

Национальная академия наук Украины  
Институт кибернетики имени В. М. Глушкова

На правах рукописи

ГУБАРЕВ Евгений Вячеславович

**ЗАДАЧА УКЛОНЕНИЯ ОТ ТОЧНОЙ ПОИМКИ  
В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ**

01.01.09 — математическая кибернетика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Киев 1994



00756504 (R)

Работа выполнена в Институте кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор  
ЧИКРИЙ Аркадий Алексеевич.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор  
ЛАРИН Владимир Борисович,  
кандидат физико-математических наук, НЕНАХОВ Эдуард Иванович.

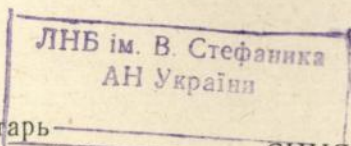
Ведущая организация: Киевский Национальный Университет имени Тараса Шевченко.

Защита состоится «23» сентября 1994 г. в 11:00 часов на заседании специализированного ученого совета Д 016.45.01 при Институте кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины по адресу:

252650 Киев ГСП 22, проспект Академика Глушкова, 40.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-техническом архиве института.

Автореферат разослан «23» августа 1994 г.



Ученый секретарь \_\_\_\_\_  
специализированного совета \_\_\_\_\_ СИНЯВСКИЙ В. Ф.

Актуальность темы. Во второй половине двадцатого века одним из интенсивно развивающихся разделов математики стала теория управляемых процессов. В рамках этой теории получен ряд фундаментальных результатов, к которым следует отнести принцип максимума Л.С.Понтрягина, принцип динамического программирования Р.Беллмана, правило экстремального прицеливания Н.Н.Красовского и некоторые другие результаты.

С 1960 года наблюдается большой прогресс в развитии такого важного направления в теории управляемых процессов, как теория дифференциальных игр. Теория дифференциальных игр изучает управляемые объекты, которые описываются дифференциальными уравнениями и находятся в условиях конфликта по отношению друг к другу. Наличие конфликта значительно усложняет задачу управления и вместе с тем делает ее богаче в плане возможных приложений.

Наиболее очевидны приложения теории к таким областям, как управление сложными физическими системами с неизвестными возмущающими силами (например, автоматическая посадка самолета при сильном ветре), военное дело (например, преследование самолета управляемой ракетой), построение экономических и социальных моделей. В дальнейшем практическое значение этой теории будет возрастать, поскольку конфликтные модели, несомненно, более адекватны природе сложных реальных явлений. Уже идет разработка нового поколения управляющих устройств, в основе которых лежат не классические принципы регулирования, а достижения теории конфликтно-управляемых процессов.

Развитие теории конфликтно-управляемых процессов связано с именами многих ученых. Среди авторов далекого зарубежья прежде всего следует отметить Р.Айзенка, Л.Берковица, Дж.Баргу, У.Флеминга, А.Фридмана. В СССР развитие этого направления было тесно связано с именами Н.Н.Красовского и Л.С.Понтрягина. В Украине лидирующие позиции в данной области принадлежат Б.Н.Пшеничному и А.А.Чикрию. Большой вклад в развитие теории конфликтно-управляемых процессов сделали Е.Ф.Изданко, А.В.Куржанский, Ю.С.Осипов, А.И.Суботин, Ф.Л.Черноусько, Р.В.Гамкрелидзе, П.Б.Гусятников, А.В.Кряжковский, А.А.Маликин, И.С.Никольский, Л.А.Гетросян, А.Г.Ченцов.

В развитии теории дифференциальных игр можно выделить два

основных направления. Целью первого из них является построение наиболее общих моделей, изучение структур игр, исследование вопросов существования цены игры, оптимальных стратегий и т.д. Здесь необходимо выделить работы Л.Берковица, который, основываясь на вариационном исчислении, исследовал необходимые условия, которым должны удовлетворять оптимальные в смысле выбранного критерия траектории, и показал, что они при предположениях о регулярности удовлетворяют некоторому обобщению принципа максимума. Существует целый ряд работ (А.Фридман, У.Флеминг и др.), посвященных исследованию общих свойств дифференциальной игры, рассматриваемой как предел последовательности многоходовых минорантных и межрядных игр, аппроксимирующих исходную игру. Изучению структуры дифференциальных игр посвящены также работы В.Н.Шимичного.

Следует отметить достижения в этом направлении свердловской школы математиков, возглавляемой И.Н.Красовским (А.И.Субботин, Е.С.Осинов, А.Г.Чешин, А.В.Куржяевский и др.). Им была предложена строгая формализация позиционной дифференциальной игры, предложено правило экстремального приращивания, доказаны фундаментальные теоремы об альтернативе, суть которых заключается в том, что при разумном объединении в пары чистых, смешанных и контрстратегий удается разделить игровое пространство на две непересекающиеся и дополняющие друг друга области, для каждой из которых разрешима либо задача уклонения, либо задача преследования.

Другой линией исследования соответствуют постановке более частных игровых задач и нахождение конструктивных методов построения стратегий (зачастую далеких от оптимальности). Такой подход вполне оправдан большой сложностью задач и необходимостью выхода на конкретные прикладные проблемы.

В рамках этого направления возникли так называемые задачи уклонения от встречи с терминальным множеством из всех начальных положений. Впервые такая постановка была предложена Л.С.Полтягиным. Данная диссертационная работа посвящена изучению именно этого класса игр.

С момента первой постановки данной задачи бы. предложен целый ряд методов, позволяющих получать достаточные условия и строить стратегия уклонения. Здесь следует упомянуть метод

маневра обхода Понтригина-Макленко, метод инвариантных подпространств, методы убеждения по направлениям и переменным направлениям А.А.Чакрыя. В последнее время интенсивное развитие получили рекурсивные методы обхода. К ним следует отнести маневр Ф.Л.Черноуцкого для простого движения с рекурсивной по числу преследователей и маневр В.Ижмовского с рекурсивной по произведению от движения. С их помощью удалось получить наиболее общие на сегодняшний день достаточные условия убеждения. В данной диссертационной работе было проведено качественное развитие теории рекурсивных маневров, а также с их помощью рассмотрены новые классы игр.

Цель работы. Основной целью работы является получение общего вида достаточных условий разрешимости ряда классов нелинейных дифференциальных игр убеждения с применением рекурсивных маневров обхода. Ставится задача построения максимально конструктивных процедур построения стратегии убеждения, что позволит использовать их при численном моделировании.

Методика исследований. В диссертации широко используются достижения теории оптимального управления, теории дифференциальных игр, выпуклого анализа, теории многозначных отображений.

Научная новизна. 1. Сформулировано определение  $\epsilon$ -стратегии по разбиению убеждающего, которая является удобным инструментом для описания действий игрока при построении рекурсивных маневров обхода. Основной упор сделан на конструктивность стратегии, что открывает возможность использовать ее при численном моделировании и отличает от других существующих определений. 2. Найден достаточные условия разрешимости нелинейной дифференциальной задачи убеждения. Получена оценка снизу отклонения от терминального множества. Условия сформулированы в единой форме для обычного и для так называемого точного случаев. Для построения стратегии убеждения игроку достаточно знать лишь положение системы и то не постоянно, а лишь в некоторые неперекрывающиеся моменты времени. 3. Аналогичный результат получен для игр с группой преследователей. Для установления возможности отклонения от точной посадки достаточно установить преимущество убеждающего над каждым преследователем в отдельности при условии

совпадения экстремальных управлений убегающего по отношению ко всем преследователям. 4. Рекурсивный маневр использован для решения некоторых классов игр убегающая, таких как неавтономные игры с ограничивающими множествами, явно зависящими от времени, и игры, в которых преимущество убегающего выявляется лишь в производных некоторого более высокого порядка.

Теоретическая и практическая ценность работы. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы для дальнейшего теоретического исследования дифференциальных игр. Полученные конструктивные законы управления, которые обеспечивают решение задачи уклонения от терминального множества, могут быть реализованы на ЭВМ.

Апробации работы. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах отдела оптимизации управляемых процессов Института кибернетики АН Украины (1991-1994 гг.), на семинаре по проблеме "Кибернетика" (1993 г.), на симпозиуме "Вопросы оптимизации вычислений" (1993 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-4].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем составляет 105 страниц машинописного текста. Библиография содержит 102 наименования. В диссертации имеется 5 рисунков.

## СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В главе 1 исследуется нелинейная дифференциальная игра убегающая от одного преследователя, когда убегающий располагает полной информацией о фазовом состоянии системы и не имеет информации о текущих управлениях противника. В основе доказательства теоремы об убегающем лежит рекурсивный маневр обхода, суть которого заключается в последовательном разгоне пресекающей траектории системы на ортогональное к терминальному множеству подпространство по производным, начиная с некоторой производной высокого порядка и заканчивая нулевой. Для удобного формального описания действий убегающего вводится определение *ε-стратегии по разбиению*, в котором учтена специфика рекурсивных маневров.

В первом параграфе делается формальная постановка задачи, даются определения стратегии и другие необходимые определения.

Движение объекта в евклидовом пространстве  $R^n$  описывается нелинейным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = f(z, u, v), \quad (1.1)$$

Здесь  $f(z, u, v)$  - непрерывная по совокупности переменных вектор-функция;  $u$  и  $v$  - управляющие параметры преследователя и убегающего соответственно, которые принадлежат компактным множествам  $U \subset R^m$  и  $V \subset R^p$ .

Терминальное множество  $M$  - подпространство в  $R^n$ , а его ортогональное дополнение  $L$  имеет размерность, не меньшую 2.

Предполагаем, что правая часть системы удовлетворяет условию роста

$$\|f(z, u, v)\| \leq \kappa(1 + \|z\|) \quad (1.2)$$

для любых  $u \in U, v \in V$ , где  $\kappa$  - положительная константа. Здесь и далее под  $\| \cdot \|$  понимается евклидова норма вектора.

Некоторые дополнительные требования к  $f(z, u, v)$  будут введены далее.

Допустимыми управлениями игроков считаются измеримые по  $t$  функции со значениями в  $U$  и  $V$  соответственно. Рассматривается задача с полной информацией, что подразумевает знание обоими игроками в каждый момент времени состояния объекта  $(t, z)$ .

Необходимые определения. Будем называть  $\Delta$ -разбиением отрезка  $[a; b]$  множество точек  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_\nu$ , такое, что  $\xi_{i+1} > \xi_i$ ,  $i=0, \dots, \nu-1$ ,  $\xi_0 = a$ ,  $\xi_\nu = b$ ,  $\nu \in N$ .

Обозначим символом  $\Delta_i$  множество  $\xi_0, \dots, \xi_i$ ,  $i=0, \dots, \nu$ . Пусть на  $[a; b]$  определена функция  $z(x)$ . Символом  $z[\Delta_i]$  будем обозначать вектор  $(z(\xi_0), \dots, z(\xi_i))$ .

Определение 1.1. Будем говорить, что задана  $\varepsilon$ -стратегия по разбиению второго игрока, если в каждой точке  $z \in R^n$  задана тройка  $(\varepsilon(z), \Delta(z), W)$ , где

$$\varepsilon(z) : R^n \rightarrow R^1, \quad \varepsilon(z) \in [0; \varepsilon];$$

$$\Delta(z) - \Delta\text{-разбиение отрезка } [0, \varepsilon(z)] \text{ с точками } \xi_0, \dots, \xi_{\nu(z)}; \quad \nu(z) \in N;$$

$W_\Delta$  - система измеримых по  $t$  функций

$$W_\Delta(z[\Delta_i], t) : R^{n \times (i+1)} \times R^1 \rightarrow R^m, \quad i=0, \dots, \nu(z)-1.$$

Будем говорить, что убегающий действует согласно *ε-стратегии по разбиению*, если он осуществляет такую последовательность действий. Пусть в некоторый момент  $t_0$  система оказалась в точке  $z_0 \in M$ . На интервале времени  $[t_0, t_0 + \tau_1]$  убегающий выбирает управление  $v(\tau) = v_0(z[\Delta_1]; \tau) = v_0(z_0; \tau)$ ,  $\tau \in [t_0, t_0 + \tau_1]$ . В паре с некоторым произвольным допустимым управлением преследователя оно дает решение системы (1.1) на  $[t_0, t_0 + \tau_1]$  с начальным условием  $z(t_0) = z_0$ ,  $z_0$  - положение системы (1.1) в момент времени  $t_0 + \tau_1$ . Убегающий выполняет смену управления, выбирая его равным  $v_1(z[\Delta_1]; \tau) = v_1(z_0, z_1; \tau)$  на  $[t_0 + \tau_1, t_0 + \tau_2]$ . Описанная последовательность действий убегающий повторяет  $k(z_0)$  раз на отрезке времени  $[t_0, t_0 + \kappa(z_0)]$ . Далее убегающий действует согласно тройке  $(c, \Delta, W_\Delta)$ , которая определяется положением системы в момент  $t_0 + \kappa(z_0)$ .

Отметим, что в рамках наложенных на систему ограничений такое определение вполне корректно в том смысле, что, во-первых, для любого  $z_0 \in \mathbb{K}^n$  и любого допустимого управления преследователя решение системы (1.1) в смысле Каратеодори с начальным условием  $z(t_0) = z_0$ , соответствующее описанной выше процедуре, существует на  $[t_0, t_0 + \kappa(z_0)]$  (хотя, вообще говоря, не единственно) и является абсолютно непрерывной функцией; во-вторых, любое из этих решений ограничено, т.е. на этом интервале оно не покидает некоторой ограниченной области, что позволяет повторять описанную процедуру бесконечное число раз.

Заметим также, что если на  $\Gamma$  дополнительно наложить условие Липшица, то решение будет определяться однозначно как на  $[t_0, t_0 + \tau_1]$ , так и всюду на  $[t_0, t_0 + \kappa(z_0)]$ . Однако мы этого не делаем, предполагая, что в своем реальном движении система каждый раз реализует одну конкретную траекторию из множества возможных, а выбор очередной порции управления убегающего определяется точкой пространства  $\mathbb{K}^n$ , в которую система попадет в конце этой траектории.

Итак, мы убедились, что в каждой точке  $z_0 \in \mathbb{K}^n$  введенная нами выше *ε-стратегия по разбиению* в паре с любым допустимым управлением преследователя  $u(t)$  определяет непустое множество  $Z_{u, v_\Delta}(z_0)$  абсолютно непрерывных ограниченных решений системы (1.1) на  $[t_0, t_0 + \kappa(z_0)]$ ;

$$Z_{\Delta}(z_0) = \bigcup_{(u)} Z_{u, \Delta}(z_0).$$

здесь  $(u)$  обозначает множество всех допустимых управлений преследователя на отрезке  $[t_0, t_0 + \epsilon(z_0)]$ ;

$$\eta(z_0) = \inf_{z \in Z_{\Delta}(z_0)} \inf_{t \in [t_0, t_0 + \epsilon(z_0)]} \text{dist}(z(t), M). \quad (1.3)$$

где  $z$  - элемент множества  $Z_{\Delta}(z_0)$ .

Если к тому же величина  $\epsilon(z)$  выбирается таким образом, что  $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = \infty$ ,  $t_i = t_{i-1} + \epsilon(z_{i-1})$ ,  $i=1, 2, \dots$ , где  $z_i = z(t_i)$ ,  $z(t_0) = z_0$ , то существует решение, продолжимое на весь полубесконечный интервал времени.

**Определение 1.2.** Если в определении 1.1 убывающий на каждом интервале времени  $[t_i + \xi_i, t_i + \xi_{i+1})$ ,  $i=0, \dots, i(z)-1$ , выбирает постоянное управление  $v(x) = V_i(z \in \Delta_i)$ , то мы считаем, что задана кусочно-постоянная  $\epsilon$ -стратегия по разбиению.

**Определение 1.3.** Будем говорить, что для дифференциальной игры (1.1) разрешима глобальная задача убегания, если существует  $\epsilon$ -стратегия по разбиению убегающего, такая, что при любом допустимом управлении первого игрока соответствующие траектории  $x(t)$ ,  $z(t_0) = z_0$  продолжимы на полубесконечный интервал времени и не пересекают терминальное множество  $M$  при  $t \in [t_0, \infty)$  для любых начальных позиций  $z_0 \in \bar{M}$ .

**Утверждение 1.1** Глобальная задача убегания разрешима, если существует  $\epsilon$ -стратегия по разбиению убегающего, такая, что выполнены следующие условия:

1) функция  $\epsilon(z)$  такова, что для любого компакта  $X \subset \mathbb{R}^n$  существует  $\epsilon_X > 0$ , такое, что  $\inf_{x \in X} \epsilon(z) \geq \epsilon_X$ ;

2) для любого компакта  $X \subset \mathbb{R}^n$  существует функция  $\eta_X^*(r) : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ , монотонно неубывающая по  $r$ , такая, что для любого  $z \in X$ ,  $z \in \bar{M}$ ,  $\eta(z) \geq \eta_X^*(\text{dist}(z, M))$ . где  $\eta(z)$  определяется по формуле (1.3);

3) для любого компакта  $X \subset \mathbb{R}^n$  существует функция  $\nu_X^*(r) : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ , монотонно невозрастающая по  $r$ , такая, что для любого  $z \in X$ ,  $z \in \bar{M}$ ,  $\nu(z) \leq \nu_X^*(\text{dist}(z, M))$ .

Во втором параграфе формулируются условия и теорема об уклонении.

Пусть  $\mathbb{M}_1$  и  $\mathbb{M}_2$  - взаимно ортогональные одномерные подпространства из  $\mathbb{C}$ , где  $\mathbb{C}$  - ортогональное дополнение к  $\mathbb{M}$ , а  $\pi_1$  и  $\pi_2$  - операторы ортогонального проектирования из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{M}_1$  и  $\mathbb{M}_2$  соответственно.

Предположим, что можно образовать такие последовательности функций  $\varphi_j^{(i)}(z, u, v): \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $j=1, 2$ ,  $i=0, 1, \dots$  с помощью рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} \varphi_j^{(i)}(z, u, v) &= \nabla_z \varphi_j^{(i-1)}(z, u, v) f(z, u, v), \quad i=1, 2, \dots, \\ \varphi_j^{(0)}(z, u, v) &= \pi_j, \quad j=1, 2, \end{aligned}$$

где  $\nabla_z \varphi_j(z, u, v)$  - матрица частных производных функции  $\varphi_j(z, u, v)$  по  $z$ .

Пусть существуют натуральные числа  $k_1$  и  $k_2$ , такие, что множества  $\varphi_1^{(i)}(z, u, v)$ ,  $i=0, \dots, k_1-1$  и  $\varphi_2^{(i)}(z, u, v)$ ,  $i=0, \dots, k_2-1$  состоят из единственных точек  $\varphi_j^{(i)}(z)$ , причем  $\varphi_j^{(i)}(z)$  непрерывны по  $z$  на  $\mathbb{R}^n$ . Функции  $\varphi_1^{(k_1)}(z, u, v)$  и  $\varphi_2^{(k_2)}(z, u, v)$  также непрерывны по совокупности переменных.

Определим отображение  $F(z, u, v): \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$ , положив

$$F(z, u, v) = (\varphi_1^{(k_1)}(z, u, v), \varphi_2^{(k_2)}(z, u, v))^T.$$

$\mathbb{M}$  - двумерное подпространство, натянутое на  $\mathbb{M}_1$  и  $\mathbb{M}_2$ , и  $\psi = \langle p \in \mathbb{R}^k, \|p\|=1 \rangle$ .

Пусть функция  $F(z, u, v)$ , такая, что для любого компакта  $X \in \mathbb{R}^n$  существует  $\lambda_X < \infty$ , такое, что для любых  $u_1, u_2 \in \mathbb{U}$ ,  $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ ,  $z_1, z_2 \in X$

$$\|F(z_1, u_1, v_1) - F(z_2, u_2, v_2)\| \leq \lambda_X \|z_1 - z_2\|.$$

Условие 2.1 Существует непрерывная функция  $\psi(z): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , такая, что имеет место неравенство

$$\min_{p \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \min_{z \in \mathbb{U}} \langle p, F(z, u, v) + \psi(z) \rangle > 0$$

для всех  $z \in \mathbb{M}$ .

Утверждение 2.1 Для описанной выше дифференциальной игры можно построить  $z$ -стратегию по размению, удовлетворяющую условиям 1-3 утверждения 1.1.

Утверждения 1.1, 2.1 позволяют нам сформулировать основной результат в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1. Для того, чтобы в описанной выше дифференциальной игре была разрешима глобальная задача убогания в классе кусочно-постоянных *s*-стратегий по разбиению, достаточно, чтобы выполнялось условие 2.1.

Замечание 2.1 Отметим, что на числа  $k_1$  и  $k_2$  никаких дополнительных условий не накладывается, и результат представляется в единообразной форме и для грубого ( $k_1 = k_2$ ), и для так называемого тонкого ( $k_1 > k_2$ ) случаев.

Замечание 2.2 Существенной чертой данного результата является полный отказ от знания убегающим управляющим преследователя. Для синтеза управления убегающим второму игроку достаточно знать лишь текущее положение системы, и, более того, не постоянно, а только в наперед определенные моменты времени.

В третьем и четвертом параграфах проводится доказательство сформулированной выше теоремы.

Во второй главе мы переходим к изучению дифференциальных игр убегающего с группой преследователей. Основной результат в виде теоремы об убегающем доказывается с помощью комбинированного применения двух видов рекурсивных маневров обхода. Суть такого применения заключается в том, что вначале каждому преследователю приписывается определенный порядковый номер, после чего строится *s*-стратегия по разбиению убегающего, гарантирующая на некотором интервале времени определенную оценку расстояния между убегающим и первым преследователем, и характеризуемая некоторым шагом разбиения. При этом используется маневр обхода, описанный в главе 1, и заключающийся в последовательном разгоне проекции траектории в ортогональное подпространство по производным, начиная с высшей и заканчивая нулевой. После этого осуществляется переход ко второму преследователю и полученная на первом шаге стратегия достраивается таким образом, чтобы гарантировать уклонение от второго преследователя вдоль каждой из возможных траекторий уклонения от первого. При этом в игре против второго игрока существенно используется оценка расстояния и шаг разбиения, полученные в игре против первого. Схема разгона по производным в игре против второго преследователя в целом сохраняется, однако для разгона самой высокой производной (базовой для процесса индукции) мы используем схему маневра убегающего от многих

преследователем вдоль минимальной траектории для простых дугами на плоскости, который был впервые предложен Ф.Л.Черноусько и развит в работах В.Лжиковского. Для того, чтобы использование этого маневра было обоснованным, необходимо предположить, что экстремальные управления убегающего (то есть те, на которых реализуется его преимущество) являются общими по отношению ко всем преследователям. Следует отметить, что введенная нами *ε-стратегия по разбиению* является удобным средством для описания действий убегающего и в этом случае.

После окончания построения маневра уклонения от второго противника мы получаем оценку удаления уже от двух преследователей (первого и второго) и шаг разбиения по времени, необходимый для реализации маневра (по мере увеличения числа преследователей шаг уменьшается, но остается положительным). Описанная процедура повторяется столько раз, сколько преследователей участвует в игре. Полученная на последнем шаге *ε-стратегия по разбиению* является окончательной, а оценка уклонения от последнего противника характеризует уклонение от всех.

Перейдем к формальному изложению задачи.

Движение объекта в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  описывается нелинейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x, u, v). \quad (5.1)$$

Здесь  $f(x, u, v)$  - непрерывная по совокупности переменных вектор-функция;  $u$  и  $v$  - управляющие параметры первого и второго игроков соответственно (здесь под первым игроком понимается, вообще говоря, группа игроков), которые принадлежат компактным множествам  $U \subset \mathbb{R}^m$  и  $V \subset \mathbb{R}^k$ .

Терминальное множество  $M$  имеет сложную структуру и представляет собой объединение  $i$ -линейных многообразий  $M_1, \dots, M_i, \dots, M_n$  из  $\mathbb{R}^n$  вида  $M_i = M_{0i} + \Delta_i$ , где  $M_{0i}$  - линейное подпространство из  $\mathbb{R}^n$ , а вектор  $\Delta_i$  принадлежит ортогональному дополнению  $\Delta_i$  к  $M_{0i}$ . При этом мы считаем, что каждое  $\Delta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  имеет размерность, не меньше 2. Правая часть (5.1) удовлетворяет условиям роста.

Допустимыми управлениями игроков считаются измеримые по  $t$  функции со значениями в  $U$  и  $V$  соответственно. Рассматривается задача с полной информацией.

В такой постановке дифференциальная игра (5.1) сводится

случай, когда в качестве первого игрока рассматривается несколько управляемых объектов, которые действуют при том же одном убегающем.

$$\text{Введем обозначение } \text{dist}(z, M) = \min_{y \in M} \text{dist}(z, y). \quad (5.2)$$

Определение 5.1. Будем говорить, что разрешима глобальная задача убегающего от многих преследователей в постановке (5.1), если существует  $\varepsilon$ -стратегия по разбиению убегающего, такая, что при любом допустимом управлении преследователей соответствующая траектория  $z(t), z(t_0) = z_0$  продолжима на полуинтервал времени и  $\text{dist}(z(t), M) > 0, t \in [t_0, \omega)$  для любых позиций  $z_0 \in M$ .

Утверждение 5.1. Глобальная задача убегающего от многих преследователей разрешима, если существует  $\varepsilon$ -стратегия по разбиению убегающего, такая, что выполнены следующие условия:

- 1) функция  $\varepsilon(z)$  такова, что для любого компакта  $K \subset \mathbb{R}^n$  существует  $\varepsilon_K > 0$ , такое, что  $\inf_{z \in K} \varepsilon(z) \geq \varepsilon_K$ ;
- 2) для любого компакта  $K \subset \mathbb{R}^n$  существует функция  $\eta_K^*(r) : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ , монотонно возрастающая по  $r$ , такая, что для любого  $z \in K, z \in M, \eta(z) \geq \eta_K^*(\text{dist}(z, M))$ , где  $\eta(z)$  определяется по формуле (1.3) при подстановке (5.2);
- 3) для любого компакта  $K \subset \mathbb{R}^n$  существует функция  $\iota_K^*(r) : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ , монотонно невозрастающая по  $r$ , такая, что для любого  $z \in K, z \in M, \iota(z) \leq \iota_K^*(\text{dist}(z, M))$ .

Формулировка основного результата. Пусть  $M_j^1$  и  $M_j^2$  - взаимно ортогональные одномерные подпространства из  $\Pi_j, j \in 1, \dots, \nu, e_j^1, e_j^2$  - соответствующие им орты в  $\mathbb{R}^n$ . Здесь  $\Pi_j$  - ортогональное дополнение к  $M_j$ , а  $\pi_j^1$  и  $\pi_j^2$  - операторы ортогонального проектирования из  $\mathbb{R}^n$  в  $M_j^1$  и  $M_j^2$  соответственно.

Образуем последовательности функций  ${}^m \varphi_j^{(i)}(z, u, v) : \mathbb{R}^n \times U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n, m=1, 2, j=1, \dots, \nu, i=0, 1, \dots$  с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} {}^m \varphi_j^{(i)}(z, u, v) &= \nabla_z {}^m \varphi_j^{(i-1)}(z, u, v) \dot{\varphi}_j(z, u, v), \quad i=1, 2, \dots, \\ {}^m \varphi_j^{(0)}(z, u, v) &= \pi_j^m z - a_j, \quad m=1, 2, \quad j=1, \dots, \nu. \end{aligned}$$

где  $\nabla_z \varphi_j(z, u, v)$  - матрица первых производных функции  $\varphi_j(z, u, v)$  по  $z$ .

Пусть существуют натуральные числа  $k_j^1$  и  $k_j^2, j=1, \dots, \nu$ , такие, что множества  ${}^1 \varphi_j^{(i)}(z, u, v), i=0, \dots, k_j^1-1$  и  ${}^2 \varphi_j^{(i)}(z, u, v), i=0, \dots, k_j^2-1$  состоят из единственных точек  ${}^m \varphi_j^{(i)}(z)$ , причем

$\varphi_j^{(k)}(z)$  непрерывны по  $z$  на  $\mathbb{R}^n$ . Функции  $\varphi_j^{(k_1)}(z, u, v)$  и  $\varphi_j^{(k_2)}(z, u, v)$  также непрерывны по совокупности переменных.

Образуюм векторы  $F_j(z, u, v): \mathbb{R}^n \times U \times V \rightarrow \mathbb{R}^2, j=1, \dots, \nu$  следующим образом. Положим

$$F_j(z, u, v) = \left( \varphi_j^{(k_1)}(z, u, v), \varphi_j^{(k_2)}(z, u, v) \right)^T, \quad j=1, \dots, \nu,$$

$\Psi = \{ p \in \mathbb{R}^2, \|p\|=1 \}$ ,  $S_0$  - единичный шар в  $\mathbb{R}^n$  с центром в нуле.

Пусть функции  $F_j(z, u, v)$  таковы, что для любого компакта  $X \subset \mathbb{R}^n$  существует  $A_X < \infty$ , такое, что для любых  $u \in U, v \in V, z_1, z_2 \in X$

$$\|F_j(z_1, u_1, v_1) - F_j(z_2, u_2, v_2)\| \leq A_X \|z_1 - z_2\|, \quad j=1, \dots, \nu.$$

Условие 5.1. Для каждого  $j=1, \dots, \nu$  для всех  $z \in M_j$  имеет место неравенство

$$\min_{p \in \Psi} \max_{v \in V} \min_{u \in U} (p, F_j(z, u, v)) > 0.$$

Пусть  $L \geq 1$  - некоторое действительное число. Определим следующие многозначные отображения:

$$V_j^L(z, p) = \left\{ \tilde{v} \in V: \min_{u \in U} (p, F_j(z, u, \tilde{v})) \geq \max_{v \in V} \min_{u \in U} (p, F_j(z, u, v)) / L \right\},$$

$$z \in \mathbb{R}^n, p \in \Psi, j = 1, \dots, \nu,$$

$$V_j^L(z) = \bigcup_{p \in \Psi} V_j^L(z, p).$$

Пусть  $\delta(z): \mathbb{R}^n \rightarrow (0, +\infty)$  - некоторая непрерывная функция.

Для каждого  $z \in M$  определим множество номеров

$$J(z) = \left\{ i \in \{1, \dots, \nu\}: (z + \delta(z) \cdot S_0) \cap M_i \neq \emptyset \right\}.$$

Считаем, что номера в  $J(z)$  расположены в порядке возрастания, а  $|J(z)|$  означает количество номеров в  $J(z)$ .  $J(z) = \langle i_1, \dots, i_{|J(z)|} \rangle$ .

Условие 5.2. Существуют число  $L \geq 1$  и непрерывная функция  $\delta(z) > 0$ , такие, что для всех  $z \in M$  и  $p \in \Psi$  выполнено

$$V_k^L(z, p) \cap \left[ \bigcap_{k < m \leq |J(z)|} V_m^L(z) \right] \neq \emptyset, \quad 1 \leq k \leq |J(z)| - 1.$$

Утверждение 5.2. Для описанной выше дифференциальной игры можно построить  $\epsilon$ -стратегию по разбиениям, удовлетворяющую условиям 1-3 утверждения 5.1.

Утверждения 5.1, 5.2 позволяют нам сформулировать основной результат в виде следующей теоремы.

Теорема 5.1. Для того, чтобы в описанной выше

дифференциальной игре была разрешима глобальная задача убегания от многих преследователей в классе кусочно-постоянных  $x$ -стратегий по разбиению, достаточно, чтобы выполнялись условия 5.1. и 5.2.

В шестом параграфе излагается доказательство этой теоремы.

В третьей главе рассматриваются некоторые классы игр убегания, решаемых с помощью рекурсивного маневра обхода.

В седьмом параграфе сформулированы условия разрешимости глобальной задачи убегания, когда сравнение ресурсов управления игроков в производных от проекции  $x$  до некоторого порядка не дает убегающему достаточного для уклонения от терминального множества преимущества. Это преимущество выявляется лишь в некоторой производной более высокого порядка. Эти условия уклонения удалось получить путем применения рекурсивного маневра обхода к исследуемому классу задач.

Формальная постановка задачи здесь совпадает с постановкой в главе 1.

Формулировка основного результата. Пусть существуют натуральные числа  $k \geq 2$  и  $m \leq k-2$ , двумерное подпространство  $M \subset \mathbb{R}^n$  ( $\pi$ -оператор ортогонального проектирования из  $\mathbb{R}^n$  в  $M$ ) и непрерывные по совокупности переменных функции

$$g^{(i)}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow M, \quad i = 0, \dots, k.$$

$$h^{(i)}(u, v) : U \times V \rightarrow M, \quad i = m+1, \dots, k-1.$$

$$p^{(k)}(z, u, v) : \mathbb{R}^n \times U \times V \rightarrow M,$$

таким, что для любой траектории системы (7.1)  $z_{u,v}(z_0, t_0, t)$ , соответствующей произвольным начальным положением  $z_0$  и управлениям  $u(t), v(t)$  преследователя и убегающего справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned} z_{u,v}(z_0, t_0, t) = & \sum_{j=0}^k g^{(j)}(z_0) \frac{(t-t_0)^j}{j!} + \\ & + \sum_{j=m}^{k-2} \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^j}{j!} h^{(j+1)}(u(\tau), v(\tau)) d\tau + \\ & + \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^{k-2}}{(k-2)!} p^{(k)}(z_{u,v}(z_0, t_0, \tau), u(\tau), v(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Положим  $\nu = \{p \in M, \|p\| = 1\}$ . Для любого  $p \in \nu$  считаем, что  $p_{\perp} \in V$  есть вектор, получаемый из  $p$  поворотом по часовой стрелке, такой, что  $(p, p_{\perp}) = 0$  (также предполагаем, что для

любого компакта  $X \subset \mathbb{R}^n$  существует  $A_x < \infty$ , такое, что для любых  $u \in U$ ,  $v \in W$ ,  $z_1, z_2 \in X$

$$\|p^{(k)}(z_1, u, v) - p^{(k)}(z_2, u, v)\| \leq A_x \|z_1 - z_2\|.$$

Образуем многозначные отображения  $V_i(p) : \psi \rightarrow Z^m, i = m+1, \dots, k-1$ , с помощью рекуррентного соотношения

$$V_i(p) = \left\{ v : v \in V_{i-1}(p), \min_{u \in U} \langle p, h^{(i)}(u, v) \rangle \geq 0 \right\}.$$

$$V_0(p) = W.$$

Предполагаем, что для любого  $i = m+1, \dots, k-1$ , любого  $p \in \psi$ ,  $V_i(p) \neq \emptyset$ .

Введем обозначения:  $P(z_0, t_0, t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[ \sum_{j=0}^k g^{(j)}(z_0) \frac{(t-t_0)^j}{j!} \right]$  и

$$P = \left\{ p \in \psi : \max_{v \in V} \min_{u \in U} \langle p, h^{(i)}(u, v) \rangle = 0 \right\}.$$

Считаем, что  $P \neq \emptyset$  (если  $P = \emptyset$ , то, нетрудно видеть, выполняются условия теоремы об убежении из главы 1).

Условие 7.1. Для любого  $z_0 \in M$  существует  $p \in \psi$ , такой, что для всех  $t \geq t_0(p, P(z_0, t_0, t)) \geq 0$ .

Условие 7.2. Многозначное отображение  $V_{k-1}(p)$  непрерывно на множестве  $\psi$  (в метрике Хаусдорфа) и для всех  $z \in M$

$$\min_{p \in \psi} \max_{v \in V_{k-1}(p)} \min_{u \in U} \langle p, \varphi^{(k)}(z, u, v) \rangle > 0.$$

Условие 7.3. Для любого  $\tilde{p} \in P$  для всех  $\tilde{v} \in V_{k-1}(\tilde{p})$  имеет место  $\langle \tilde{p}, h^{(i)}(U, \tilde{v}) \rangle = 0$  для всех  $i = m+1, \dots, k-1$ .

Теорема 7.1. Для того, чтобы в описанной выше дифференциальной игре была разрешима глобальная задача убежения в классе кусочно-постоянных  $\epsilon$ -стратегий по разбиению, достаточно, чтобы выполнялись условия 7.1-7.3.

Доказательство аналогично доказательству теоремы в главе 1 и основано на представлении (7.2).

В восьмом параграфе изучается возможность применения рекурсивного маневра обхода к играм убежения, в которых правая часть соответствующего дифференциального уравнения и ограничивающие множества обоих игроков явно зависят от времени. Перейдем к постановке задачи и формулировке результата.

Движение объекта в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  описывается

нестационарным нелинейным дифференциальным уравнением

$$z = f(t, z, u, v). \quad (8.1)$$

Здесь  $f(t, z, u, v)$  - непрерывная по совокупности переменных вектор-функция;  $u$  и  $v$  - управляющие параметры преследователя и убегающего соответственно, которые в каждый момент времени принадлежат множествам  $\Psi(t) \subset \mathbb{R}^m$  и  $\mathcal{V}(t) \subset \mathbb{R}^n$ .  $\Psi(t)$  и  $\mathcal{V}(t)$  есть непрерывные в метрике Хаусдорфа многозначные отображения, принадлежащие при всех  $t \geq 0$  некоторым компактам  $\Psi \subset \mathbb{R}^m$  и  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ .

Терминальное множество  $M$  - подпространство в  $\mathbb{R}^n$ , а его ортогональное дополнение  $\mathcal{L}$  имеет размерность, не меньшую 2.

Правая часть системы удовлетворяет условию роста (8.2).

Необходимые определения. Определения 8.1.-8.3 являются естественным обобщением соответствующих определений из главы 1 на нестационарный случай.

Определение 8.4. Многозначное отображение  $\Psi(t)$ ,  $t \geq 0$ , обладает свойством монотонного невозрастания, если для любых  $t_1$  и  $t_2$ ,  $t_2 \geq t_1 \geq 0$ , выполняется включение  $\Psi(t_2) \subseteq \Psi(t_1)$ .

Определение 8.5. Многозначное отображение  $\mathcal{V}(t)$ ,  $t \geq 0$ , обладает свойством монотонного неубывания, если для любых  $t_1$  и  $t_2$ ,  $t_2 \geq t_1 \geq 0$ , выполняется включение  $\mathcal{V}(t_1) \subseteq \mathcal{V}(t_2)$ .

Формулировке условий и теоремы об уклонении. Пусть  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$  - взаимно ортогональные одномерные подпространства из  $\mathcal{L}$ , где  $\mathcal{L}$  - ортогональное дополнение к  $M$ , а  $\pi_1$  и  $\pi_2$  - операторы ортогонального проектирования из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathcal{M}_1$  и  $\mathcal{M}_2$  соответственно.

Предположим, что можно образовать такие последовательности функций  $\varphi_j^{(i)}(t, z, u, v): [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $j=1, 2$ ,  $i=0, 1, \dots$  с помощью рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} \varphi_j^{(i)}(t, z, u, v) &= \nabla_z \varphi_j^{(i-1)}(t, z, u, v) f(t, z, u, v) + \frac{\partial}{\partial t} \varphi_j^{(i-1)}(t, z, u, v), \\ & \quad i=1, 2, \dots, \\ \varphi_j^{(0)}(t, z, u, v) &= \pi_j z, \quad j=1, 2. \end{aligned}$$

где  $\nabla_z \varphi_j^{(i)}(t, z, u, v)$  - матрица первых производных  $\varphi_j^{(i)}(t, z, u, v)$  по  $z$ .

Пусть существуют натуральные числа  $k_1$  и  $k_2$ , такие, что множества  $\varphi_1^{(i)}(t, z, \Psi(t), \mathcal{V}(t))$ ,  $i=0, \dots, k_1-1$  и  $\varphi_2^{(i)}(t, z, \Psi(t), \mathcal{V}(t))$ ,  $i=0, \dots, k_2-1$  состоят из единственных точек  $\varphi_j^{(i)}(t, z)$ , причем  $\varphi_j^{(i)}(t, z)$  непрерывны по  $z$  и  $t$  на  $\mathbb{R}^n$ . Функции  $\varphi_j^{(i)}(t, z, u, v)$  и  $\varphi_2^{(i, 2)}(t, z, u, v)$  также непрерывны по совокупности переменных.

Определим отображение  $F(t, z, u, v): [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , положив

$$F(t, z, u, v) = (p_1^{(k_1)}(t, z, u, v), p_2^{(k_2)}(t, z, u, v))^T.$$

$M$ -двухмерное подпространство, натянутое на  $M_1, M_2$ ;  $\psi \in (p \in \mathbb{R}^n, \|p\|=1)$ .

Пусть функция  $F(t, z, u, v)$  такова, что для любого компакта  $K \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$  существует  $A_K < \infty$ , такое, что для любых  $u \in U, v \in V, (t, z_1), (t, z_2) \in K$

$$\|F(t, z_1, u, v) - F(t, z_2, u, v)\| \leq A_K \|z_1 - z_2\|.$$

Условие 8.1 Существует непрерывная функция  $l(z, t) : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$  такая, что для всех  $z \in M, t \geq 0$  имеет место неравенство

$$\min_{p \in \psi} \max_{v \in V(t)} \min_{u \in U(t)} (p, F(t, z, u, v)) + l(z, t) > 0.$$

Условие 8.2А. Многозначное отображение  $v(t)$  является монотонно неубывающим, а многозначное отображение  $U(t)$  - монотонно невозрастающим.

Условие 8.2Б. Многозначное отображение  $v(t)$  является монотонно неубывающим, а функция  $F(t, z, u, v)$  такова, что для любого компакта  $K \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$  существуют  $A_K < \infty$ , такое, что для любых  $u_1, u_2 \in U, v \in V, (t, z) \in K$

$$\|F(t, z, u_1, v) - F(t, z, u_2, v)\| \leq A_K \|u_1 - u_2\|.$$

Теорема 8.1. Для того, чтобы в описанной выше дифференциальной игре была разрешима глобальная задача убегания в классе кусочно-постоянных  $\epsilon$ -стратегий по разбиению, достаточно, чтобы выполнялись условия 8.1 и одно из условий 8.2А и 8.2Б.

Основные результаты диссертации, опубликованные в следующих работах:

1. Губарев Е.В. Достаточные условия разрешимости нелинейной дифференциальной задачи убегания // Теория оптимальных решений. - Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН Украины, 1992. - С.34-39.

2. Чирняй А.А., Губарев Е.В. Достаточные условия разрешимости глобальной задачи убегания для нелинейных дифференциальных игр. - Киев, 1992. - 31 с. - (Препр./ АН Украины. Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова; 92-22).

3. Губарев Е.В. Убегание от группы преследователей // Автоматика. - 1992. - № 5. - С. 66-70.

4. Губарев Е.В. Условия убегания высших порядков // Теория и вычислительные проблемы оптимизации. - Киев: Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН Украины, 1993. - С. 60-63.

ЛНБ ім. В. Стефанишина  
АН України

Подп. в печ. 09.06.94. Формат 60×84/16. Бум. тип. №2. Офс. печ. Усл.  
печ. л. 0,93. Усл. кр.-отт. 1,05. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ 658.

---

Редакционно-издательский отдел с полиграфическим участком  
Института кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины  
252650 Киев ГСП 22, проспект Академика Глушкова, 40

457581

AB 30.534

**AB 30.534**