НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ імені Тараса ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

КУШНІР Олександр Олегович

УДК 519.21

ЗБІЖНІСТЬ У ГРАНИЧНИХ ТЕОРЕМАХ ТЕОРІЇ НАДІЙНОСТІ

01.01.05 - теорія імовірностей і
математична статистика

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1994

Робота виконана на кафедрі теорії ймовірностей та математичної статистики Національного університету ім. Т. Шевченка.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор КАРТАШОВ М.В.

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор КУЗНЄЦОВ М.Ю.; кандидат фізико-математичних наук, КОМАШКО О.Ю.

Провідна організація: Інститут математики НАН УКРАЇНИ.

Захист відбудеться "26" вересня 1994 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої ради К 01.01.14 при Національному університеті України ім. Тараса Шевченка за адресою: 252127 Київ - 127, проспект Академіка Глушкова, 6, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Національного університету імені Тараса Шевченка.

Автореферат розісланий "19" липня 1994 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради КУРЧЕНКО О.О.

AB-30.625

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У зв'язку із створенням високонадійних технічних систем активно розвивається асимптотичний аналіз випадкових процесів, що описують їх функціонування, зокрема в роботах Анісімова В.В., Боровкова О.О., Гніденка Б.В., Калашнікова В.В., Карташова М.В., Хінчина О.Я., Шуренкова В.М. та багатьох інших авторів.

Завдання аналізу таких процесів значно спрощується, якщо припустити, що розподіл тривалості деяких елементарних операцій (наприклад, безвідмовної роботи елементів) у системі належить до певного параметричного класу, особливо експоненціального. У такому випадку процеси, що розглядаються, можуть бути марківськими, або напівмарківськими з дискретною множиною станів. Тому в перших роботах цього напрямку теорії надійності припущення такого роду широко використовувалися. Пізніше обмеження на функції розподілу стали носити загальний характер, наприклад у вигляді абсолютної неперервності та моментних обмежень (див. праці Барлоу Р. та Прошана Ф., Соловйова А.Д., Королюка В.С., Турбіна А.Ф.). Внаслідок цього звузився клас процесів-моделей, що мають моменти регенерації. Щоб подолати перешкоди такого типу, деякі автори, зокрема Коваленко І.М., Кузнецов М.Ю. успішно займалися штучною побудовою таких моментів.

Паралельно впродовж останніх десятиріч розвивалась теорія відновлення. Маючи справу з досить специфічними процесами, в її рамках вдавалося отримувати як досить загальні граничні теореми (вузлова теорема Сміта), і рівномірні граничні теореми (зокрема в роботах Сильвестрова Д.С., Карташова М.В.), а також хороші якісні (Рогозіним Б.А.) та кількісні оцінки швидкості збіжності (Карташовим М.В.) при досить загальних обмеженнях на вихідні функції розподілу.

Багато результатів теорії відновлення можна переформулювати у вигляді теорем про асимптотичну поведінку розв'язків інтегральних рівнянь певного типу: рівнянь відновлення та подібних до них, наприклад, такого вигляду

$$x(t) = \epsilon f(t) + (1-\epsilon)\int_0^{+\infty} x(t-s)dF(s),\ t\in(0,+\infty), \tag{I}$$

де f - задана функція, F - функція розподілу невід'ємної випадкової величини, $\epsilon\in(0,1)$.

Зокрема теорему Реньї (Renyi A.A.) можна сформулювати в термінах рівняння (I) так: при $f=F$

$$\lim_{\epsilon\to 0} x(t/\epsilon) = 1 - \exp\{-t/MF\}, \tag{II}$$

де $MF = \int_0^{+\infty} xdF(x)$.

Досягнення у теорії відновлення можна застосувати до дослідження систем, які не описуються одним процесом відновлення і навіть не мають моментів регенерації.

Цьому питанню і присвячена дана робота.

Мета роботи. Отримати граничні теореми, рівномірні граничні теореми та кількісні оцінки швидкості збіжності у наступних задачах:

1) ϵ-зближення кількох незалежних процесів відновлення при $\epsilon\longrightarrow 0$;

2) проріджения рекурентного потоку незалежним від нього альтернуючим процесом, проміжки відновлення якого збігаються до нуля в середньому.

Загальна методика досліджень. При розгляді кожної системи складається інтегральне рівняння для функції розподілу моменту настання шуканої рідкісної події, яке потім аналізується за допомогою досягнень теорії відновлення.

Новизна результатів, наукова та практична цінність. В роботі запропонований новий метод дослідження асимптотики вказаних вище рідкісних подій, що дало змогу дещо узагальнити відомі раніше граничні теореми, доведені в роботах Королюка В.С., Турбіна А.Ф. Цей метод можна буде застосувати для аналізу інших, складніших систем.

Вперше отримані кількісні оцінки швидкості збіжності в розглянутих задачах. Ці оцінки можна використати при практичних розрахунках екстремальних показників надійності систем із захистом.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідались автором на науково-технічній конференції, присвяченій 70-річчю Українського інституту Інженерів Водного Господарства у 1992 році, та на наукових семінарах кафедри вищої математики УІІВГ.

Публікації. На тему дисертації опубліковані 4 роботи.

Структура та об'єм роботи. Дисертація обсягом 93 сторінок машинопису складається із вступу, 6 параграфів, розбитих на 2 розділи, і списку цитованої літератури із 38 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

<u>У вступі</u> обгрунтовується актуальність теми, формулюється мета і методика дослідження, дається огляд літератури з теми дисертації і наводиться анотація отриманих результатів.

<u>У першому розділі</u> вивчається збіжність потоку ε-зближень кількох незалежних рекурентних потоків до найпростішого.

<u>В §1</u> формулюються означення і вводяться позначення, а також наводяться допоміжні твердження, які використовуються в дисертації.

Нехай $\chi(x) = \begin{cases} 0, & x\le 0; \\ 1, & x>0; \end{cases}$ $\qquad E_\lambda(x) = \left[1 - \exp\{-\lambda x\}\right]\chi(x);$

$$E_\lambda^m(x) = \left[1 - \exp\{-\lambda x\} \sum_{i=0}^{m-1} \lambda^i x^i / i!\right]\chi(x),\ \lambda>0,\ x \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}.$$

Для довільної функції розподілу невід'ємної незалежної випадкової величини (далі - ф.р.) F позначимо

$$MF = \int_0^\infty x dF(x); \qquad \overline{F} = \chi - F; \qquad XF(x) = \int_0^x \overline{F}(y)dy,\ x \in \mathbb{R};$$

$RF = XF/MF;\quad \omega_\varepsilon F = \sup\limits_{x>0} |F(x+\varepsilon) - F(x)|,\ \varepsilon>0.$

Для класу ф.р. $\{F_\alpha, \alpha\in A\}$ позначимо буквами наступні умови:

(M) $\inf\limits_{\alpha\in A} MF_\alpha > 0$; (X) $\lim\limits_{x\to\infty} \sup\limits_{\alpha\in A} \overline{XF}_\alpha(x) = 0$;

(o) $F_\alpha(+0) = 0,\ \alpha\in A$; ($\mu$) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sup\limits_{\alpha\in A} F_\alpha(\varepsilon) < 1$;

(ω) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sup\limits_{\alpha\in A} \omega_\varepsilon F_\alpha = 0$; ($\omega o$) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sup\limits_{\alpha\in A} F_\alpha(\varepsilon) = 0$;

Назвемо ф.р. F - абсолютно неперервного типу (далі - АНТ), якщо при деякому $n \in \mathbb{N}$ n-кратна згортка F^{*n} має абсолютно неперервну компоненту (далі - АНК), тобто може бути поданою у вигляді $F^{*n} = c_1F_1 + c_2F_2$, де $F_1(x) = \int_0^x f(y)dy$ для деяких чисел $c_1 > 0$, $c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 = 1$, ф.р. F_1 та F_2, та інтегрованої функції f.

Про сукупність ф.р. $\{F_\alpha, \alpha\in A\}$ говоритимемо, що вона - рівномірно абсолютно неперервного типу (далі - РАНТ), якщо вона задовольняє (M,X) та наступну умову (D):

(D) існують $m \in \mathbb{N}$, $c>0$, $a<b$ такі, що при всіх $\alpha\in A$ щільність АНК $\sum\limits_{n=1}^{m} F_\alpha^{*n}$ не менша від c на відрізку [a,b].

У §2 вивчається асимптотика моменту першого ε-зближення двох незалежних рекурентних потоків.

Розглянемо дві незалежні послідовності $(S_n)_{n\geq 0}$, $(T_m)_{m\geq 0}$ сум незалежних невід'ємних випадкових величин $(\xi_n)_{n\in N}$, $(\eta_m)_{m\in N}$, які мають ф.р. F, G та скінченні додатні математичні сподівання MF та MG відповідно.

У теоремі 2.1 сформульовані умови, при яких ймовірність співпадання моментів S_n та T_m дорівнює нулю.

Позначимо для $\varepsilon>0$, $s\geq 0$

$$\theta_{\varepsilon,s} = \inf_{m\geq 0} \left\{S_m:\ S_m\in \bigcup_{n=0}^{\infty} (T_n,\ T_n+\varepsilon)\right\},\ T_0=0,\ S_0=-s;$$

$$\tau_{\varepsilon,s} = \inf_{m\ge 0} \left\{T_m:\ T_m \in \bigcup_{n=0}^{\infty} (S_n,\ S_n+\varepsilon)\right\},\ T_0=0,\ S_0=-s-\varepsilon;$$

$$\psi_{\varepsilon,s}(x) = P\{\theta_{\varepsilon,s}<x\}, \qquad \phi_{\varepsilon,s}(x) = P\{\tau_{\varepsilon,s}<x\}.$$

Т е о р е м а 2.2. Нехай одна з ф.р. F, G - АНТ. Тоді, якщо F - неперервна на $(0,+\infty)$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{t\in R} \sup_{s\ge 0} \left[|\psi_{\varepsilon,s}(t) - E_\lambda(t)| + |\phi_{\varepsilon,s}(t) - E_\lambda(t)|\right] = 0, \qquad (2.29)$$

а якщо F - нерешіткова, G - неперервна на $(0,+\infty)$, то для довільної неперервної ф.р. K $(K(0)=0)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{t\in R} \left[\left|\int_0^{+\infty} \psi_{\varepsilon,s}(t)dK(s) - E_\lambda(t)\right| + \right.$$

$$\left. + \left|\int_0^{+\infty} \phi_{\varepsilon,s}(t)dK(s) - E_\lambda(t)\right|\right] = 0, \qquad (2.30)$$

де $\lambda = \varepsilon(1-F(+0))(1-G(+0))/(MF\cdot MG)$.

Нехай F вибирається з класу ф.р. $\{F_\alpha, \alpha\in A\}$, G - з класу ф.р. $\{G_\beta, \beta\in B\}$, а K - з класу ф.р. $\{K_\gamma,\ \gamma\in\Gamma\}$. Тоді

(i) якщо $\{F_\alpha, \alpha\in A\}$ - РАНТ та одностайно неперервний, а $\{G_\beta, \beta\in B\}$ - задовольняє умови $(M,X,\omega o)$, то збіжність у (2.29) буде рівномірною;

(ii) якщо $\{F_\alpha, \alpha\in A\}$ - РАНТ і задовольняє умову (μ), $\{G_\beta, \beta\in B\}$ - умови (M,X,o,ω), а клас $\{K_\gamma,\ \gamma\in\Gamma\}$ - одностайно неперервний, то збіжність у (2.30) - рівномірна.

Побудовані в роботі оцінки швидкості збіжності у (2.29-2.30) мають порядок не кращий, ніж $O(\varepsilon^{1-1/r})$, якщо відомо, що $M(\zeta_1)^r<+\infty$, $M(\eta_1)^r<+\infty$, F має обмежену щільність f, яка збігається до нуля на нескінченності, і $O(-\varepsilon\ln(\varepsilon))$, якщо $M\exp\{\lambda\zeta_1\}<+\infty$, $M\exp\{\lambda\eta_1\}<+\infty$, для деякого $\lambda>0$ і при тій же умові гладкості F. Якщо ж F має сингулярну компоненту, то побудовані оцінки мають гірший порядок.

<u>У §3</u> сформульоване твердження узагальнюється на випадок ε-зближення кількох процесів відновлення, а також встановлюється збіжність потоків ε-зближень до найпростішого.

О.Я. Хінчин дав означення збіжності потоку однорідних подій до найпростішого, яка еквівалентна слабкій збіжності в розумінні випадкових процесів, тобто в термінах кількостей подій, що відбулися до фіксованих моментів часу. З теореми 3.4 випливає, що потоки ϵ-зближень збігаються у цьому розумінні до найпростішого із параметром $\lambda=1$ після нормування на $\epsilon^{m-1}/\prod_{i=1}^{m} MF_i$, де m - кількість процесів відновлення, MF_i - математичне сподівання проміжків між відновленнями i-го процесу, $1 \le i \le m$, якщо всі ф.р. проміжків між відновленнями - неперервні й АНТ.

У другому розділі розглядається суперпозиція альтернуючого процесу з інтервалами безвідмовної роботи $(\eta_n)_{n\in N}$ та тривалостями проміжків відновлення $(\zeta_n)_{n\in N}$ із ф.р. G та J та скінченними додатніми математичними сподіваннями MG та MJ відповідно і незалежного від нього рекурентного потоку із проміжками між подіями $(\xi_n)_{n\in N}$ із ф.р. F та скінченним додатнім математичним сподіванням MF. Передбачається, що ф.р. J змінюється в схемі серій так, що $MJ \longrightarrow 0$.

Така схема моделює систему з захистом і нею займалися Збирко М.Д., Кузнецов В.Н., Турбін А.Ф., Королюк В.С. Моментом відмови такої системи називається момент настання події рекурентного потоку, що належить періоду відновлення альтернуючого процесу.

В §4 сформульовані допоміжні твердження, які переважно стосуються входження альтернуючого процесу в стаціонарний режим.

У §5 вивчається момент першої відмови системи з захистом:

$$\tau_{J,s} = \inf_{m\ge 0} \left\{ S_m : S_m \in \bigcup_{m=1}^{\infty} [T_m, T_m'] \right\},$$

де $S_0 = -s$, $s\ge 0$; $S_m = S_{m-1} + \xi_m$, $m \in \mathbb{N}$;

$$T_0' = 0, \qquad T_m = T_{m-1}' + \eta_m, \qquad T_m' = T_m + \zeta_m, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Т е о р е м а 5.1. Нехай ф.р F,G - такі, що $F(+0)=G(+0)=0$, $MF\cdot MG \in (0,+\infty)$, а послідовність ф.р. $(J_n)_{n\in N}$ - така, що $J_n(0)=0$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < MJ_n \longrightarrow 0$, $n\to\infty$, і виконується одна з наступних умов:

(i) F - АНТ, одна з ф.р. F,G - неперервна;

(ii) G - АНТ і неперервна;

(iii) G - АНТ, F - неперервна, $MJ_n = O(\varepsilon_n)$, $n\to\infty$,

де $\varepsilon_n = \varepsilon(J_n) = \int_0^{+\infty} [1-J_n(z)]\cdot[1-F(z)]dz$.

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\geq 0} \sup_{x\in R} |P\{\tau_{J_{*},n,s} \geq x\} - E_1\{\varepsilon_n x/(MF\cdot MG)\}| = 0. \qquad (5.46)$$

Збіжність у (5.46) буде рівномірною, якщо послідовність $(J_n)_{n\geq 1}$ вибирати з рівномірно інтегрованого класу ф.р., причому збіжність MJ_n до нуля - рівномірна і виконується одна з наступних умов:

(a) F вибирається з РАНТ одностайно неперервного класу ф.р., G - з класу ф.р., що задовольняє умови (M,X,μ);

(b) F вибирається з РАНТ класу ф.р., що задовольняє умову (μ), а G - з класу ф.р., що задовольняє умови (M,X,o,ω);

(c) G вибирається з РАНТ одностайно неперервного класу ф.р., F - з класу ф.р., що задовольняє умови (M,X,μ), умова $MJ_n = O(\varepsilon_n)$, $n\to\infty$ виконується рівномірно відносно вибраних послідовностей $(J_n)_{n\in N}$.

Побудовані оцінки швидкості збіжності описуються в термінах функціоналів від трійок ф.р. (G,J,F).

У §6 розглядаються потоки відмов системи з захистом.

Т е о р е м а 6.1. Якщо F - АНТ і виконуються умови теореми 5.1, то для ординарності граничного потоку відмов системи з захистом після нормування на p_n при $MJ_n \longrightarrow 0$, $n\to\infty$ необхідно, щоб

$$p_n' = o(p_n),\ n\to\infty, \qquad (6.04)$$

де $\quad p_n' = \int_0^{+\infty} RF*F(z)dJ_n(z); \qquad p_n = \int_0^{+\infty} RF(z)dJ_n(z).$

Далі наводяться умови, еквівалентні (6.04) та сильніші від неї. Наприклад, якщо послідовність $(\zeta_n)_{n\geq 1}$ збігається до нуля за Хінчином, то (6.04) - виконується.

Нехай $F(+0)=G(+0)=0$. Позначимо при $k \in \mathbb{N}$, $T_0=0$, $S_0=-s$, $s\geq 0$

$$\tau^{1}_{J,s} = \tau_{J,s}, \quad \tau^{k+1}_{J,s} = \inf_{n\in N} \left\{S_n :\ S_n > \tau^{k}_{J,s},\ S_n \in \bigcup_{m=1}^{\infty} [T_m,\ T'_m]\right\}.$$

Т е о р е м а 6.2. Нехай виконуються умови теореми 5.1. Співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\geq 0} \sup_{x\in R} |P\{\tau^{k}_{J_n,s} \geq x\} - E^{k}_{1}\{\epsilon_n x/(MF\cdot MG)\}| = 0 \qquad (6.22)$$

виконується тоді і тільки тоді, коли виконується (6.04).

Збіжність у (6.22) буде рівномірною в класах ф.р., якщо виконуються умови рівномірної збіжності теореми 5.1, і (6.04) виконується рівномірно.

Користуючись нагодою, висловлюю щиру подяку науковому керівникові докторові фізико-математичних наук, професорові Карташову Миколі Валентиновичу за постановку задач і підтримку в роботі.

На тему дисертації опубліковані наступні роботи автора:

1. Кушнир А.О. Предельная теорема для момента ϵ-сближения двух независимых процессов восстановления//Теория вероятностей и математическая статистика. Вып. 45. - К.: Лыбидь, 1991. С. 69-74.

2. Кушнір О.О. Про асимптотику розподілу моменту відмови в системі GI/GI/2/0 //Теорія ймовірностей і математична статистика. Вип. 47.- К.: Либідь, 1992. С.75-80.

3. Кушнір О.О. Ще раз про граничну теорему для системи з захистом//Тези доповіді на науково-технічній конференції, присвяченій 70-річчю УІІВГ. - Рівне, 1992. С. 29-30.

4. Кушнир А.О. Прорежение процесса восстановления при помощи альтернирующего процесса/Кибернетика и системный анализ.- К.: видавництво Інституту Кібернетики НАН України, 1993, №1. С.29-35.

Підписано до друку 04.07.94.
Формат 60х84 1/16 Обсяг 0.5 др.арк.
Замовлення 29 Тираж 100 прим. Ірн.
Рівне. УІІВГ, Соборна, 11