Дніпропетровський державний університет

На правах рукопису

Орлянський Олег Юрійович

Точні сферично симетричні розв'язки рівнянь Ейнштейна для ідеальної рідини

01.04.02. - теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дніпропетровськ - 1994

Дисертація є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теоретичної фізики Дніпропетровського державного університету.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук професор Коркіна М.П.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук с.н.с. Жданов В.І.
кандидат фізико-математичних наук доц. Притоманов С.О.

Провідна установа: Білоруський державний університет

Захист дисертації відбудеться "5" липня 1994р. в 14 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради К 03.01.06 по захисту дисертацій на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук при Дніпропетровському державному університеті (320625, ГСП-10, Дніпропетровськ, пр. Гагаріна 72, корп. 15, ауд. 311).

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Дніпропетровського державного університету.

Автореферат розіслано "3" червня 1994р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради Спірідонова І.М.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми.

Знаходження точних аналітичних розв'язків у теорії, що заснована на нелінійних рівняннях, є важливим напрямком досліджень. Через суттєву нелінійність рівнянь загальної теорії відносності (ЗТВ) проведення якісних досліджень пов'язано з трудношами, а чисельні та наближені розрахунки не дають достатньо надійного опису при наявності сильніх полів та поблизу сингулярностей. Навіть у тих випадках, коли можливе застосування якісних методів, залишається необхідним одержання точних розв'язків, які містять найбільш повну інформацію. При пошуку таких розв'язків використовуються різні припущення. Зокрема, вибирається система координат і тип симетрії. Найбільш простою і розповсюдженою симетрією в природі є сферична симетрія. Більшість астрофізичних об'єктів має невелику швидкість обертання та форму, що наближається до сферичної. Такими є планети та зорі, кульові зоряні скупчення, деякі еліптичні галактики, сферичні скупчення галактик. Сферично симетричні статичні розв'язки можуть бути узагальнені на випадок повільного обертання. Великий ступінь ізотропії простору та вимірювальні можливості також сприяють вибору сферичної системи координат, що набагато спрощує рівняння Ейнштейна та дозволяє отримувати точні розв'язки в ряді важливих випадків.

На основі точних розв'язків були зроблені оновоположні висновки ЗТВ; виникли такі нові поняття, як чорна діра, ергосфера, горизонт подій, Великий Вибух, Всесвіт, що розширюється.

У зв'язку з відкриттям реліктового випромінювання, квазарів, пульсарів необхідність в одержанні точних розв'язків значно зросла. Проте серед численних точних розв'язків, одержаних за останні десятиріччя, лише деякі можуть претендувати на відображення фізично-імовірних ситуацій. Тому особливу актуальність набуває знаходження нових методів одержання точних розв'язків, що заздалегідь відповідають фізичним умовам.

Мета роботи.

Метою роботи є знаходження точних сферично симетричних розв'язків рівнянь ЗТВ, які відповідають фізичним критеріям і можуть бути покладені в основу космологічних моделей та моделей астрофізичних об'єктів. Ця мета тісно пов'язана з розробкою методів одержання точних сферично симетричних розв'язків з наперед заданими властивостями в граничних точках.

Наукова новизна роботи.

1. Розроблено алгоритм перевірки статичних розв'язків, записаних у координатах кривизн, на відповідність вимогам енергодомінантності та причинності у центрі сфери.

2. Запропоновано нові методи знаходження точних сферично симетричних розв'язків із наперед заданим рівнянням стану і швидкістю звуку в центрі конфігурації (статичні розв'язки) та на початку і наприкінці еволюції (однорідні космологічні розв'язки).

3. Одержано нові точні розв'язки рівнянь ЗТВ та класи таких розв'язків:

статичні (глава 1);

однорідні космологічні (глава 2);

неоднорідні нестатичні, коли метричні коефіцієнти залежать від двох змінних (глава 3).

4. Знайдено загальний статичний розв'язок рівнянь ЗТВ, у якому густина енергії, тиск, ненульові компоненти метричного тензора мають точний вираз через довільну функцію та її похідні за винятком лише одного метричного коефіцієнта, записаного у квадратурах.

5. Знайдено найбільш загальні перетворення між важливими класами ізотермічних метрик, до яких відносяться всі статичні, космологічні та конформноплоскі метрики.

Практичне значення роботи.

Розроблені методи можуть бути використані при пошуку нових точних розв'язків, а одержані в роботі розв'язки при побудові моделей астрофізичних об'єктів та моделей Всесвіту.

Проведений у першій главі аналіз умов енергодомінантності, причинності, додатності тиску та густини енергії дозволяє, знаючи поведінку будь-якого з метричних коефіцієнтів у центрі статичної сфери, визначати без розв'язку рівнянь ЗТВ чи може бути відповідний розв'язок фізично реалістичним. До того ж стає можливим удосконалити більшість відомих методів знаходження точних статичних розв'язків таким чином, щоб розв'язки були несингулярними і мали у центрі необхідне відношення тиску до густини енергії та значення швидкості звуку.

Розроблені в другій главі методи знаходження однорідних ізотропних розв'язків рівнянь ЗТВ з наперед заданим рівнянням стану на початку й наприкінці еволюції та одержані цими методами космологічні моделі дозволяють обминути вади фрідманоподібних моделей з рівнянням стану $p = Const\epsilon$, що пов'язані з неможливістю пояснення зміни жорсткості рівняння стану з часом. Одержані моделі можуть бути зіставлені з тим чи іншим варіантом стандартного сценарію гарячого Всесвіту. Запропоновані методи дозволяють також будувати моделі з рівнянням стану де Сіттера на початку еволюції і рівнянням стану пилу в кінці, що дає змогу висунути аналог інфляційної моделі Всесвіту, в якій замість фазового переходу Всесвіт із десітерівського стану переходить до пилу еволюційно.

Знайдені перетворення між широкими класами сферично симетричних метрик в ізотермічних координатах дозволяють ідентифікувати нові розв'язки, проводити аналіз їх фізичних властивостей, одержувати умови зшивки в найбільш простій формі та можуть сприяти відшуку нових точних нестатичних та неоднорідних розв'язків з неідеальною рідиною.

Вірогідність результатів роботи.

Усіма запропонованими методами були одержані крім нових точних розв'язків також розв'язки, добре відомі до цього. Класи нових розв'язків містять у собі розв'язки, що були одержані раніше. Усі нові розв'язки, викладені в роботі, були перевірені безпосередньою підстановкою в рівняння ЗТВ.

Знайдені перетворення також містять у собі ряд перетворень, відомих раніше, та призводять до результатів, які раніше були одержані іншими способами (існування трьох різних вимірів часу в світі де Сітера, конформна плоскісність усіх типів фрідманоподібних космологічних моделей та єдиного серед статичних розв'язків внутрішнього розв'язку Шварцшільда).

На захист виносяться такі положення.

1. На основі проведеного аналізу вимог енергодомінантності, причинності та додатності тиску і густини енергії розроблені:

методи знаходження точних статичних сферично симетричних розв'язків рівнянь ЗТВ з наперед заданою швидкістю звуку та відношенням густини енергії до тиску в центрі симетрії;

методи знаходження точних однорідних космологічних розв'язків з наперед заданим співвідношенням густини енергії та тиску на початку та наприкінці еволюції.

2. Точні розв'язки рівнянь ЗТВ та класи таких розв'язків у статичному і космологічному випадках, які можуть бути покладені в основу астрофізичних і космологічних моделей. Три космологічні моделі з ультрарелятивістстським і найбільш жорстким рівнянням стану в час Великого Вибуху та асимптотично пилоподібним для нескінченно віддалених часів.

3. Загальний розв'язок рівнянь ЗТВ у статичному випадку, коли густина енергії, тиск і метричні коефіцієнти мають точний вираз через довільну функцію радіальної змінної та її похідні за винятком одного

метричного коефіцієнта, записаного у квадратурах.

4. Найбільш загальні перетворення між класами ізотермічних метрик, які мають у собі статичні, космологічні та конформноплоскі метрики. На основі одержаних перетворень та випливаючих з них обмежень на метричні коефіцієнти

а) показано, що внутрішній розв'язок Шварцшільда є єдиний статичний конформноплоский розв'язок, а з усіх однорідних космологічних розв'язків тільки у світі де Сітера єдиний синхронізований час може бути запроваджений трьома різними способами;

б) одержано шість типів космологічних розв'язків з рівнянням стану $\varepsilon + 3p = Const$, а також неоднорідний нестатичний розв'язок, який є узагальненням внутрішнього розв'язку Шварцшільда й усіх однорідних ізотропних розв'язків;

Апробація роботи.

Основні результати дисертації доповідалися й обговорювалися на Всесоюзній конференції по гравітації та електромагнетизму, Мінськ, 1991р.; Всесоюзній конференції по загальній теорії відносності, Красноярськ, 1991р.; Міжнародній науковій конференції "Лобачевський та сучасна геометрія", Казань, 1992р.; 8-ій Російській гравітаційній конференції, Пущино, 1993р.; підсумкових наукових конференціях Дніпропетровського держуніверситету, Дніпропетровськ, 1991 - 1993 р.р.; семінарах гравітаційної групи Дніпропетровського держуніверситету, Дніпропетровськ, 1990 - 1993 р.р.

Основні положення дисертації викладені в тезах 5 доповідей і опубліковані в 7 наукових статтях (див. список літератури).

Структура та обсяг дисертації.

Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, заключення, додатка і списку цитованої літератури зі 107 найменувань. Дисертація містить 12 таблиць, 3 графіки й її повний обсяг 106 сторінок.

Короткий зміст роботи

У вступі подано огляд наукової літератури по темі дисертації, обгрунтована актуальність обраної теми і мета роботи, вказана наукова новизна і практична значимість одержаних результатів, сформульовані положення, які виносяться на захист, наведено відомості про структуру роботи та її апробацію.

У першій главі запропоновано методи генерації точних розв'язків рівнянь ЗТВ при наявності ідеальної рідини в статичному сферично симетричному випадку і одержано нові розв'язки, які відповідають необхідним для побудови релятивістських моделей фізичним умовам. У розділі 1.1 для статичного сферично симетричного інтервалу

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \tag{1}$$

розглянуті рівняння Ейнштейна при наявності ідеальної рідини. Зважаючи на те, що більшість відомих точних статичних розв'язків має сингулярність у центрі ($r = 0$) або нефізичні значення густини енергії ε, тиску p чи швидкості звуку $v = \sqrt{dp/d\varepsilon}$ в розділі 1.2 докладно вивчені фізичні вимоги енергодомінантності, причинності та додатної визначеності ε і p в околі $r = 0$. Для цього усі довільні функції, що входять до рівнянь Ейнштейна (ν, λ, ε, p), розкладені у степеневі ряди. Показано, що, знаючи значення в $r = 0$ перших чотирьох похідних метричних коефіцієнтів, можна з'ясувати задовольняє чи ні даний розв'язок фізичним вимогам і обчислити швидкість звуку та жорсткість рівняння стану:

$$v_0^2 = \frac{6}{5}\nu_0''\frac{\nu_0'' + \lambda_0''}{3\lambda_0''^2 - \lambda_0''''}, \qquad n = \frac{p_0}{\varepsilon_0} = \frac{2\nu_0'' - \lambda_0''}{3\lambda_0''}.$$

Якщо відомий тільки один метричний коефіцієнт, можливо визначити чи буде найбільш загальний розв'язок з цим коефіцієнтом задовольняти фізичним вимогам у центрі. Для e^ν фізичні вимоги призводять до таких обмежень:

$$\boxed{\nu_0' = 0} \longrightarrow \boxed{\nu_0'' > 0} \longrightarrow \boxed{\nu_0''' = 0} \longrightarrow \boxed{\nu_0'''' < \frac{3}{5}\nu_0''^2}$$

$$\downarrow$$

якщо $\nu_0'''' < -\frac{6}{5}\nu_0''^2$,

можливо $p_0 = n\epsilon_0$ з будь-яким $0 < n < 1$

В **1.3** розвинуто запропонований Коркіной М.П. метод знаходження точних розв'язків рівнянь ЗТВ через допоміжну функцію. Система рівнянь Ейнштейна зводиться до лінійного неоднорідного диференціального рівняння з двома функціями, які визначають усі потрібні величини. Використовуючи результати **1.2**, одна із функцій вибирається таким чином, щоб відповідний розв'язок напевно задовольняв усім фізичним вимогам у центрі. Цим методом одержані нові точні статичні розв'язки, серед яких клас розв'язків з метричним коефіцієнтом

$$e^{\nu} = Const(1 + r^2/r_0^2)^{\omega},$$

де r_0 - довільна стала, $\omega \geq 0$ ціла. Одержаний клас містить у собі як окремі випадки 4-ий розв'язок Толмена ($\omega = 1$), розв'язок Адлера-Куховича ($\omega = 2$), а також розв'язок, отриманий Коркіной і Капітоновим ($\omega = 3$). Названий метод узагальнено на випадок рідини з електричним і скалярним зарядами.

В розділі **1.4** запропоновано метод послідовної генерації точних розв'язків рівнянь Ейнштейна. Інший вибір допоміжних функцій у порівнянні з **1.3** дає змогу записати диференціальне рівняння двояким чином. Відносно однієї із функций $\psi = e^{-\lambda}r$ це лінійне неоднорідне рівняння першого степеню, а відносно другої $\varphi = 2 + \nu' r$ - рівняння Ріккаті. Розв'язок лінійного рівняння знаходиться як і в **1.3** через завдання допоміжної функції φ, після чого він вважається окремим розв'язком рівняння Ріккаті (яке у цьому випадку розв'язується у квадратурах). Одержаний таким чином розв'язок у свою чергу вважається окремим розв'язком лінійного рівняння і так далі. Метод дає змогу будувати нові розв'язки на основі будь-якого розв'язку відомого раніше, вважаючи останній окр. лим розв'язком того чи іншого диференціального рівняння. Таким чином виростає ланцюжок нових розв'язків, у якому кожен наступний генерован попереднім і узагальнює його. Одержано рекурентні формули, що пов'язують функції ψ і φ двох споріднених розв'язків. У випадку $\varphi = 2$, який відповідає плоскому простору, після першого етапу генерації маємо розв'язок Ейнштейна, із якого генерується внутрішній розв'язок Шварцшільда, що в свою чергу генерує новий розв'язок з чотирьма довільними сталими:

$$e^{\nu} = A(d+y)^2,\ e^{-\lambda} = (1+br^2)(1+Mr^2),$$
$$p = 3b - \frac{2D}{d+y} + M\left[1 + 3br^2 - \frac{2r^2D}{d+y}\right], \tag{2}$$
$$\epsilon = -3b - M\left[3 + 3br^2 - \frac{2r^2}{2r^2+d+Dy}\right],$$

де

$$M = C\frac{(4+\Delta+D+4by)^{2D/\Delta}}{(2r^2+d+Dy)^{D/\Delta+1}},\quad y = \frac{r^2}{1+\sqrt{1+br^2}},$$

$\Delta = \sqrt{D^2+8}$, $D = bd - 1$, A, C, b, d – сталі.

Розв'язок (2) збігається при $C = 0$ з внутрішнім розв'язком Шварцшільда, при $b = 0$ з розв'язком Адлера-Куховича, при $bd = 1$ з четвертим розв'язком Толмена, при $C = 0, bd = 1$ з розв'язком де Сіттера. В заключенні 1.4 наведено ще один розв'язок одержаний цим методом і відповідаючий фізичним умовам, необхідним при побудові статичної моделі.

У розділі 1.5 метод послідовної генерації узагальнюється на інші допоміжні функції. Запропоновано ще два методи генерації, один із яких розглянуто більш докладно й порівняно з методом, запропонованим у розділі 1.4.

В 1.6 одержано загальний розв'язок рівнянь ЗТВ у статичному випадку, коли густина енергії, тиск і метричні коефіцієнти мають точний вираз через довільну функцію радіальної змінної та її похідні за винятком одного метричного коефіцієнта, записаного в квадратурах. Для конкретних виразів згаданої функції одержано два точних розв'язки, які відповідають у центрі необхідним фізичним умовам. На закінчення 1-ої глави в розділі 1.7 наведено ще два класи точних несингулярних розв'язків, на основі яких можуть бути побудовані моделі астрофізичних об'єктів.

У другій главі запропоновано метод одержання точних однорідних ізотропних космологічних розв'язків рівнянь Ейнштейна з необхідними властивостями у початковий $\tau \to 0$ (для усіх типів розв'язків) та кінцевий $\tau \to \infty$ (для нульової та від'ємної просторової кривизни) моменти еволюції. У розділі 2.1 для інтервалу, що має вираз

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\chi^2 - \left\{ \begin{array}{c} \sin^2\chi \\ \chi^2 \\ \sinh^2\chi \end{array} \right\} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)), \qquad (3)$$

знайдено асимптотичні вирази для густини енергії у початковий та кінцевий моменти еволюції:

$$\varepsilon \rightsquigarrow_{a\to 0} \alpha a^{-3(n+1)}, \quad \varepsilon \rightsquigarrow_{a\to\infty} \beta a^{-3(m+1)},$$

де $n = p/\varepsilon$ і $m = p/\varepsilon$ - асимптотичні рівняння стану при $a \to 0$ і $a \to \infty$, відповідно. Коли $n = 1/3$ ми маємо ультрарелятивістське рівняння стану на початку еволюції, а коли $m = 0$ - рівняння стану пилу "наприкінці". В 2.2 на основі проведеного аналізу вираз для густини енергії береться як

$$\varepsilon(a) = \alpha a^{-4} + \beta a^{-3},$$

де α і β сталі. Одержані розв'язки збігаються з розв'язками для випромінювання при $\tau \to 0$ і з розв'язками Фрідмана при $\tau \to \infty$ і мають такий вигляд

$$
\begin{aligned}
1.\ \sigma = +1, \qquad a &= a_0[\sin\eta + \gamma(1-\cos\eta)],\\
\tau &= a_0[1-\cos\eta + \gamma(\eta - \sin\eta)].\\
2.\ \sigma = 0, \qquad a &= a_0\left[\eta + \frac{\gamma}{2}\eta^2\right], \qquad (4)\\
\tau &= a_0\left[\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{\gamma}{6}\eta^3\right].\\
3.\ \sigma = -1, \qquad a &= a_0[\sinh\eta + \gamma(\cosh\eta - 1)],\\
\tau &= a_0[\cosh\eta - 1 + \gamma(\sinh\eta - \eta)],
\end{aligned}
$$

де a_0 і $\gamma = 0.5a_0\beta/\alpha > 0$ - сталі. Рівняння стану при цьому

$$
\varepsilon = 3p(1 + 2\frac{\gamma}{\sqrt{a_0}}p^{-1/4}).
$$

Інший вибір додаткової умови приводить до розв'язків з рівнянням стану

$$
p = \frac{\varepsilon^{4/3}}{Const + \varepsilon^{1/3}},
$$

яке при $\tau \to 0$ збігається з $p = \varepsilon$, а при $\tau \to \infty$ $(\varepsilon \to 0)$ має (як і для (4)) асимптотичний вигляд $p = const\varepsilon^{4/3}$. Розглянуто властивості побудованих космологічних моделей.

В **2.3** запропоновано інші методи одержання точних космологічних розв'язків з заданими початковими та кінцевими умовами. Ці методи викладено у формі таблиці, в якій наведено асимптотичні поведінки різних величин у момент Великого Вибуху та на нескінченності (для від'ємної та нульової кривизни простору), а також у вигляді декількох схем. Так, якщо розглянути залежність $a = a(\varepsilon)$, маємо:

$$
a(\varepsilon) \rightsquigarrow_{\varepsilon\to\infty} \alpha\varepsilon^{-1/3(n+1)}, a(\varepsilon) \rightsquigarrow_{\varepsilon\to 0} \beta\varepsilon^{-1/3(m+1)}. \qquad (5)
$$

Зважаючи на (5) задається $a = a(\varepsilon)$, а потім проводяться обчислювання по схемі:

$$a(\varepsilon)$$

$$p(\varepsilon) = -\varepsilon - \frac{a(\varepsilon)}{3a'(\varepsilon)}$$

$$z(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon a^2(\varepsilon)/3 - \sigma}$$

$$\eta(\varepsilon) = \int \frac{dz}{z^2+\sigma} - \frac{1}{2}\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon z(\varepsilon)} \qquad \tau(\varepsilon) = \int \frac{a'(\varepsilon)d\varepsilon}{z(\varepsilon)}$$

τ - єдиний космологічний час. Рівняння стану у цьому випадку завжди має явний вигляд. У заключенні глави наведена ще одна космологічна модель з ультрарелятивістським рівнянням стану на початку еволюції і пилоподібним наприкінці.

У главі 3 розглянуто найбільш загальні перетворення між сферично симетричними метриками в ізотермічній системі координат, а саме між

$$ds^2 = a^{-2}(\tau,\rho)(d\tau^2 - d\rho^2 - b^2(\tau,\rho)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)) \tag{6}$$

та

$$ds^2 = A^{-2}(\eta,\chi)(d\eta^2 - d\chi^2 - B^2(\eta,\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)). \tag{7}$$

Показано, що це можливо, коли

$$a^2[(\ln a)_{\tau\tau} - (\ln a)_{\rho\rho}] = A^2[(\ln A)_{\eta\eta} - (\ln A)_{\chi\chi}], \tag{8}$$

$$b^2[(\ln b)_{\tau\tau} - (\ln b)_{\rho\rho}] = B^2[(\ln B)_{\eta\eta} - (\ln B)_{\chi\chi}]. \tag{9}$$

В 3.2 розглянуто окремий випадок (6) з $b = b(\rho)$ і (7) з $B = B(\chi)$. Знайдено всі можливі $b = b(\rho)$ та $B = B(\chi)$, що допускають перетво-

рення між (6) і (7). Далі результати узагальнено на випадок однопараметричної залежності, коли коефіцієнт b може залежати або від ρ, або від τ (так само B від χ чи від η). Показано, що існують тільки одинадцять типів b і B, які об'єднані у три відокремлені групи:

1. $b = \sqrt{|c|}\sin\rho,\ \sqrt{|c|}\rho,\ \sqrt{|c|}\sinh\rho,\ \sqrt{|c|}\cosh\tau$;
2. $B = e^{\rho},\ 1,\ e^{\tau}$;
3. $B = \sqrt{|c|}\sin\tau,\ \sqrt{|c|}\tau,\ \sqrt{|c|}\sinh\tau,\ \sqrt{|c|}\cosh\rho$,

де c - довільна стала. Точно такий вигляд мають вирази для $B(\chi)$ і $B(\eta)$ з тією самою сталою c. Усі можливі перетворення між (6) і (7) з будь-якими комбінаціями b і B знайдено та наведено в таблицях. Показано, що аналогічними будуть перетворення між (6) і (7), у яких при довільних $b(\tau,\rho)$, $B(\eta,\chi)$ метричні коефіцієнти a та A будуть залежати тільки від τ чи від ρ та тільки від η чи χ, відповідно.

На основі отриманих перетворень у розділі **3.3** показано, що конформноплоскими є тільки такі метрики (6) з однопараметричною залежністю коефіцієнту b, у яких $b = \rho, \sin\rho, \sinh\rho, \cosh\tau$ при будь-якому a, наприклад, усі фрицманоподібні моделі, включаючи моделі, побудовані у другій главі. Знайдено усі можливі види плоского простору-часу і простору-часу де Сіттера для розглянутого класу метрик. Показано, що з усіх однорідних ізотропних метрик тільки в метриці де Сіттера єдиний космологічний час може бути запроваджен трьома різними способами.

В **3.4** розглянуто систему рівнянь Ейнштейна з ідеальною рідиною в супутніх координатах, яка замість рівняння стану рідини доповнюється одержаними в розділі **3.2** виразами для метричних коефіцієнтів (6). З усіх статичних розв'язків у координатах кривизн (1) тільки ті можуть бути перетворені в ізотермічну метрику (6) з $b = \sqrt{|c|}\sin\rho,\ \sqrt{|c|}\rho,\ \sqrt{|c|}\sinh\rho,\ e^{\rho},\ 1,\ \sqrt{|c|}\cosh\rho$, у яких

$$e^{-\lambda} = \frac{1+c}{2} + Constr^2.$$

Конформноплоскому випадку $c = 1$ відповідає єдина статична метрика з $e^{-\lambda} = 1 + Constr^2$, а саме внутрішній розв'язок Шварцшільда та його окремий випадок - розв'язок де Сіттера.

В 3.5 показано, що рівняння Ейнштейна з ідеальною рідиною в супутніх координатах для інтервалу (6), у якому b залежить тільки від ρ, можуть мати або статичні розв'язки $a = a(\rho)$, або один із трьох знайдених

$$
\begin{aligned}
&1)\quad a(\tau,\rho) = T(\tau) - \alpha\cos\rho, \quad && b(\rho) = \sin\rho,\\
&2)\quad a(\tau,\rho) = T(\tau) + \alpha\rho^2/2, \quad && b(\rho) = \rho,\\
&3)\quad a(\tau,\rho) = T(\tau) + \alpha\cosh\rho, \quad && b(\rho) = \sinh\rho.
\end{aligned}
$$

Одержані розв'язки мають довільну функцію часу і узагальнюють внутрішній розв'язок Шварцшільда ($T = Const$) та усі фрідманоподібні космологічні моделі ($\alpha = 0$).

В 3.6 розглянуто метрики (6), у яких може існувати єдиний космологічний час ($a = a(\tau)$). Якщо покласти $b = b(\rho)$, то із умов супутності та ідеальної рідини випливає, що можливо тільки $b = \sin\rho,\ \rho,\ \sinh\rho$, тобто усі три типа однорідних ізотропних метрик. Використовуючи умову (8), маємо у цьому випадку

$$
ds^2 = a_0^2 \left\{ \begin{array}{c} \sin^{-2}\alpha\tau \\ (\alpha\tau)^{-2} \\ \sinh^{-2}\alpha\tau \\ 1 \\ e^{-2\alpha\tau} \\ \cosh^{-2}\alpha\tau \end{array} \right\} \left(d\tau^2 - d\rho^2 - \left\{ \begin{array}{c} \sin^2\rho \\ \rho^2 \\ \sinh^2\rho \end{array} \right\} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right),
$$

де a_0 и α - довільні сталі. Рівняння стану усіх вісімнадцяти розв'язків має однаковий вигляд $\varepsilon + 3p = Const$. Вивчені деякі властивості космологічних моделей, що можуть бути засновані на одержаних розв'язках.

У **заключенні** викладено основні висновки і результати роботи:

1. Розроблено нові методи знаходження точних сферично симетричних розв'язків рівнянь ЗТВ, серед яких методи знаходження статичних розв'язків з наперед заданими властивостями у центрі конфігурації та методи знаходження однорідних ізотропних розв'язків з наперед заданим відношенням густини енергії до тиску на початку і наприкінці еволюції.

2. За допомогою розроблених методів одержано нові статичні розв'язки та класи таких розв'язків в елементарних функціях, які задовольняють необхідним вимогам і можуть бути покладені в основу моделей астрофізичних об'єктів.

На основі одержаних однорідних ізотропних розв'язків запропоновано космологічні моделі з ультрарелятивістстським і найбільш жорстким рівнянням стану у час Великого Вибуху та асимптотично пилоподібним для нескінченно віддалених часів.

3. Знайдено найбільш загальні перетворення між широкими класами сферично симетричних метрик в ізотермічній системі координат. Без обчислювання тензора Вейля показано, що з усіх статичних метрик тільки розв'язок Шварцшільда для нестисливої рідини є конформно плоским. За допомогою перетворень і випливаючих із них обмежень на метричні коефіцієнти одержано нові точні розв'язки і запропоновано шість типів космологічних моделей з рівнянням стану $\varepsilon + 3p = Const$.

4. Одержано сферично симетричний розв'язок, який має довільну функцію часу, узагальнює внутрішній розв'язок Шварцшільда для нестисливої рідини, усі однорідні ізотропні космологічні розв'язки зі сталою кривизною простору та може бути використаний при конструюванні як неоднорідних космологічних моделей, так і моделей нестатичних астрофізичних об'єктів.

У **додатку** наведено найбільш важливі математичні обчислювання, які були пропущені в главах дисертації з метою збереження єдності та стислості викладення матеріалу.

Список публікацій по темі дисертації

1. Коркина М.П., Орлянский О.Ю. *Точные решения уравнений Эйнштейна-Максвелла для жидких сфер*: сб. "Точные решения уравнений гравитационного поля и их физическая интерпретация".- Тарту. ИФАН ЭССР, 1988.- С. 25-27.
2. Коркина М.П., Орлянский О.Ю. *Класс решений уравнений Эйнштейна для заряженных жидких сфер*: сб. "Гравитация и электромагнетизм".- Минск, 1988.- С. 126-129.
3. Коркина М.П., Орлянский О.Ю. *Метод генерации статических сферически-симметричных уравнений общей теории относительности*// УФЖ.-1991.-36, 8. С. 1127-1131.
4. Орлянский О.Ю. *Новые классы статических сферически-симметричных решений ОТО*: сб. "Гравитация и электромагнетизм".- Минск, 1992.- С. 118-123.
5. Korkina M.P., Orlyansky O.Yu. *Transformation between spherically symmetrical coordinate systems*: тез. доп. 13th International Conference on General Relativity and Gravitation.- Cordoba, Argentina.- 1992.
6. Orlyansky O.Yu. *Isotropic cosmological models*: тез. доп. 13th International Conference on General Relativity and Gravitation.- Cordoba, Argentina.-1992.
7. Коркина М.П., Орлянский О.Ю. *Космологические модели с пространством Лобачевского*: тез. докл. Международной научной конференции "Лобачевский и современная геометрия".- Казань.-1992.- Ч.II.- С. 33.

8. Korkina M.P., Orlyansky O.Yu. *Cosmological models with pressure*: Proceedings of the 15 workshop "Problems on high energy physics and field theory".-Protvino.-1992.

9. Коркина М.П., Орлянский О.Ю. *Вселенная фридмановского типа с давлением*// Изв.Вузов.-Физика.-1993.- 5.- С. 8-12.

10. Орлянский О.Ю. *Космологические модели фридмановского типа с давлением*: тез. докл. 8-ой Российской гравитационной конференции.- Пущино, 1993.- С. 134.

11. Коркина М.П., Орлянский О.Ю. *Различные представления сферически симметричных метрик в изотермических координатах*: тез. докл. 8-ой Российской гравитационной конференции.- Пущино, 1993.- С. 122.

12. Орлянский О.Ю. *Нестатическое обобщение внутреннего решения Шварцшильда*// УФЖ.-1994.-39, 8. С. 133-134.

тип. ФГУ зак 326 -100

[illegible]