у розумінні побудови), або не мають деяких важливих властивостей класичного поліноміального інтерполянта, як то: єдиність, збереження операторних поліномів того ж степеня та ін.

Актуальність досліджень в галузі поліноміальної операторної інтерполяції підтверджується також задачами практичного характеру. На практиці широко розповсюджені нелінійні системи, математичні моделі яких описуються поліноміальними операторами (поліноміальні системи). Підвищений інтерес дослідників до таких структур в першу чергу пояснюється досить простим їх математичним описом. Крім того, відомі аналітичні методи, розроблені для лінійних систем, можуть успішно застосовуватись у випадку полілінійних та поліноміальних систем. З іншого боку, вивчення багатьох нелінійних структур загального виду може бути зведено до вивчення їх поліноміальних наближень. Таким чином, теорія поліноміальних наближень, в деякому розумінні, є зв'язком між лінійною та нелінійною теоріями. Крім того, важливою обставиною є той факт, що досить часто інформація про систему міститься в знанні пар "вхід-вихід". Тому в межах поліноміальних систем задача ідентифікації зводиться до задачі поліноміальної операторної інтерполяції.

Мета роботи. Побудова основ загальної теорії поліноміальної операторної інтерполяції що містить в собі:

- необхідні та достатні умови існування інтерполяційного операторного полінома n-го степеня у гільбертовому та довільному векторному просторах,
- опис всієї множини таких поліномів, а також множини операторних інтерполянтів, зберігаючих операторні поліноми того ж степеня у цих просторах;
- узагальнення на випадок ермітової операторної інтерполяції у гільбертовому просторі;
- проведення аналізу точності наближень поліноміальних операторів за допомогою інтерполяційного методу.

Наукова новизна результатів роботи полягає:

- в побудові згладжуючого операторного полінома як елемента найкращого наближення в уведеному гільбертовому просторі $H(\lambda)$;
- в одержанні необхідної та достатньої умови існування інтерполяційного операторного полінома заданого степеня у гільбертовому та довільному векторному просторах;
- в побудові всієї множини інтерполяційних операторних поліномів, а також всієї множини інтерполянтів, зберігаючих поліноми того ж степеня в цих просторах;
- в одержанні необхідної та достатньої умови існування операторного полінома Ерміта заданого степеня у гільбертовому просторі;
- в побудові всієї множини операторних поліномів Ерміта заданого степеня, а також всієї множини поліномів Ерміта, зберігаючих операторні поліноми того ж степеня, у гільбертовому просторі;
- в одержанні оцінок точності наближень поліноміальних операторів методом інтерполяції в уведеному гільбертовому просторі $H_n(Y)$.

Слід відзначити, що оскільки в дисертації побудована вся множина поліноміальних операторних інтерполянтів заданого степеня у довільному векторному просторі, то результати названих вище авторів можуть розглядатися як частинний випадок результатів, одержаних в даній роботі.

Практична цінність. В дисертації необхідна та достатня умова розв'язуваності задачі поліноміальної операторної інтерполяції одержана в термінах лінійної алгебри і легко перевіряється на практиці для конкретних задач; наведена конструктивна побудова операторних інтерполянтів; одержані оцінки точності наближень поліноміальних операторів інтерполяційним методом у гільбертовому просторі $H_n(Y)$, показано, що точність будь-якого наближення поліноміального опернатора в метриці простору $H_n(Y)$ завжди можна підвищити за допомогою оператоної інтерполяції, одержана оцінка швидкості збіжності інтерполяційного операторного процесу для спеціально вибраної системи вузлів; розглянута можливість застосування поліноміальної операторної інтерполяції для розв'язування деяких задач практики.

На захист виносяться такі положення:

1. Побудова згладжуючого операторного полінома n-го степеня як елемента найкращого наближення у гільбертовому просторі $H(\lambda)$;
2. Необхідна та достатня умова розв'язуваності задачі поліноміальної операторної інтерполяції у гільбертовому та довільному векторному просторах;
3. Конструктивна побудова всієї множини інтерполяційних операторних поліномів заданого степеня, а також множини поліномів, що зберігають операторні поліноми того ж степеня у гільбертовому та довільному векторному просторах;
4. Необхідна та достатня умова розв'язуваності задачі Ерміта у гільбертовому просторі;
5. Конструктивна побудова всієї множини операторних поліномів Ерміта заданого степеня, а також множини поліномів Ерміта, що зберігають операторні поліноми того ж степеня у гільбертовому просторі;
6. Оцінки точності наближень поліноміальних операторів методом інтерполяції у гільбертовому просторі $H_n(Y)$.

Апробація результатів роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідались на міжнародній конференції по граничним елементам /Boundary elements IX/ (Штутгарт, ФРН, 1987 р.); всесоюзному семінарі "Питання оптимізації обчислень" (Алушта, 1987 р.); міжнародній конференції по чисельним методам та застосуванням (Софія, Болгарія, 1988 р.); семінарі "Питання оптимізації обчислень" (Київ, 1990 р.); семінарі академіка Самарського А.А. (Москва, 1992 р.); семінарі чл. кор. АН України Корнійчука М.П. (Київ, 1992 р.); математичному колоквіумі Лейпцігського університету (Лейпциг, ФРН, 1992 р.); семінарі проф. Е.Цайдлера (Лейпциг, ФРН, 1992 р.); семінарах проф. Макарова В.Л. (Київ, 1988 - 1994 р.); семінарі проф. Степанця О.І. (Київ, 1994 р.); семінарі проф. Чікрія А.А. (Київ, 1994 р.); викладацьких конференціях Київського університету (Київ, 1991 - 1993 р.).

Публікації. По темі дисертації опубліковано 19 робіт автора.

Структура та об'єм роботи. Дисертація об'ємом 196 машинописних сторінок складається з вступу, трьох розділів, висновків, списку літератури, що містить 134 найменування.

Зміст дисертації. У вступі розглянута постановка задачі поліноміальної операторної інтерполяції, обгрунтовується актуальність проблеми досліджень, наводиться стислий огляд наукових праць, присвячених питанням поліноміальної операторної інтерполяції, зміст дисертації по розділам, а також порівняння раніш одержаних результатів по даній тематиці з результатами дисертаційної роботи.

Перший розділ дисертації "Поліноміальна інтерполяція операторів у гільбертових просторах" складається з дев'яти параграфів. В § 1 вводиться гільбертовий простір $R(\lambda)$ дійсних функционалів та будується згладжуючий функціональний поліном n-го степеня типу Вольтерра як елемент найкращого наближення в метриці цього простору на множині таких поліномів n-го степеня. Цей результат подано теоремою 1.1.1. В § 2 розглянуто узагальнення теореми 1.1.1. на випадок неперервних операторних поліномів n-го степеня. Нехай μ деяка міра на сепарабельному гільбертовому просторі X з скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_x$, така, що відповідний кореляційний оператор B є ядерним та $Ker B = \emptyset$. Розглянемо гильбертів простір $H(\lambda)$, $\lambda \in [0,\infty)$ операторів $F: X \to Y$, Y гильбертів простір з скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_y$. Скалярний добуток в $H(\lambda)$ визначимо таким чином

$$(P,Q)_{H(\lambda)} = (P,Q)_{H(o)} + \lambda (P,Q)_m ,$$

$$(P,Q)_{H(o)} = \sum_{k=o}^{\infty} \int_X \cdots \int_X \Big(\frac{1}{k!} P^{(k)}(\Theta) v_k v_{k-1} \dots v_1 ,$$

$$\cdot \frac{1}{k!} Q^{(k)}(\Theta) v_k v_{k-1} \ldots v_1 \Big]_Y \mu(dv_k)\mu(dv_{k-1})\ldots\mu(dv_1) ,$$

$$(P,Q)_m = \sum_{k=1}^{m} (P(Bx_k), Q(Bx_k))_Y , \quad P,Q \in H(\lambda) ,$$

$(x_k)_{k=1}^{m} \subset X$, Θ нуль элемент простору X; $P^{(k)}(\Theta)v_k v_{k-1}\ldots v_1$ диференціал Гато k-го порядку оператора P в нулі по напрямкам $v_1, v_2, \ldots, v_k \in X$. Введемо такі позначення. Нехай Π_n лінійний многовид ь $H(\lambda)$ неперервних операторних поліномів степеня n

$$\Pi_n = \{ P_n(x) = L_0 + L_1 x + L_2 x^2 + \ldots + L_n x^n \} ,$$

$L_k x^k$ - k-та операторна степень,

$$\Gamma = \left\| \sum_{p=1}^{n} (Bx_i, x_j)_x^p \right\|_{i,j=1}^{m} , \quad A(\lambda) = (E + \lambda\Gamma)^{-1} ,$$

E одинична матриця розмірності $(m\times m)$,

$$\vec{F} = (F(Bx_i))_{i=1}^{m} \in Y^m , \quad \vec{e} = (1,1,\ldots,1) \in R_m ,$$

$$\langle \cdot \rangle = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_i , \quad \alpha_i \in Y , \ \beta_i \in R_1 ,$$

$$a(\lambda) = \langle \vec{F} - \vec{P}_n^{*} , \lambda A(\lambda)\vec{e} \rangle / (1 + (\lambda A(\lambda)\vec{e} , \vec{e})) ,$$

$(\cdot,\cdot)$ скалярний добуток в R_m, P_n^{*} элемент найкращого наближення до F на множині Π_n в просторі $H(0)$.

<u>Теорема 1.2.1.</u> *Для $F \in H(\lambda)$ операторний поліном*

$$P_n^{\lambda}(x,F) = P_n^{*}(x,F) + a(\lambda) +$$

$$+ \langle \vec{F} - \vec{P}_n^{*} - a(\lambda)\vec{e} , \lambda A(\lambda) \sum_{p=1}^{n} ((x_i,x)_x^p)_{i=1}^{m} \rangle , \qquad (1)$$

є згладжуючим, тобто розв'язком екстремальної задачі

$$\inf \| F - Q_n \|_{H(\lambda)} , \quad Q_n \in \Pi_n \qquad (2)$$

і цей розв'язок єдиний.

Слід зауважити, що у випадку наближеної інформації про $F(Bx_i)$, $i = \overline{1,m}$ поліном $P_n^{\lambda}(x,F)$ має самостійний інтерес.

В § 3 знаходится операторний поліном $P_n^{\infty}(x)$ як границя згладжуючого коли $\lambda \to \infty$. Доводиться низка допоміжних результатів, на основі яких здійснюється цей граничний перехід.

<u>Теорема 1.3.1.</u> *Які б не були пари (Bx_i), $F(Bx_i))$, $i = \overline{1,m}$, операторний поліном $P_n^{\infty}(x)$, як границя згладжуючого, існує і має вигляд*

$$P_n^{\infty}(x) = P_n^{*}(x;F) + a(\infty) +$$

$$+ \langle \vec{F} - \vec{P}_n^{*} - a(\infty)\vec{e} \ , \ \Gamma^{+} \sum_{p=1}^{n} ((x_i, x)_x^{p})_{i=1}^{m} \rangle \ , \tag{3}$$

де Γ^{+} *псевдообернена матриця Мура-Пенроуза до матриці* Γ,

$$a(\infty) = \begin{cases} \dfrac{\langle \vec{F} - \vec{P}_n^{*} \ , \ \Gamma^{+}\vec{e} \rangle}{1 + (\Gamma^{+}\vec{e} \ , \ \vec{e})} \ , & \|A_0 \vec{e}\| = 0 \ , \\ \dfrac{\langle A_0 \vec{F} \ , \ \vec{e} \rangle}{\|A_0 \vec{e}\|^2} - P_n^{*}(0,F) \ , & \|A_0 \vec{e}\| \neq 0 \ , \end{cases}$$

$A_0 = E - \Gamma^{+}\Gamma$, $\|\cdot\|$ *норма в* R_m.

В § 4 наведена необхідна та достатня умова існування інтерполяційного для F у вузлах Bx_i, $i = \overline{1,m}$ операторного полінома n-го степеня (B самоспряжений, додатний оператор, який може бути вибраний одиничним). Доведено, що при виконанні цієї умови операторний поліном $P_n^{\infty}(x)$ є інтерполяційним для F у вузлах Bx_i, $i = \overline{1,m}$.

<u>Теорема 1.4.1.</u> *Для розв'язуваності задачі поліноміальної операторної інтерполяції у гільбертовому просторі X з умовами*

$$P_n(Bx_i) = F(Bx_i) \ , \quad i = \overline{1,m} \ , \quad P_n \in \Pi_n \tag{4}$$

необхідним і достатнім є виконання рівності

$$\left[A_0 - \frac{A_0\vec{e}\,(A_0\vec{e})'}{\delta_0(\|A_0\vec{e}\|) + \|A_0\vec{e}\|^2} \right] \vec{F} = \vec{\Theta} \in Y^m \ , \tag{5}$$

де $\delta_0(0) = 1$, $\delta_0(x) = 0$, $x \neq 0$.

В § 5 подано опис всієї множини $\Pi_n^{I}(F)$ інтерполяційних операторних поліномів степеня n у гільбертовому просторі X.

<u>Теорема 1.5.1.</u> *Нехай виконується умова (5). Тоді формула*

$$P_n^{I}(x) = Q_n(x) + \langle \vec{F} - \vec{Q}_n \ , \ \Gamma^{+} \sum_{p=1}^{n} ((x_i, x)_x^{p})_{i=1}^{m} \rangle \ , \tag{6}$$

коли $Q_n(x)$ *пробігає*

$$\Pi_n^{0}(F) = \left\{ P_n(x) + \left[\frac{\langle A_0\vec{F} \ , \ \vec{e} \rangle}{\delta_0(\|A_0\vec{e}\|) + \|A_0\vec{e}\|^2} - P_n(\Theta) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[1 - \delta_0(\|A_0\vec{e}\|) \right] : P_n \in \Pi_n \right\} , \tag{7}$$

описує всю множину $\Pi_n^I(F)$ інтерполяційних для F у вузлах $\{Bx_i\}_{i=1}^{\infty}$ операторних поліномів степеня n у гільбертовому просторі X.

В § 6 розглянута екстремальна властивість операторного полінома $P_n^*(x)$ в гільбертовому просторі $H(0)$.

Теорема 1.6.1. *Нехай виконується умова (5). Тоді P_n^*, визначений за формулою (3), є елемент найкращого наближення до F на множині $\Pi_n^I(F)$ у гільбертовому просторі $H(0)$, тобто має місце рівність*

$$\| F - P_n^* \|_{H(0)} = \inf \| F - P_n \|_{H(0)} , \quad P_n \in \Pi_n^I(F) . \quad (8)$$

При цьому розв'язок задачі (8) буде єдиним.

В § 7 наведено опис всієї множини $\Pi_n^{cI}(F)$ інтерполяційних операторных поліномів степеня n, що зберігають операторні поліноми того ж степеня. Позначимо через $\Pi_n(F)$ множину поліномів степеня n, що являють собою операторні функції від F.

Визначення. Операторний поліном $P_n(x;F)$ з $\Pi_n(F)$ назвемо c-поліномом, якщо він задовольняє умові

$$P_n^c(x;F) = F(x) , \quad \forall F \in \Pi_n , \quad \forall x \in X .$$

Лема 1.7.1. *Нехай $P_n^*(x;F)$ деякий c-поліном. Тоді вся множина $\Pi_n^c(F)$ c-поліномів описується за формулою*

$$\Pi_n^c(F) = \{ P_n^c(x;F) = P_n(x;F) - P_n(x;P_n^*) + P_n^*(x;F) , \quad P_n(x;F) \in \Pi_n(F) \} . \quad (9)$$

Позначимо через $\Pi_n^{oc}(F)$ множину

$$\Pi_n^{oc}(F) = \left\{ P_n(x) + \left[\frac{\langle A_0 \vec{F} , \vec{e} \rangle}{\delta_0(\|A_0 \vec{z}\|) + \|A_0 \vec{z}\|^2} - P_n(\Theta) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[1 - \delta_0(\|A_0 \vec{z}\|) \right] : P_n \in \Pi_n^c(F) \right\} .$$

Теорема 1.7.1. *Нехай виконується умова (5). Тоді формула (6), коли $Q_n(x)$ пробігає $\Pi_n^{oc}(F)$, описує всю множину інтерполяційних для F у вузлах $\{Bx_i\}_{i=1}^{\infty}$ операторних поліномів степеня n, зберігаючих поліноми того ж степеня.*

Зауваження. Оскільки будь-який поліном $P_n^*(x;F)$ найкращого наближення до F являє собою c-поліном, то $P_n^*(x)$ є операторним c-інтерполянтом.

В § 8 розглянуто випадок, коли інтерполяційний операторний поліном степеня n, визначений на гільбертовому просторі X, завжди існує, тобто задача полиномиальної операторної інтерполяції розв'язувана. Доводиться низка допоміжних результатів, в тому числі і лема 1.8.1 про оцінку знизу рангу матриці Г (суми степеней Адамара), котра має самостійний інтерес.

<u>Лема 1.8.1.</u> *Справедлива нерівність*

$$rg\Gamma \geq \min\left[\tilde{n}.\ m - \delta_0\left[\prod_{i=1}^{m}\| x_i \|_x\right]\right], \tag{10}$$

$$\tilde{n} = \begin{cases} n, & rg\Gamma_1 = 1, \\ n+1, & rg\Gamma_1 \geq 2, \end{cases} \qquad \Gamma_1 = \| (Bx_i, x_j)_x \|_{i,j=1}^{m}.$$

При цьому, коли $rg\Gamma_1 = 1$, *то нерівність (10) перетворюється в рівність.*

Використовуючи ці результати, доводиться така теорема.

<u>Теорема 1.8.1.</u> *Якщо* $m \leq n + 1$, *то задача поліноміальної операторної інтерполяції в гільбертовому просторі завжди розв'язувана.*

В § 9 розглянута оцінка залишкового члена і теорема збіжності для одного виду інтерполяційного операторного процесу. Нехай $F: X \to Y$, X, Y банахови простори. Позначимо через

$$M = \{ x : \| x \| \leq R,\ R \geq 1 \} \subset X,$$

де R таке, що $(x_i)_{i=1}^{n+1} \subset X$. Запишемо інтерполяційний у вузлах x_i, $i = \overline{1, n+1}$ операторний поліном Ньютона у вигляді

$$P_n^I(x) = F(x_1) + \ldots + F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})(x - x_1)\ldots(x - x_n),$$

де $F(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})$ поділена операторна різниця k-го порядку,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})(x - x_k)(x - x_{k-1})\ldots(x - x_1) =$$

$$= \int_0^1\int_0^{\tau_2}\ldots\int_0^{\tau_k} F^{(k)}\left[x_1 + \sum_{i=1}^{k}\tau_{i+1}(x_{i+1} - x_i)\right](x - x_k)\ldots(x - x_1)\times$$

$$\times\, d\tau_{k+1}\ldots d\tau_2 .$$

Тут k-мірний інтеграл розуміється як інтеграл Бохнера, якщо він існує.

<u>Теорема 1.9.1.</u> *Нехай оператор F цілий. Тоді послідовність інтерполяційних операторних поліномів* $P_n^I(x)$ *збігається при* $n \to \infty$ *до* $F(x)$ *рівномірно в кулі M.*

<u>Другий розділ</u> дисертації "Узагальнення: клас інтерполяційних операторних формул, інтерполяція Ерміта, інтерполяція в довільних

векторних просторах" присвячений узагальненням результатів першого і складається з чотирьох параграфів. В § 1 коротко формулюються основні результати розділу. В § 2 будується клас інтерполяційних операторних формул, пов'язаних з узагальненими оберненими до матриці Г матрицями Γ^-; наведена необхідна та достатня умова існування інтерполяційного операторного полінома в термінах матриці Z, строками якої є координати лінійно незалежних власних векторів матриці Г з нульовим власним числом; одержано опис всієї множини поліноміальних операторних інтерполянтів n-го степеня та всієї множини с-інтерполянтів в термінах матриць Z і Γ^-. Нехай

$$\operatorname{rg}\Gamma = \operatorname{rg}\left\| \sum_{p=1}^{n} (x_i, x_j)_x^p \right\|_{i,j=1}^{m} = m - r, \quad r \ge 0,$$

$$Z = \| \vec{c}_1 \ \vec{c}_2 \ \dots \ \vec{c}_r \|^T, \quad \Gamma\vec{c}_i = \vec{0}, \quad i = \overline{1,r},$$

$\vec{c}_i$ лінійно незалежні.

Теорема 2.2.1. *Для розв'язуваності задачі поліноміальної операторної інтерполяції*

$$P_n(x_i) = F(x_i), \quad i = \overline{1,m}, \quad P_n \in \Pi_n \tag{11}$$

в гільбертовому просторі X необхідним і достатнім є виконання умови

$$\left[E - \frac{Z\vec{e}(Z\vec{e})'}{\delta_0(\|Z\vec{e}\|) + \|Z\vec{e}\|^2} \right] Z\vec{F} = \vec{\theta} \in Y^r, \tag{12}$$

E одинична матриця розмірності $(r \times r)$.

Позначимо через $\Pi_n^\circ(F)$ множину

$$\Pi_n^\circ(F) = \left\{ P_n(x) + \left[\frac{\langle Z\vec{F}, Z\vec{e} \rangle}{\delta_0(\|Z\vec{e}\|) + \|Z\vec{e}\|^2} - P_n(\theta) \right] \times \right.$$
$$\left. \times \left[1 - \delta_0(\|Z\vec{e}\|) \right] : P_n \in \Pi_n \right\}, \tag{13}$$

через Γ^- - узагальнену обернену матрицю до матриці Г

Теорема 2.2.2. *Нехай виконується умова (12). Тоді формула*

$$P_n^I(x) = Q_n(x) + \langle \vec{F} - \vec{Q}_n, \Gamma^- \sum_{p=1}^{n} ((x_i, x)_x^p)_{i=1}^m \rangle, \tag{14}$$

коли $Q_n(x)$ пробігає $\Pi_n^\circ(F)$ в (13) описує всю множину інтерполяційних операторних поліномів n-го степеня для F у вузлах $(x_i)_{i=1}^m \subset X$.

<u>Зауваження.</u> Оскільки узагальнена обернена матриця Γ^- не єдина, то формула (14) являє собою клас інтерполяційних операторних формул у гільбертовому просторі X.

<u>Теорема 2.2.3.</u> *Нехай виконується умова (12) а у визначенні множини $\Pi_n^\circ(F)$ в (13) $\Pi_n \equiv \Pi_n^\circ(F)$ є множиною с-поліномів n-го степеня. Тоді формула (14) описує всю множину с-інтерполянтів n-го степеня у гільбертовому просторі X.*

В § 3 розглянуто узагальнення поліноміальної операторної інтерполяції на випадок інтерполяції Ерміта. Нехай оператор F диференційований по Гато у вузлах $(x_i)_{i=1}^m \subset X$ k_i, $i = \overline{1,m}$ разів у кожному. Треба знайти такий операторний поліном $P_n \in \Pi_n$, який задовольняє інтерполяційним умовам Ерміта

$$P_n^{(i)}(x_\ell)v_i^\ell v_{i-1}^\ell \ldots v_1^\ell = F^{(i)}(x_\ell)v_i^\ell v_{i-1}^\ell \ldots v_1^\ell, \qquad (15)$$

$$i = \overline{0,k_\ell},\ \ell = \overline{1,m}.$$

Уведемо позначення:

$$g_n(u,v) = \sum_{p=1}^{n} (u,v)_x^p,\quad u,\ v \in X;$$

T симетрична матриця розмірністю $(k\times k)$,

$$k = \sum_{i=1}^{m} (k_i+1),\quad T = \| t^{\ell s} \|_{\ell,s=1}^m,$$

$\| t^{\ell s} \|$ матричний блок розмірністю $(k_\ell+1)\times(k_s+1)$

$$\| t^{\ell s} \| = \| t_{ij}^{\ell s} \|_{i=\overline{0,k_\ell},\ j=\overline{0,k_s}},$$

$$t_{ij}^{\ell s} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial\alpha_1\ldots\partial\alpha_i\,\partial\beta_1\ldots\partial\beta_j} g_n\left[x_\ell + \sum_{p=1}^{i} \alpha_p v_p^\ell,\ x_s + \sum_{p=1}^{j} \beta_p v_p^s \right] \Bigg|_{\alpha_1=\ldots=\alpha_i=\beta_1=\ldots\beta_j=0},$$

T^- узагальнена обернена матриця до матриці T, $A = E - T^-T$;

$$\overrightarrow{F_э} = \left\{ F^{(i)}(x_\ell)v_i^\ell v_{i-1}^\ell \ldots v_1^\ell,\ i = \overline{0,k_\ell},\right\}_{\ell=1}^m,$$

$$\overrightarrow{P_{nэ}} = \left\{ P_n^{(i)}(x_\ell)v_i^\ell v_{i-1}^\ell \ldots v_1^\ell,\ i = \overline{0,k_\ell},\right\}_{\ell=1}^m,$$

$$\overrightarrow{e_э} = (1,\ \underbrace{0,\ldots,0}_{k_1},\ 1\ \underbrace{0,\ldots,0}_{k_2},\ \ldots,\ 1,\ \underbrace{0,\ldots,0}_{k_m}) \in R_k,$$

<u>Теорема 2.3.5.</u> *Нехай* $rgT = k - r$, $r \ge 0$,

$$Z = \| \vec{c}_1 \ \vec{c}_2 \ \dots \ \vec{c}_r \|^T, \quad \Gamma\vec{c}_i = \vec{0}, \quad i = \overline{1,r},$$

$\vec{c}_i$ *лінійно незалежні. Тоді для розв'язуваності інтерполяційної задачі Ерміта (15) в гільбертовому просторі X необхідна та достатня є виконання умови*

$$\left[E - \frac{Z\vec{e}_\ni \, (Z\vec{e}_\ni)'}{\delta_0(\|Z\vec{e}_\ni\|) + \|Z\vec{e}_\ni\|^2} \right] Z\vec{F}_\ni = \vec{\Theta} \in Y^r, \tag{16}$$

де E *одинична матриця розмірністю* $(r \times r)$, $\|\cdot\|$ *норма в* R_r.

Позначимо через $\Pi_n^o(F)$ множину

$$\Pi_n^o(F) = \left\{ P_n(x) + \left[\frac{\langle Z\vec{F}_\ni, Z\vec{e}_\ni \rangle}{\delta_0(\|Z\vec{e}_\ni\|) + \|Z\vec{e}_\ni\|^2} - P_n(\Theta) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[1 - \delta_0(\|Z\vec{e}_\ni\|) \right] : P_n \in \Pi_n \right\} \tag{17}$$

<u>Теорема 2.3.6.</u> *Нехай виконується умова (16). Тоді формула*

$$P_n^\ni(x) = Q_n(x) + \langle \vec{F}_\ni - \vec{Q}_{n\ni}, \, T^- \left\{ \frac{\partial^i}{\partial\alpha_1 \dots \partial\alpha_i} \vartheta_n(x_\ell + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{i} \alpha_p v_p^\ell, \, x) \Big|_{\alpha_1 = \dots = \alpha_i = 0}, \; i = \overline{0,k_\ell} \right\}_{\ell=1}^{m} \rangle, \tag{18}$$

коли $Q_n(x)$ *пробігає* $\Pi_n^o(F)$ *в (17), описує всю множину операторних поліномів Ерміта* n*-го степеня в гільбертовому просторі* X, *які задовольняють умовам (15).*

<u>Теорема 3.3.7.</u> *Нехай виконується умова (16) і в* $\Pi_n^o(F)$ *в (17)* $\Pi_n \equiv \Pi_n^c(F)$ *є множиною с-поліномів. Тоді формула (18) описує всю множину с-поліномів Ерміта в гильбетовому просторі X, які задовольняють умовам (15).*

Нехай X - сепарабельний гільбертовий простір. B - кореляційний оператор деякої міри μ на X ядерний і такий, що $\mathrm{Ker} B = \emptyset$. Позначимо через $\Pi_n^\ni(F)$ множину операторних поліномів, які задовольняють інтерполяційним умовам

$$P_n^{(i)}(Bx_\ell) Bv_i^\ell Bv_{i-1}^\ell \dots Bv_1^\ell = F^{(i)}(Bx_\ell) Bv_i^\ell Bv_{i-1}^\ell \dots Bv_1^\ell,$$

$$i = \overline{0,k_\ell}, \quad \ell = \overline{1,m}.$$

Розглянуто поліном Ерміта конкретного виду з $\Pi_n^{\to}(F)$. В теоремі 2.3.8 доведено, що він являє собою розв'язок екстремальної задачі

$$\inf \; \| F - P_n \|_{H(o)} \, , \quad P_n \in \Pi_n^{\to}(F) \, .$$

В § 4 результати §2 узагальнюються на випадок довільного векторного простору X. Нехай серед вузлів x_i, $i = \overline{1,m}$ є k лінійно незалежних, $1 \le k \le m$. Без зменшення загальності будемо вважати їх першими k вузлами $x_1, x_2, \dots, x_k$. Тоді

$$x_i = \sum_{p=1}^{k} \alpha_{ip} x_p \, , \quad \alpha_{ip} \in R_1 \, , \quad i = \overline{1,m} \, .$$

В алгебраїчно спряженому просторі X' існують k лінійних функционалів $l^{(p)}(x)$, $p = \overline{1,k}$, визначених усюди на X і таких, що

$$l^{(p)}(x_q) = \delta_{pq} \, , \; p, \, q = \overline{1,k} \, ,$$

δ_{pq} символ Кронекера. Побудуємо m лінійних функционалів

$$l_i(x) = \sum_{p=1}^{k} \alpha_{ip} l^{(p)}(x) \, , \quad i = \overline{1,m} \, .$$

і матриці

$$\Gamma_p = \| \, l_i^p(x_j) \, \|_{i,j=1}^{m} \, , \quad \Gamma = \sum_{p=1}^{n} \Gamma_p \, ,$$

Γ^- узагальнену обернену матрицю до матриці Г, Z матрицю, строками якої є координати лінійно незалежних власних векторів матриці Г з нульовим власним числом.

<u>Теорема 2.4.1.</u> *Для розв'язуваності задачі поліноміальної операторної інтерполяції (11) у векторному просторі X необхідно та достатньо виконання умови (12) з визначеною вище матрицею Z. Якщо ця умова виконується, то формула*

$$P_n^I(x) = Q_n(x) + \langle \vec{F} - \bar{Q}_n' \, , \; \Gamma^- \sum_{p=1}^{n} (l_i^p(x))_{i=1}^{m} \rangle \, , \qquad (19)$$

коли $Q_n(x)$ пробігає $\Pi_n^o(F)$ в (13), описує всю множину інтерполяційних для F операторних поліномів n-го степеня у векторному просторі X, що задовольняють умовам (11).

<u>Теорема 2.4.2.</u> *Якщо $m \le n + 1$, то задача поліноміальної операторної інтерполяції у векторному просторі X завжди розв'язувана.*

<u>Теорема 2.4.3.</u> *Нехай виконується умова (12) з визначеною вище матрицею Z. Тоді формула (19), коли $Q_n(x)$ пробігає*

$$\Pi_n^{oc}(F) = \left\{ P_n(x) + \left[\frac{\langle Z\vec{F} \, , \, Z\vec{e} \rangle}{\delta_o(\|Z\vec{e}\|) + \|Z\vec{e}\|^2} - P_n(\theta) \right] \times \right.$$

$$\times \left[1 - \delta_0(\|Z\vec{e}\|) \right] : P_n \in \Pi_n^c(F) \Big\},$$

де $\Pi_n^c(F)$ *множина c-поліномів, описує всю множину інтерполяційних для* $\vec{F}$ *у вузлах* $(x_i)_{i=1}^m \subset X$ *операторних поліномів* n*-го степеня у векторному просторі* X, *що зберігають поліноми того ж степеня.*

Для опису всієї множини $\Pi_n^c(F)$ c-поліномів n-го степеня, визначеної за формулою (9), необхідно існування принаймні одного c-полінома n-го степеня (лема 1.7.1). В цьому параграфі розглянуті три приклади побудови таких поліномів.

Нехай (x_a) - алгебраїчний базис у векторному просторі X, який містить вузли x_i, $i = \overline{1,k}$ ($x_1, x_2, \ldots, x_k$ лінійно незалежні). Позначимо через $\mathcal{Z}_0$ лінійну оболонку, побудовану за системою елементів $(x_a)\setminus(x_i)_{i=1}^k$.

Теорема 2.4.4. *Нехай* X *локально опуклий простір, система вузлів* $(x_i)_{i=1}^m$ *така, що*

$$\det\Gamma \neq 0, \quad \vec{F} = (F(x_i+y))_{i=1}^m, \quad \vec{Q}_n = (Q_n(x_i+y))_{i=1}^m, \quad y \in \mathcal{Z}_0 .$$

Тоді $\forall y \in \mathcal{Z}_0$ *система вузлів* $(x_i + y)_{i=1}^m$ *буде інтерполяційною для операторного полінома (19).*

Теорема 2.4.5. *Нехай виконуються умови теореми 2.4.4. Тоді формула (19)* $\forall\, Q_n(x) \in \Pi_n^{oc}(F)$ *описує всю множину інтерполяційних c-поліномів в локально опуклому векторному просторі* X *у вузлах*

$$(x_i + y)_{i=1}^m \subset X, \quad \forall y \in \mathcal{Z}_0 .$$

Нехай

$$V = \left\| \sum_{p=0}^{n} \ell_i^p(x_j) \right\|_{i,j=1}^{m}, \quad 0^0 = 1, \quad rgV = m - r, \quad r \geq 0 ;$$

$$Z_V = \| \vec{c}_1 \ \vec{c}_2 \ \ldots \ \vec{c}_r \|^T, \quad V\vec{c}_i = \vec{0}, \quad i = \overline{1,r},$$

$\vec{c}_i$ лінійно незалежні.

Теорема 2.4.6. *Для розв'язуваності задачі поліноміальної операторної інтерполяції (11) у векторному просторі* X *необхідним і достатнім є виконання умови*

$$Z_V\vec{F} = \vec{\theta} \in Y^r . \qquad (20)$$

Якщо ця умова виконується, то формула

$$P_n^I(x) = Q_n(x) + \langle \vec{F} - \vec{Q}_n, V^- \sum_{p=0}^{n} (\ell_i^p(x))_{i=1}^m \rangle, \quad Q_n \in \Pi_n \qquad (21)$$

описує всю множину інтерполяційних для F поліномів n-го степеня у векторному просторі X, задовольняючих умовам (11).

Зауваження. Нехай $m = n + 1$, $X = Y = R_1$. Тоді множина поліномів (21) складається з єдиного интерполяційного алгебраїчного полінома n-го степеня виду

$$P^I_n(x) = (\vec{F}, V^{-1} \sum_{p=0}^{n} \vec{\eta}_p x^p), \qquad (22)$$

де $\vec{\eta}_p = (x^p_1, x^p_2, \dots, x^p_m)$, $p = \overline{0,n}$, $0^0 = 1$, $(\cdot,\cdot)$ скалярний добуток в R_m.

Нехай Π_1 множина лінійних операторів, $Q_1 : X \to Y$, X, Y векторні простори.

Теорема 2.4.7. *Для розв'язуваності задачі лінійної операторної інтерполяції у векторному просторі X необхідна та достатня є виконання умови*

$$Z\vec{F} = \vec{\theta} \in Y^m, \qquad (23)$$

де $Z = \| \vec{c_1}\ \vec{c_2} \dots \vec{c_k} \|^T$, $\Gamma\vec{c_i} = \| l_i(x_j) \|^m_{i,j=1}\vec{c_i} = \vec{0}$, $\vec{c_i}$, $i = \overline{1,k}$ *лінійно незалежні. Якщо ця умова виконується, то формула*

$$P^I_1(x) = Q_1(x) + \langle \vec{F} - \vec{Q}_1, \Gamma^-(l_i(x))^m_{i=1} \rangle,$$

описує всю множину інтерполяційних у вузлах $(x_i)^m_{i=1}$ *лінійних операторів у векторному просторі X.*

Зауваження. Теореми 2.4.4 - 2.4.7 мають місце в гільбертовому просторі X при заміні у відповідних формулах $l_i(x)$ на $(x, x_i)_x$.

Третій розділ "Аналіз точності наближень поліноміальних операторів в гільберових просторах методом інтерполяції" присвячений оцінкам точності наближень поліноміальних операторів методом інтерполяції в уведеному гильбертовому просторі $H_n(Y)$, а також застосуванням операторної інтерполяції для розв'язання деяких практичних задач. Розділ складається з восьми параграфів. В § 1 подано короткий огляд основних результатів розділу. В § 2 наведені необхідні позначення та постановка задачі наближень поліноміальних операторів інтерполяційним методом. Нехай X, Y сепарабельні гільбертові простори, μ деяка міра на X така, що її кореляційний оператор B є ядерним і $KerB \neq \emptyset$. Розглядається гільбертовий простір $H_n(Y)$ поліноміальних операторів n-го степеня $P_n : X \to Y$

$$P_n(x) = L_0 + L_1 x + L_2 x^2 + \ldots + L_n x^n \tag{25}$$

з скалярним добутком

$$(P_n, Q_n) = \sum_{k=0}^{n} \int_X \ldots \int_X \Big[\frac{1}{k!} P_n^{(k)}(\theta) v_k v_{k-1} \ldots v_1 ,$$

$$, \frac{1}{k!} Q_n^{(k)}(\theta) v_k v_{k-1} \ldots v_1 \Big]_Y \mu(dv_k)\mu(dv_{k-1}) \ldots \mu(dv_1) \tag{26}$$

і нормою $\| P_n \|_{H_n(Y)} = (P_n, P_n)^{1/2}_{H_n(Y)}$,

$$P_n^{(k)}(\theta) v_k v_{k-1} \ldots v_1 = \frac{\partial^k}{\partial\alpha_1 \ldots \partial\alpha_k} P_n\Big[\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \Big]\Big|_{\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0}$$

$$\alpha_i \in R_1 , \quad i = \overline{1,k} .$$

Нехай $\hat{P}_n(x) \in H_n(Y)$ деяке наближення оператора $P_n(x)$ виду

$$\hat{P}_n(x) = L_0 + \hat{L}_1 x + \hat{L}_2 x^2 + \ldots + \hat{L}_n x^n . \tag{27}$$

Поставимо у відповідність поліномам $P_n(x)$, $\hat{P}_n(x)$ поліноміальний оператор n-го степеня $P^I_{n,m} \in H_n(Y)$

$$P^I_{n,m}(x) = L_0 + L^I_1 x + L^I_2 x^2 + \ldots + L^I_n x^n , \tag{28}$$

$$L^I_k x^k = \hat{L}_k x^k - \frac{1}{k!} \langle \vec{\delta}_k , \Gamma_k^{-1} \vec{l}_k(x) \rangle , \quad k = \overline{1,n} ;$$

$$\vec{\delta}_k = \{ \delta_k^{(k)}(\theta) B x_{i_k} B x_{i_{k-1}} \ldots B x_{i_1} , \ \forall\, 1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le m \} ,$$

$$\delta_k(x) = \hat{L}_k x^k - L_k x^k ,$$

$\{x_i\}_{i=1}^{m} \subset X$ лінійно незалежна система елементів,

$$\vec{l}_k(x) = (l_{1k}(x), l_{2k}(x), \ldots , l_{M_k k}(x)) =$$

$$= \{ (x, x_{i_1})_X (x, x_{i_2})_X \ldots (x, x_{i_k})_X , \ \forall\, 1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le m \} ,$$

$M_k = C^k_{m+k-1}$, Γ_k матриця Грама з елементами

$$(l_{ik}, l_{jk})_{H_k(R_1)} , \quad i, j = \overline{1, M_k} , \quad k = \overline{1,n} ,$$

$$\langle \cdot \rangle = \sum_{i=1}^{M_k} \alpha_i \beta_i , \quad \alpha_i \in Y , \quad \beta_i \in R_1 .$$

Розглядаються похибки

$$\Delta(x) = \hat{P}_n(x) - P_n(x) , \quad \Delta^I_m(x) = P^I_{n,m}(x) - P_n(x) .$$

Далі показано (теорема 3.4.1), що $P^I_{n,m}(x)$ є інтерполяційним для $P_n(x)$ з інтерполяційними умовами Ерміта

$$P^{I\,(i)}_{n,m}(\theta)Bx_{k_i}Bx_{k_{i-1}}\,Bx_{k_1} = P^{(i)}_{n}(\theta)Bx_{k_i}Bx_{k_{i-1}}\,Bx_{k_1}\ ,$$

$$\forall\ 1 \le k_1 \le k_2 \le \ldots \le k_i \le m\ ,\ \ i = \overline{0,n}\ .$$

Основна задача полягає в проведенні аналізу похибки інтерполяції $\Delta^I_m(x)$ в метриці простору $H_n(Y)$ та порівняння її з похибкою $\Delta(x)$ в цій метриці.

В § 3 доводяться деякі допоміжні результати, необхідні для подальшого викладання. В § 4 наведені основні теореми аналізу точності інтерполяції поліноміальних операторів.

Теорема 3.4.2. *Нехай система елементів $\{x_i\}_{i=1}^{m}$ лінійно незалежна в X і послідовність Bx_i, $i = \overline{1,m}$ така, що виконується принаймі одна з n умов*

$$\delta_k^{(k)}(\theta)Bx_{i_k}Bx_{i_{k-1}}\ldots Bx_{i_1} = k!\delta_k(Bx_{i_1}Bx_{i_2}\ldots Bx_{i_k}) \ne \theta\ ,\qquad (29)$$

$$1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le m\ ,\ \ k = \overline{1,n}\ .$$

Тоді

$$\| \Delta^I_m \|_{H_n(Y)} < \| \Delta \|_{H_n(Y)}\ .$$

Таким чином, в умовах теореми 3.4.2 яке б не було наближення $\hat{P}_n$ поліноміального оператора P_n, точність його в метриці простору $H_n(Y)$ завжди можна підвищити за допомогою операторної інтерполяції (навіть з використанням лише одного інтерполяційного вузла).

Теорема 3.4.3. *Нехай система элементів $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ лінійно незалежна. Тоді*

$$\| \Delta^I_{m+1} \|_{H_n(Y)} \le \| \Delta^I_m \|_{H_n(Y)}\ ,\quad \forall\ m = 1,2,\ldots\ .\qquad (30)$$

Якщо $(Bx_i,x_j)_x = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots$ і виконуються умови (29), то нерівність (30) стає строгою.

Теорема 3.4.4. *Нехай $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ є повною системою в X. Тоді має місце збіжність інтерполяційного процесу $P^I_{n,m}(x)$ до $P_n(x)$ в метриці простору $H_n(Y)$, тобто*

$$\lim_{m\to\infty} \| \Delta^I_m \|_{H_n(Y)} = 0\ .$$

Теорема 3.4.5. *Нехай $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ортонормований базис в X, складений з власних елементів оператора B. Тоді справедлива оцінка*

$$\| \Delta^I_m \|^2_{H_n(Y)} \le C_n(\sigma m^{\sigma})^{-1}\ ,$$

де $\sigma = \sigma(B) > 0$, C_n не залежна від m додатня константа.

Нехай тепер $\{y_p\}_{p=1}^{\infty}$ ортонормований базис в Y. Розглянемо в

$H_n(Y)$ лінійну оболонку $Z(m)$, побудовану за системою элементів

$$\{\ell_{ks}(x)y_p\}\ ,\quad k = \overline{1,M_s}\ ,\quad s = \overline{0,n}\ ,\quad p = 1,2,\dots\ ,\quad M_o = 1\ .$$

__Теорема 3.4.6.__ *Ортогональна проекція* $P_n \in H_n(Y)$ *на* $\bar{Z}(m)$ *співпадає з інтерполяційним поліномом Ерміта* $P^I_{n,m}(x)$, *якщо*

$$\hat{L}_k x^k = \theta \in Y\ ,\quad k = \overline{1,n}\ ,$$

тобто поліном $P^I_{n,m}(x)$ *являє собою розв'язок задачі*

$$\inf \| P_n - Q_n \|_{H_n(Y)}\ ,\quad Q_n \in \bar{Z}(m)\ .$$

В § 5 розглянуто зв'язок між нормами $\|\cdot\|_+$, $\|\cdot\|_{H_n(Y)}$, $\|\cdot\|$ лінійного оператора, де $X_+ = B^{1/2}X \subset X$.

__Теорема 3.5.1.__ *Нехай лінійний оператор* $L_1 : X \to Y$ *неперервний в* X, *де* X,Y *сепарабельні гільбертові простори. Тоді мають місце нерівності*

$$\| L_1 \|_+ \le \| L_1 \|_{H_1(Y)} \le \| L_1 \| (SpB)^{1/2}\ . \tag{31}$$

При цьому, якщо $L_1 : X_+ \to R_1$, *то лівостороння нерівність в (31) стає рівністю.*

__Зауваження.__ Якщо $x_o \in X_+$, то на підставі (31) в умовах теореми 3.4.5 маємо оцінку похибки інтерполяції лінійного оператора

$$\| \Delta^I_m(x) \|_Y \le C_1(\sigma m^{\sigma})^{-1/2} \| x \|_+\ . \tag{32}$$

В § 6 розглянута можливість застосування операторної інтерполяції для розв'язку лінійних операторних рівнянь. Нехай розв'язується задача

$$Au = f\ ,\quad f \in X\ ,\quad u \in Y\ , \tag{33}$$

X,Y сепарабельні гільбертові простори, A лінійний оператор, який має обмежений обернений. Нехай далі $\{u_i\}^m_{i=1}$ лінійно незалежні елементи з Y, на яких відомі значення $f_i = Au_i$, $i = \overline{1,m}$, і крім того, оператор B такий, що рівняння $B\tilde{f}_i = f_i$ розв'язуються достатньо просто. Тоді, якщо відомо деяке наближення $\hat{A}^{-1}$ оберненого оператора, то з допомогою розглянутого вище інтерполяційного процесу (28) при $n = 1$, $L_o = \theta \in Y$, залишаючись в умовах теореми 3.4.2, можна побудувати нове, краще в розумінні метриці простору $H_1(Y)$, наближення A^{-1I} оберненого оператора A^{-1}. Розглянуто приклад двохточкової крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку, приведені результати обчислень. Слід зауважити, що коли вузли f_i вибрати власними елементами оператора B, $(f_i, f_j) =$

$= \delta_{ij}$, то на підставі (32) для розв'язку задачі (33) інтерполяційним методом маємо оцінку похибки у вигляді

$$\| u^* - u^I_m \|_Y \le C_1 (\sigma m^{\sigma})^{-1/2} \| x \|_+ ,$$

де u^* точний розв'язок рівняння (33), u^I_m - наближений, одержаний за допомогою інтерполяції оберненого оператора у вузлах f_i, $i = \overline{1,m}$.

В § 7 розглянуто і обгрунтовано застосування поліноміальної операторної інтерполяції в задачах ідентифікації поліноміальних систем. Показано, що у випадку, коли система, що ідентифікується являє собою відрізок ряду типу Вольтерра, а вузли інтерполянта (28) вибрані ортонормованими власними елементами оператора B, то ідентифікація за допомогою інтерполянта (28) співпадає з ідентифікацією, здійсненою методом ортогональних моментів, і має місце збіжність поліноміальних наближень при $m \to \infty$. Але якщо система вузлів $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ не є базисом (нехай навіть повна в X), то збіжності наближень методом ортогональних моментів, взагалі кажучи, не буде. Для методу операторної інтерполяції одержані оцінки похибки в метриці простору $H_n(Y)$, а у випадку повної системи вузлів доведена збіжність інтерполяційного процесу в цій метриці.

Слід зауважити, що в задачах ідентифікації деяких нелінійних систем неполіноміального виду можуть бути застосовані інші інтерполяційні методи. Так, наприклад, для ідентифікації оператора Урисона з невідомою підінтегральною нелінійністю ефективним є наближення цієї нелінійності за допомогою параболічних сплайнів.

В § 8 методом операторної інтерполяції одержано важливі для практики вирішення задачі визначення лінії перетину двох поверхонь n-го порядку.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

1. Побудований згладжуючий операторний поліном n-го степеня як елемент найкращого наближення в гільбертовому просторі $H(\lambda)$.
2. Доведені теореми про необхідні та достатні умови існування інтерполяційного операторного полінома n-го степеня у гільбер-

товому і довільному векторному просторах.

3. Конструктивно описана вся множина інтерполяційних операторних поліномів n-го степеня, а також множина операторних інтерполянтів, що зберігають поліноми відповідного степеня в цих просторах.
4. Доведена теорема про необхідну та достатню умову існування операторного полінома Ерміта заданого степеня в гільбертовому просторі.
5. Одержано конструктивний опис всієї множини операторних поліномів Ерміта n-го степеня, а також множини поліномів Ерміта, що зберігають операторні поліноми відповідного степеня в гільбертовому просторі.
6. Одержані оцінки точності наближень поліноміальних операторів методом інтерполяції в гільбертовому просторі, доведено теореми про збіжність інтерполяційного процесу, а також про швидкість збіжності для спеціально вибраних вузлів.

У зв'язку з тим, що ряд результатів дисертації одержано в співавторстві з проф. Макаровим В.Л., в кінці кожного розділу визначений особистий внесок автора.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах

1. Хлобыстов В.В. О некоторых свойствах экстремальных параболических сплайнов//Вычисл. и прикл. матем., 1982, вып.48. - с.23-26.
2. Хлобыстов В.В. Оценка координат источников сигналов при сферическом фронте волны // Кибернетика. - 1986, N°1. - с.9-13.
3. Хлобыстов В.В. Оценки координат источников сигналов и системы измерителей//ДАН УССР. сер.А. - 1987, N°7. - с.68-70.
4. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Сплайн-аппроксимация функций. - М., Высшая школа, 1983. - 80 с.
5. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В., Чекан Д.Д. Некоторые вопросы идентификации нелинейных функциональных систем//Вычисл. и прикл. матем., 1989, вып.67. - с.101-106.
6. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Об одном подходе к решению задачи идентификации модели Урысона//Электронное моделиро-

вание. - 1988. №4. - с.12-15.

7. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Интерполяционный метод решения задачи идентификации для функциональной системы, описываемой оператором Урысона//ДАН СССР. - 1988. т.300. №6. - с.1332-1336.

8. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Интерполяционная формула типа Ньютона для нелинейных функционалов // ДАН СССР. - 1989. т.307. №3. - с.534-537. (Soviet. Math. Dokl. vol. 43 (1991) №1, p.106-109)

9. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Об общей структуре полиномиальных функциональных интерполянтов // ДАН СССР. - 1991. т.318. №4. - с.805-808. (Soviet. Math. Dokl. vol. 43 (1991) №3, p.771-774)

10. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Полиномиальное интерполирование нелинейных функционалов//ДАН СССР. - 1991. т.321. №3. - с.470-473. (Soviet. Math. Dokl. vol. 44 (1992) №3. p.721-725)

11. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Об общей структуре интерполяционных функциональных полиномов//Укр. мат. журн. - 1991. т.43. №10. - с.1361-1367.

12. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Полиномиальное интерполирование операторов в гильбертовых пространствах//ДАН России. - 1992. т.324. №4. - с.742-745. (Russian Acad. Sci. Dokl. Math. vol. 45 (1992) №3. p.624-628)

13. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Эрмитова интерполяция операторов в гильбертовых пространствах//ДАН России. - 1992. т.327. №2. - с.183-186. (Russian Acad. Sci. Dokl. Math. vol. 46 (1993). №3. p.435-438)

14. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Полиномиальное интерполирование операторов в векторных пространствах//ДАН России. - 1993. т.329. №2. - с.135-139. (Russian Acad. Sci. Dokl. Math. vol. 47 (1993))

15. Хлобистов В.В. Згладжуючий операторний поліном в гільбертовому просторі H(λ)//Обчисл. та прикл. матем. Сб. наук. пр. - Київ. 1993. вип.77. - с.27-35.

16. Хлобистов В.В. Поліноміальна інтерполяція операторів у гільбертових просторах//Обчисл. та прикл. матем. Сб. наук.

пр. - Київ, 1993, вип. 77. - с. 44-55.
17. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Повышение точности приближений полиномиальных операторов в гильбертовых пространствах методом интерполирования //ДАН России. - 1994, т. 334, №1. - с. 20-22.
18. Khlobystov V.V. On the identification of nonlinear operators and it's application//Boundary elements IX, v.1:. Mathematical and Computational Aspects, Springer-Verlag, Berlin, 1987. - p. 43-58. Co-author Makarov V.L.
19. Khlobystov V.V. The Newton-type interpolational formula for the nonlinear operators and it's application//Conference of numerical methods and application, Sofia, August, 22-27, 1988. - p. 272-283. Co-author Makarov V.L.

ОП "Торгтехніка"
Зак. 38 Тир. 110 екз. Д.А. 1,5