Национальная академия наук Украины
Институт кибернетики имени В. М. Глушкова

На правах рукописи

ХАЛИЛЬ Аль-Саид

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ГРАФОВОГО АППАРАТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ

01.01.09 — математическая кибернетика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Киев 1994

...рукопись.

Работа выполнена в Винницком политехническом институте.

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор ВОЛКОВ А. А.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук АСЕЛЬДЕРОВ З. М.,

кандидат физико-математических наук ДОНЕЦ Г. А.

Ведущая организация: Киевский политехнический институт.

Защита состоится «——» —————— 199 г. в ——— часов на заседании специализированного ученого совета Д 016.45.01 при Институте кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины по адресу:

252650 Киев ГСП 22, проспект Академика Глушкова, 40.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-техническом архиве института.

Автореферат разослан «——» —————— 19 г.

Ученый секретарь
специализированного ученого совета СИНЯВСКИЙ В. Ф.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. В математике всегда существовала и будет существовать проблема создания эффективных методов решения как можно более широких классов задач. Однако опыт развития теории дискретных и комбинаторных задач и практика их решения показывают, что часто между общностью метода решения задачи и его эффективностью возникают непримиримые противоречия. Проблема существования полиномиальных алгоритмов для решения задач обусловила появление теории NP-полноты, в которой дана классификация сложных задач и установлена их определенная иерархия .

Задача минимизации дизъюнктивных нормальных форм для булевых функций достаточно полно была отражена в работах С.В.Яблонского и Ю.И.Журавлева(1975г.). Они предложили ряд алгоритмов непосредственного решения этой задачи. По современным оценкам эти алгоритмы носили эвристический характер и по сложности были сравнимы с переборными алгоритмами.

Задача распознавания изоморфизма графов является одной из фундаментальных в теории графов, поэтому интерес к ней никогда не ослабевает. Пока еще не построен полиномиальный алгоритм для ее решения, но еще и не доказана ее NP-полнота.

Основная часть диссертационной работы посвящена построению алгоритмов для решения перечисленных задач комбинаторной математики, чем и определяется ее актуальность.

Цель работы. Представленная диссертационная работа имеет цель:

на основании представления сокращенной дизъюнктивной нормальной формы произвольной булевой функции в виде гиперграфа построить точный алгоритм нахождения ее минимальной(кратчайшей) дизъюнктивной нормальной формы;

на основании матриц смежности и кратчайших расстояний двух произвольных регулярных графов с одинаковым количеством вершин и ребер построить точный алгоритм распознавания изоморфизма этих графов;

построить алгоритм оптимального воспроизведения функций на экране персональных ЭВМ.

Метод исследований. В основу исследований положены методы булевой алгебры, комбинаторного анализа, теории графов, теории гиперграфов и теории сложности алгоритмов.

Научная новизна работы:

- в работе впервые выполнена формализация задачи о построении минимальной(кратчайшей) дизъюнктивной нормальной формы произвольной булевой функции на языке теории гиперграфов;
- предложен точный алгоритм решения этой задачи, который отличается от полного перебора, а в частном случае является полиномиальным;
- предложен алгоритм для решения задачи распознавания изоморфизма регулярных графов, использующий матрицу кратчайших расстояний графа, который является эффективным "почти" для всех графов;
- предложен новый алгоритм для воспроизведения функций в дискретном пространстве.

Теоретическая и практическая ценность работы. В работе впервые предложен формализованный подход к решению задачи о минимизации булевых функций , использующий теорию гиперграфов и ее аппарат, что позволяет построить точный алгоритм решения задачи и использовать известные пакеты прикладных программ. Алгоритм решения задачи о распознавании изоморфизма графов можно применять для аналогичных задач, возникающих в физике, химии и других науках. Алгоритм воспроизведения функций в дискретном пространстве используется для создания пакета прикладных программ в машинной графике.

Апробация работы. Основная часть работы докладывалась на семинарах научного совета АН Украины по проблеме "Кибернетика" (Институт кибернетики имени В.М.Глушкова,г.Киев) в 1993-1994 годах,а также на 2-й научно-технической конференции стран СНГ "Контроль и управление в технических системах" (г.Винница) в октябре 1993 года.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 4 статьи.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Общий объем работы составляет 89 страниц, список литературы насчитывает 36 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность избранного направления исследования, изложена цель исследования , дается некоторый обзор и состояние исследуемой проблемы на настоящее время.

В первой главе исследуется проблема минимизации булевых функций.

Определение 1. Дизъюнктивной нормальной формой (д.н.ф.) функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется дизъюнкция $D=K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_m$, состоящая из различных импликант K_j и реализующая $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Из всех д.н.ф. та, которая содержит наименьшее число импликант(символов), называется минимальной (кратчайшей).

Число символов импликанты называется ее рангом.Подмножество вершин единичного n-мерного куба E^n,соответствующее импликанте K_j r-го ранга, называется интервалом r-го ранга.Интервал, соответствующий максимальному множеству вершин, называется максимальным.

Задача минимизации булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ заключается в построении такой д.н.ф., в которой число интервалов(символов) было бы минимальным.Эта задача решается в два этапа.На первом этапе, который выполняется однозначно, булева функция представляется в виде набора всех максимальных интервалов, то есть в сокращенной дизъюнктивной нормальной форме. На втором этапе из нее путем удаления некоторых импликант достигается искомая форма. Все известные алгоритмы минимизации относятся ко второму этапу.

Пусть $V=(v_1, v_2, \ldots, v_N)$ - конечное множество, а $\mathcal{E}=(E_i / i \in I)$- некоторое семейство частей V.Говорят,что $\mathcal{E}$ образует гиперграф на V,если $E_i \neq \varnothing$ $(i \in I)$, и $\cup E_i = V$.

Определение 2.Пара $H=(V,\mathcal{E})$ называется гиперграфом и его порядок есть $|V|=N$;элементы $v_1, v_2, \ldots, v_N$ множества V суть вершины этого гиперграфа, а множества $E_1, E_2, \ldots, E_m$из $\mathcal{E}$ суть его ребра.

Для любой булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ зададим гиперграф $H=(V,\mathcal{E})$, где V - множество вершин единичного n-мерного куба E^n,для которых $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)=1$;$\mathcal{E}=(E_1, E_2, \ldots, E_m)$-множество ребер, соответствующих импликантам K_j, и $v_i \in E_j$,если для этой вершины $K_j=1$.

Тогда задача построения кратчайшей д.н.ф. функции сводится к задаче нахождения покрытия вершин гиперграфа минимальным числом ребер.

Введем величину веса ребра $\rho(E_i)=n-\log_2|E_i|$.Задача минимизации д.н.ф. функции сводится к нахождению покрытия вершин гиперграфа ребрами с минимальным суммарным весом $\varphi(\mathcal{E})= \Sigma\rho(E_i)$.

графа ребрами с минимальным суммарным весом $\varphi(\mathcal{E})=\sum\mu(E_i)$.

Для вершин гиперграфа вводится функция $c(v)$, которая ставит в соответствие каждой вершине число, не превышающее числа ребер гиперграфа, инцидентных этой вершине.

Определение 3. Семейство ребер $C\in\mathcal{E}$ называется c-сочетанием гиперграфа H, если для любой вершины v число ребер этого семейства, инцидентных v, не превышает $c(v)$.

При $c(v)=1$ для всех $v\in V$ c-сочетание является паросочетанием.

Алгоритм A минимального покрытия вершин гиперграфа ребрами состоит из трех этапов:

все ребра, имеющие собственные вершины, удаляются из гиперграфа вместе с принадлежащими им вершинами ($H\Rightarrow H^*$);

строится максимальное паросочетание C гиперграфа H^*;

строится максимальное c-сочетание C^* гиперграфа для функции $c(v)=d-1$, где d - степень вершины v.

В результате получаем множество ребер $D=\mathcal{E}\setminus C^*$, которое и будет искомым минимальным покрытием. Во втором и третьем этапах используется теория чередующихся последовательностей, которая аналогична теории чередующихся цепей в теории графов.

<u>Во второй главе</u> исследуются вопросы построения алгоритмов распознавания изоморфизма графов (РИГ).

Определение 4. Два n-вершинных графа $G_1=(V_1,E_1)$ и $G_2=(V_2,E_2)$ называются изоморфными, иначе $G_1\cong G_2$, если существует взаимно-однозначное соответствие (биекция) φ: $V_1 \Rightarrow V_2$, такая, что $e=(v_i,v_j)\in E_1$ тогда и только тогда, когда $(\varphi(v_i),(\varphi(v_j))\in E_2$.

Для построения алгоритма, распознающего изоморфизм графов, используются различные функции, ставящие каждому графу G некоторые элементы $f(G)$, чаще всего в виде чисел, систем чисел, векторов, матриц, многочленов. Эта функция называется полным инвариантом, если

$$f(G_1)=f(G_2) \Rightarrow G_1 \cong G_2.$$

Определение 5. Кортежем вершины $v_i\in V$ называется вектор $c(v_i)$, где $c(v_i)=(c_1(v_i),c_2(v_i),\ldots,c_l(v_i))$, а l-максимальное расстояние от вершины v_i.

Для вычисления кортежей вершин достаточно иметь в наличии матрицу кратчайших расстояний графа.

Лемма 2.1. Для любого конечного p можно построить два неизоморфных графа , у которых кортежи длины p для всех вершин будут совпадать.

Для полных кортежей вершин справедлива

Теорема 2.1. Система кортежей вершин графа не является полным инвариантом для задачи РИГ.

В качестве характеристики графа G можно рассматривать его дополнительный граф $\bar{G}$ и соответствующие кортежи вершин.

Теорема 2.2. Система кортежей для вершин пары графов $(G,\bar{G})$ не является полным инвариантом для задачи РИГ.

Все эти утверждения доказываются конструктивным способом.

Определение 6. Системой кортежей k-го ранга вершины $v \in V$ называется система кортежей вершин, находящихся на расстоянии k от вершины v и рассчитанных для графа после удаления всех вершин $(k-1)$-й окрестности вершины v.

По этому определению кортеж самой вершины v есть кортеж 0-го ранга.

Для решения задачи распознавания изоморфизма графов G_1 и G_2 предлагается алгоритм В. В качестве исходных данных необходимо вычислить две матрицы - матрицу кратчайших расстояний $R(G)$ и матрицу $P(G)$, в которой p_{ij} равно номеру вершины, ближайшей к v_j на кратчайшем пути от v_i к v_j.

Алгоритм В состоит из нескольких уровней.

Вычисляются кортежи вершин графов G_1 и G_2. Если классы разбиения вершин и кортежи в них не совпадают, графы неизоморфны. В противном случае переходим на уровень выше, т. е. вычисляем кортежи вершин более высокого ранга и делаем те же сравнения по классам разбиения вершин. На каком-то уровне либо обнаружится неизоморфность графов G_1 и G_2, либо получим полное соответствие классов вершин, которые будут принадлежать одинаковым группам автоморфизмов.

Теорема 2.3. Время работы алгоритма В не превышает $O(|V|^{3(l+1)})$, где l - число использованных уровней алгоритма.

<u>В третьей главе</u> предлагается алгоритм оптимального воспроизведения функции в дискретном пространстве, который может применяться в машинной графике.

Предлагаемый алгоритм позволяет определить следующую точку (СТ) (или точки) функции при известной исходной точке (ИТ), которую можно рассматривать как результат предыдущих действий. Возможны девять вариантов расположения СТ, при этом один из вариантов соответствует совпадению СТ и ИТ. В этом случае алгоритм прекращает свою работу. Каждой из 9 точек ставится в соответствие виртуальное поле точки (ВП), которое в общем случае имеет размерность $m \times n$ (m- по горизонтали и n-по вертикали, m и n - нечетные).

Таким образом, в ВП каждой точки по X вводится $(m - 1)$ дополнительных измерений e_l $(l = \overline{1, m})$.

Для каждой точки определяется её вес, равный сумме весов измерений по строке $(A)_{m \times 9}$:

$$P_k = \sum_{l=1}^{m} e_{lk} ,$$

где k - номер строки.

В качестве СТ выбираются точки с одинаковыми максимальными весами.

Если СТ совпадает с ИТ, то алгоритм прекращает свою работу.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Предложена формальная постановка задачи о минимизации дизъюнктивной нормальной формы произвольной булевой функции путем сведения ее к задаче о минимальном покрытии вершин гиперграфа его ребрами.

2. Разработан точный алгоритм для решения задачи о построении минимальной д.н.ф. булевых функций, который отличается от переборных алгоритмов, а в частном случае является полиномиальным.

3. Разработан алгоритм для решения задачи о распознаваннии изоморфизма регулярных графов, использующий матрицу кратчайших расстояний, который последовательно решает задачу для "почти" всех графов.

4. Разработан алгоритм воспроизведения функций в дискретном пространстве, основанный на применении интерполяционного полинома Ньютона, который можно использовать для разработки пакета прикладных программ в машинной графике.

следующих работах:

1.Халиль Аль-Саид. Алгоритмическое распознавание изоморфизма графов// 2-я научн.-техн. конф. стран СНГ "Контроль и управление в технических системах", Винница, 25-28 окт. 1993г.-Винница, 1994.-С. 18.

2. Халиль Аль-Саид. Графовая модель и алгоритм минимизации булевых функций//Там же.-С.19.

3. Стахов А. П., Халиль Аль-Саид, Денисюк А. В. Алгоритм воспроизведения функций в дискретном пространстве.- Киев,1993.- 153 с.-Деп. в ГНТБ Украины 30.06.93, № 1296 ук 93.

4. Халиль Аль-Саид. Об одном алгоритме распознавания изоморфизма графов// Методы исследования экстремальных задач -Киев:Ин-т кибернетики им. В.М.Глушкова АН Украины, 1994.-С.67-72.

Подп. в печ. 02.06.94. Формат 60х84/16. Бум. тип. № 2. Офс. печ.
Усл. печ. л. 0,46. Усл. кр.-отт. 0,69. Уч.-изд. л. 0,5.
Тираж 100 экз. Заказ 627.

Редакционно-издательский отдел с полиграфическим участком
Института кибернетики имени В.М.Глушкова НАН Украины
252650 Киев ГСП 22, проспект Академика Глушкова, 40