КИЕВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Т. ШЕВЧЕНКО

На правах рукописи

ЯГУБОВ ГАБИЛЬ ЯВАР ОГЛЫ

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОМ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

(01.01.09 — Математическая кибернетика)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

КИЕВ — 1994

Работа выполнена на кафедре оптимизации и управления Бакинского государственного университета им. М. А. Расулзаде.

Научный консультант:

— доктор физико-математичаских наук, профессор
Искендеров А. Д.

Официальные оппоненты:

—чл. корр. РАН, доктор физико-математических наук, профессор **Романов В. Г.**

— доктор физико-математических наук, профессор
Мельник В. С.

— доктор физико-математических наук, профессор
Наконечный А. Г.

Ведущая организация:

— **Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова**

Защита состоится « 29 » сентября 1994 г. в 14⁰⁰ часов на заседании специализированного Совета Д 068. 18. 16 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук при Киевском университете им. Т. Шевченко по адресу: 252127, проспект Академика Глушкова, 6, факультет кибернетики, ауд. 42.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

Автореферат разослан « 26 » июля 1994 г.

Ученый секретарь
специализированного Совета
~~к. ф. м. н.~~ КУЗЬМИН А. В.

AB-30.642

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Работа посвящена исследованию задач оптимального управления коэффициентом квазилинейного уравнения Шредингера. При этом исследованы вопросы корректности постановки рассмотренных задач, доказаны теоремы существования и единственности, получены необходимые условия оптимальности в виде принципа максимума Понтрягина и вариационного неравенства. Найдены достаточные условия дифференцируемости по Фреше рассмотренных критериев качества и выражение их градиента. Кроме того, исследованы вопросы сходимости конечно-разностного метода для решения задач оптимального управления коэффициентом квазилинейного уравнения Шредингера и установлены оценки скорости сходимости разностных аппроксимаций по функционалу.

<u>Актуальность темы</u>. Теория оптимального управления для систем с распределенными параметрами относится к одному из ведущих разделов теории оптимальных процессов и теории дифференциальных уравнений. Последние 20-25 лет отличаются бурным развитием теории оптимального управления для уравнений в частных производных. Развитию теории и методов решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами посвящено немало работ отечественных и зарубежных авторов.

Теория оптимального управления системами, описываемыми линейным и квазилинейным уравнениями Шредингера, является составной частью теории оптимального управления системами с распределенными параметрами, которая в настоящее время недостаточно развита. Поэтому управление процессами, описываемыми линейным и квазилинейным уравнениями Шредингера приобретают большую актуальность в теоретических и практических исследованиях. Несмотря на прикладную важность задач оптимального управления для систем, описываемых уравнением Шредингера, они в настоящее время сравнительно мало изучены. Ранее задачи оптимального управления для линейного и квазилинейного уравнений Шредингера были изучены в работах Васильева Ф.П., Воронцова М.А., Карамзина Ю.Н., Потапова М.М., Разгулина А.В., Шамеевой Т.Ю., Шмальгаузена В.И. и др., где управлением служит начальное состояние системы. В работе Синицыной изучена подобная задача, когда управление входит в правую часть уравнения.

Среди задач оптимального управления для уравнения Шредингера немалый интерес представляют те задачи, которые часто возникают в квантовой механике, ядерной физике, теории сверхпроводимости, нелинейной оптике и в других областях современной физики, где управлениями служат определенные физические обьекты такие, как внешние электромагнитные поля или поля какой-либо другой природы, показатели преломления среды и др. Эти параметры обычно входят в коэффициенты линейного и квазилинейного уравнений Шредингера. Такие задачи оптимального управления, в основном, ранее были изучены для линейного уравнения Шредингера в работах Бутковского А.Г., Самойленко Ю.И., Линь Н.Х., Салла Н. и др. Восстановление ядерного потенциала по условию минимума энергии является вариационной задачей для уравнения Шредингера с управлениями в коэффициенте уравнения. В этом направлении имеются работы Иваненко Д.Д., Искендерова А.Д., Керимова Б.К. и др.

Рассмотренные задачи относятся к классу некорректных и обратных задач. Основа теории этих задач заложена в работах Тихонова А.Н., Лаврентьева М.М., Иванова В.К. и далее развита в работах Романова В.Г., Аниконова Ю.Е., Васильева Ф.П., Искендерова А.Д., Мельника В.С., Наконечного А.Г., Ягола А.Г. и др

Цель работы. I. Исследование вопросов корректности задач оптимального управления процессами, описываемыми линейным и квазилинейным уравнениями Шредингера с управлениями в коэффициенте этих уравнений. 2. Вывод необходимых условий оптимальности для рассматриваемых задач оптимального управления. 3. Разработка численных методов решения задач оптимального управления коэффициентом линейного и квазилинейного уравнений Шредингера.

Методы исследования. В работе применяются методы теории оптимального управления, математической физики, функционального анализа и вычислительной математики.

Научная новизна:

- Доказано существование и единственность решения задач оптимального управления для линейного уравнения Шредингера с управлениями в коэффициенте, правой части уравнения и в начальном условии.

- Доказано существование и единственность решения задач оптимального управления для квазилинейного уравнения Шредингера, когда управления входят в коэффициент уравнения.

- Установлены необходимые условия оптимальности в виде принципа максимума Понтрягина и вариационного неравенства.

- Найдены достаточные условия дифференцируемости по Фреше функционалов и выражение для их градиентов.

- Доказана формула для вариации функционалов в случае управлений, имеющих некоторую гладкость.

- Доказаны оценки скорости сходимости конечно-разностного метода решения задач оптимального управления коэффициентом линейного и квазилинейного уравнений Шредингера по функционалу.

- Доказаны теоремы существования и единственности обобщенных решений основных смешанных задач для линейного и квазилинейного уравнений Шредингера в классах $C^0([0,T],L_2(D))$, $C^0([0,T],W_2^1(D))$, $C^0([0,T],W_2^2(D))\cap C^1([0,T],L_2(D))$ и некоторые априорные оценки.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в работе результаты могут быть использованы в научных исследованиях по теории оптимального управления и идентификации систем с распределенными параметрами, а также по теории дифференциальных уравнений в частных производных. Результаты диссертации могут найти свои приложения в таких областях науки и техники, как квантовая механика, ядерная физика, нелинейная оптика, лазерная физика, лазерная технология и др.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах кафедры оптимизации и управления и научно-исследовательской лаборатории "Математическое моделирование и автоматизированные системы" (руководитель проф. Искендеров А.Д.), кафедры математической кибернетики (руководитель проф.Фараджев Р.Г.), кафедры поикладной математики (руководитель академик АН Азерб. Респуб., проф. Гасымов М.Г., на семинаре проф. Наконечного А.Г., на семинаре Института математика АН Респуб. Беларусь (руководители проф. Габасов Р.Ф., проф. Кириллова Ф.М.), на республиканской школе-семинаре молодых ученых по прикладной математике и кибернетике в 1984 г. (г.Баку), на научных конференциях Азгосуниверситета, посвященных итогам научно-исследовательских работ за 1984 г. и за 1986 г., на Всесоюзной конференции "Дифференциальные уравнения и оптимальное управление" в 1990 г. (г.Ашхабад) и на Международной конференции "Некорректно поставленные задачи в естественных науках" в 1991 г. (г.Москва).

Обьем и структура работы. Диссертация изложена на 318 страницах, состоит из списка обозначений, введения, пяти глав, состоящих из 13 параграфов и списка литературы, включающего 115 наименований. Первая глава состоит из трех, вторая из двух, третья из четырех, четвертая и пятая из двух параграфов.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованн в рабстах [1] - [14] .

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В списке обозначений приводятся основные обозначения и определяются основные функциональные пространства, котор.., часто ис -

пользуется в работе.

Во введении дается краткий обзор работ, примыкающих к теме диссертации, обосновывается актуальность темы и излагается краткое содержание диссертации.

Глава I. ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА.

Эта глава посвящена исследованию обобщенных решений основных смешанных задач для линейного и квазилинейного уравнений Шредингера и установлению некоторых априорных оценок. Смешанные задачи для уравнения Шредингера в пространствах $C^0([0,T], L_2(D))$, $C^0([0,T], \overset{\circ}{W}{}_2^1(D))$, $C^0([0,T], W_2^2(D)) \cap C^1([0,T], L_2(D))$ сравнительно мало изучены. В работах Вишика М.А., Ладыженской О.А., Бриша Н.И., Валешкевича И.Н., Лионса Ж.-Л., Поцци Г.А., Якубова С.Я., Насибова Ш.М., Владимирова М.В. и др. хотя изучены смешанные задачи для уравнения Шредингера, однако эти результаты не удобны для применения в теории оптимального управления коэффициентом линейного и квазилинейного уравнений Шредингера, так как в этих работах коэффициенты уравнения предполагаются более гладкими или являются, вообще, постоянными, особенно в квазилинейном случае, и корректность постановки смешанных задач часто изучаются в других функциональных пространствах. Кроме того, полученные результаты в этих работах не позволяют исследовать более широкий класс задач оптимального управления для уравнения Шредингера. Поэтому отдельная глава диссертации посвящена исследованию вопросов корректности постановки смешанных задач для уравнения Шредингера. Эта глава состоит из трех параграфов.

Пусть D - ограниченная область n - мерного евклидова пространства E_n, Γ - граница области D, которая предполагается достаточно гладкой, $\Omega_t = D \times (0,t)$, $\Omega = \Omega_T$, $S_t = \Gamma \times [0,T]$, $S = S_T$, $T > 0$ - заданное число. Символ $\overset{\circ}{\forall}$ будет означать "при почти всех", В § I первой главы рассматриваются первая и вторая смешанные задачи для линейного уравнения Шредингера. Сначала рассматривается задача об определении функции $\psi = \psi(x,t)$ из условий:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{j,p=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jp}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_p}\right) - a(x)\psi - v(x,t)\psi = f(x,t),\ (x,t)\in\Omega, \quad (I)$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x),\quad x\in D;\quad \psi|_S = 0, \quad (2)$$

где $i=\sqrt{-1}$, $a_{jp}(x)$, $j,p=1,2,\dots,n$, $a(x)$, $v(x,t)$ – заданные измеримые функции, удовлетворяющие условиям:

$$a_{jp}(x) = a_{pj}(x),\ j,p=1,2,\dots,n,\ \mu_0\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2 \le \sum_{j,p=1}^{n}a_{jp}(x)\xi_j\bar{\xi}_p \le$$
$$\le \mu_1\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2,\ \forall\,\xi_j\in\mathbb{C},\ j=1,2,\dots,n,\ \mathring{\forall}\,x\in D; \quad (3)$$

$$\left|\frac{\partial a_{jp}(x)}{\partial x_m}\right| \le \mu_3,\ \mathring{\forall}\,x\in D,\ j,p,m=1,2,\dots,n; \quad (4)$$

$$0 \le a(x) \le \mu_2,\ \mathring{\forall}\,x\in D; \quad (5)$$

$$|v(x,t)| \le b_0,\ \mathring{\forall}\,(x,t)\in\Omega; \quad (6)$$

$$\left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right| \le b_1,\ \mathring{\forall}\,(x,t)\in\Omega, \quad (7)$$

а функции $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\varphi\in\mathring{W}_2^1(D),\ f\in W_2^{0,1}(\Omega); \quad (8)$$

$$\varphi\in\mathring{W}_2^2(D),\ f\in W_2^{0,1}(\Omega), \quad (9)$$

где μ_j, $j=0,1,2,3$, b_k, $k=0,1$, – заданные положительные числа.

<u>Определение I</u>. Функцию $\psi\in C^0([0,T],\mathring{W}_2^1(D))$ назовем обобщенным решением смешанной задачи (I), (2) из пространства $C^0([0,T],W_2^1(D))$, если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\Omega_t}\Big(-i\psi\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial t} - \sum_{j,p=1}^{n}a_{jp}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_p}\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x_j} - a(x)\psi\bar{\eta} - v(x,t)\psi\bar{\eta}\Big)\,dx\,d\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} f\bar{\eta}\, dx\, d\tau + i\int_D \psi(x)\bar{\eta}(x,0)\, dx - i\int_D \psi(x,t)\bar{\eta}(x,t)\, dx \quad (10)$$

для любой функции $\eta \in W_2^{1,1}(\Omega)$ и любого $t \in [0,T]$.

Теорема I. Пусть функции $a_{jp}(x)$, $j,p=1,2,\dots,n$, $a(x)$, $v(x,t)$, $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям (3), (5)-(8). Тогда смешанная задача (I), (2) имеет единственное обобщенное решение из пространства $C^0([0,T],\overset{\circ}{W}{}_2^1(D))$ и для решения справедлива оценка

$$\|\psi(\cdot,t)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)} \le c_1\left(\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \quad (11)$$

для любого $t \in [0,T]$, где $c_1 > 0$ - постоянная, которая не зависит от φ, f и t.

При выполнении условий (3)-(7) и (9) доказано, что решение смешанной задачи (I), (2) из $C^0([0,T],\overset{\circ}{W}{}_2^1(D))$ принадлежит пространству $C^0([0,T],\overset{\circ}{W}{}_2^2(D)) \cap C^1([0,T],L_2(D))$.

Предположим, что функция $v(x,t)$ не зависит от переменной x, то есть $v(x,t) \equiv v(t)$ и функции $v(t)$, $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям:

$$|v(t)| \le b_0, \ \forall\, t \in (0,T), \quad (12)$$

$$\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D), \ f \in W_2^{1,0}(\Omega), \ f|_S = 0, \quad (13)$$

а остальные функции удовлетворяют условиям теоремы I. В этом случае доказан аналог теоремы I.

Если функции $a_{jp}(x)$, $j,p=1,2,\dots,n$, $a(x)$, $v(t)$ удовлетворяют условиям (3)-(5) и (12), а функции $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют следующим условиям

$$\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(D), \ f \in W_2^{2,0}(\Omega), \ f|_S = 0, \quad (14)$$

то доказано, что решение задачи (I), (2) принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$

Далее в этом параграфе исследуется вторая смешанная задача для линейного уравнения Шредингера с однородным граничным условием и установлены аналоги результатов первой смешанной задачи. Кроме того, изучена вторая смешанная задача с неоднородным граничным условием и доказана теорема существования и единственности слабо обобщенного решения из пространства $C^0([0,T], L_2(D))$.

В § 2 первой главы изучаются смешанные задачи для квазилинейного уравнения Шредингера. Сначала в этом параграфе рассматривается задача об определении функции $\psi(x,t)$ в области $\Omega=(0,\ell)\times(0,T)$ из условий:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-a(x)\psi-v(x,t)\psi+a_1|\psi|^2\psi=f(x,t), \quad (15)$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x),\ x\in(0,\ell),\ \psi(0,t)=\psi(\ell,t)=0,\ t\in(0,T), \quad (16)$$

где $\ell, T>0$ – заданные числа, $a_1\neq 0$ – заданное вещественное число, функции $a_0(x)$, $a(x)$, $v(x,t)$, $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ являются измеримыми функциями и удовлетворяют условиям:

$$0<\mu_0\leq a_0(x)\leq\mu_1,\ \forall\, x\in(0,\ell); \quad (17)$$

$$0\leq a(x)\leq\mu_2,\ \forall\, x\in(0,\ell); \quad (18)$$

$$|v(x,t)|\leq b_0,\ \left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right|\leq b_1,\ \forall\,(x,t)\in\Omega; \quad (19)$$

$$\varphi\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell),\ f\in W_2^{0,1}(\Omega), \quad (20)$$

где μ_j, $j=0,1,2$, b_k, $k=0,1$, – заданные положительные числа.

Имеет место

<u>Теорема 2</u>. Пусть функции $a_0(x)$, $a(x)$, $v(x,t)$, $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям (17)-(20). Тогда смешанная задача (15), (16) имеет обобщенное решение из пространства $C^0([0,T],\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell))$ и для этого решения справедлива оценка

$$\|\psi(\cdot,t)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{\,1}_2(0,\ell)} \le C_2\Big(\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{\,1}_2(0,\ell)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} +$$

$$+ \|\varphi\|^6_{L_2(0,\ell)} + \|f\|^6_{L_2(\Omega)}\Big) \qquad (21)$$

для любого $t \in [0,T]$, где $C_2 > 0$ - постоянная, которая не зависит от φ , f и t .

Дополнительно предполагая, что функция $a_0(x)$ удовлетворяет также условию

$$\left|\frac{da_0(x)}{dx}\right| \le \mu_3\ ,\ \forall\ x \in (0,\ell)\ , \qquad (22)$$

доказана единственность решения смешанной задачи (I5), (I6). Кроме того, в этом параграфе при условиях (I7)-(I9), (22) и $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{\,2}_2(0,\ell)$, $f \in W_2^{0,1}(\Omega)$ установлено, что решение смешанной задачи (I5), (I6) принадлежит пространству $C^0([0,T], \overset{\circ}{W}{}^{\,2}_2(0,\ell)) \cap C^1([0,T], L_2(0,\ell))$.

Аналоги выше полученных результатов доказаны в случае второй смешанной задачи для уравнения (I5).

Далее в этом параграфе изучается первая смешанная задача для многомерного квазилинейного уравнения Шредингера, то есть задача об определении функции $\psi(x,t)$ из условий:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \sum_{j,p=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{jp}(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_p}\Big) - a(x)\psi - v(x,t)\psi + i a_1|\psi|^2\psi = f(x,t), \qquad (23)$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x),\ x \in D \subset E_3\ ,\ \psi|_S = 0\ , \qquad (24)$$

где $a_{jp}(x), j,p = 1,2,3,$ - заданные ограниченные измеримые функции, удовлетворяющие условиям (3), (4) при $n = 3$, а функции $a(x)$, $v(x,t)$, $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ - заданные измеримые функции, удовлетворяющие условиям:

$$0 \le a(x) \le \mu_2\ ,\ \left\|\frac{\partial a(x)}{\partial x}\right\|_{E_3} \le \mu_4\ ,\ \forall\ x \in D\ , \qquad (25)$$

$$|v(x,t)| \le b_0, \quad \left\| \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right\|_{E_3} \le b_1, \quad \left| \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right| \le b_2 \quad \forall (x,t) \in \Omega, \tag{26}$$

$$\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(D), \quad f \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,1}(\Omega), \tag{27}$$

$a_1 > 0$ – заданное число, μ_j, $j=\overline{0,4}$, b_k, $k=\overline{0,2}$, – заданные положительные числа.

Теорема 3. Пусть функции $a_{jp}(x)$, $j,p=1,2,3$, $a(x)$, $v(x,t)$, $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям (3), (4) и (25)-(27). Тогда смешанная задача (23), (24) имеет единственное решение из пространства $C^0([0,T], \overset{\circ}{W}{}_2^2(D)) \cap C^1([0,T], L_2(D))$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\psi(\cdot,t)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(D)} + \left\| \frac{\partial \psi(\cdot,t)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(D)} \le C_3 \Big(\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(D)} + \|f\|^2_{W_2^{1,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)} + \|f\|^6_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)} \Big) \tag{28}$$

для любого $t \in [0,T]$, где $C_3 > 0$ – постоянная не зависит от t.

В конце этого параграфа рассматривается вторая смешанная задача для уравнения (23) и установлен аналог теоремы 3.

В § 3 первой главы установлены некоторые априорные оценки решений первой и второй смешанных задач для одномерного квазилинейного уравнения Шредингера, котрые играют существенную роль при получении результатов четвертой и пятой главы.

Глава 2. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА.

Вторая глава посвящена исследованию задач оптимального управления для линейного уравнения Шредингера. Эта глава состоит из двух параграфов.

В § I второй главы сначала исследуется задача оптимального управления для линейного уравнения Шредингера с финальным и интегральным критерием качества по всей области, когда управления входят в коэффициенты, правую часть этого уравнения и в начальное условие.

Пусть требуется минимизировать функционал

$$J_\alpha(v) = \beta_0 \|\psi - y_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \beta_1 \|\psi(\cdot, T; v) - y_1\|^2_{L_2(D)} + \alpha \|v - \omega\|^2_H \quad (29)$$

на множестве $V \equiv \{ v : v = (v_0, v_1, v_2),\ v_0 \in L_\infty^{(m_0)}(\Omega),\ v_0(x,t) \in V_0 \subset$ $\subset E_{m_0},\ \forall (x,t) \in \Omega,\ v_1 \in U_1 \subset L_2^{(m_1)}(\Omega),\ v_2 \in U_2 \subset L_2^{(m_2)}(D) \}$

при условиях

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{j,p=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jp}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_p}\right) - a(x)\psi - c(x,t,v_0)\psi = f(x,t,v_1), \quad (30)$$

$$\psi(x;0) = \varphi(x, v_2),\ x \in D,\ \psi|_S = 0, \quad (31)$$

где $\alpha, \beta_0, \beta_1 \geq 0$ – заданные числа, причем $\beta_0 + \beta_1 \neq 0$, $\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2) \in H$ – заданный элемент $H = L_2^{(m_0)}(\Omega) \times L_2^{(m_1)}(\Omega) \times L_2^{(m_2)}(D)$; m_0, m_1, m_2 – натуральные числа, $y_0 \in L_2(\Omega)$, $y_1 \in L_2(D)$ – заданные функции, V_0, U_1, U_2 – заданные замкнутые ограниченные множества, функции $a_{jp}(x)$, $j,p = 1,2,\dots,n$, $a(x)$ являются ограниченными измеримыми и удовлетворяют условиям (3) – (5), а функции $c(x,t,v_0)$, $f(x,t,v_1)$ и $\varphi(x,v_2)$ удовлетворяют условиям Каратеодори в областях $\Omega \times V_0$, $\Omega \times E_{m_1}$, $D \times E_{m_2}$ соответственно. Кроме того, предположим, что выполняются следующие условия:

$$|c(x,t,v_0(x,t))| \leq b_0,\ \forall v_0 \in U_0,\ \forall (x,t) \in \Omega, \quad (32)$$

где $b_0 > 0$ – заданное число, $U_0 \equiv \{ v_0 : v_0 = v_0(x,t),\ v_0 \in L_\infty^{(m_0)}(\Omega),$ $v_0(x,t) \in V_0 \subset E_{m_0},\ \forall (x,t) \in \Omega \}$;

$c(x,t,v_0(x,t)) \in L_\infty(\Omega)$, $\forall\, v_0 \in L_\infty^{(m_0)}(\Omega)$, $f(x,t,v_1(x,t)) \in L_2(\Omega)$,

$$\forall\, v_1 \in L_2^{(m_1)}(\Omega) \,,\; \varphi(x,v_2(x)) \in L_2(D) \,,\; \forall\, v_2 \in L_2^{(m_2)}(D) \,; \quad (33)$$

$$|c(x,t,\tau_0) - c(x,t,\tau_1)| \leq C_0(x,t) \, \|\tau_0 - \tau_1\|_{E_{m_0}} \,,\; \forall\, \tau_0, \tau_1 \in V_0 \,, \quad (34)$$

$\forall (x,t) \in \Omega$, где $0 < C_0 \in L_\infty(\Omega)$.

Задачу об определении функции $\Psi(x,t)$ при каждом заданном $v \in V$ из условий (30), (3I) будем называть редуцированной задачей. Под решением редуцированной задачи понимается слабое обобщенное решение $\Psi = \Psi(x,t) \equiv \Psi(x,t;v)$ из $C^0([0,T], L_2(D))$.

Имеет место

<u>Теорема 4</u>. Существует плотное подмножество G пространства H такое, что для любого $\omega \in G$ при $\alpha > 0$ задача оптимального управления (29)-(3I) имеет единственное решение.

Введем обозначения

$$\mathcal{H}_0(x,t,\Psi,v_0,v_1,\overline{\Phi}) = Re\left[\left(c(x,t,v_0)\Psi + f(x,t,v_1)\right)\overline{\Phi}\,\right] -$$
$$- \alpha \sum_{j=0}^{1} \sum_{k=1}^{m_j} \left(v_j^k - \omega_j^k\right)^2 , \quad (35)$$

$$\mathcal{H}_1(x,\Psi,v_2,\overline{\Phi}) = Re\left[i\,\varphi(x,v_2)\,\overline{\Phi}(x,0)\right] - \alpha \sum_{k=1}^{m_2} \left(v_2^k - \omega_2^k\right)^2 , \quad (36)$$

где $\Psi \equiv \Psi(x,t;v)$ является решением редуцированной задачи при $v \in V$, $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}(x,t)$ есть комплексное сопряжение функции $\Phi(x,t)$ а $\Phi(x,t)$ является решением сопряженной задачи к задаче (29)-(3I).

<u>Теорема 5</u>. Для оптимальности управления $v^* \in V$ в задаче (29)-(3I) необходимо выполнения условий:

$$\mathcal{H}_0(x,t,\Psi^*(x,t),v_0^*(x,t),v_1^*(x,t),\overline{\Phi}^*(x,t)) =$$

$$\max_{v_0 \in V_0,\, v_1 \in V_1} \mathcal{H}_0(x,t,\Psi^*(x,t),v_0,v_1,\overline{\Phi}^*(x,t)) \,,\; \forall (x,t) \in \Omega \,, \quad (37)$$

$$\mathcal{H}_1(x, \psi^*(x,0), v_2^*(x), \bar{\Phi}^*(x,0)) =$$
$$= \max_{v_2 \in V_2} \mathcal{H}_1(x, \psi^*(x,0), v_2, \bar{\Phi}^*(x,0)), \ \mathring{\forall} x \in D, \qquad (38)$$

где $\psi^*(x,t) \equiv \psi(x,t;v^*)$, $\bar{\Phi}^*(x,t) \equiv \bar{\Phi}(x,t;v^*)$, V_0, V_1, V_2 - заданные замкнутые ограниченные множества из E_{m_0}, E_{m_1}, E_{m_2} - соответственно.

Далее в этом параграфе указываются достаточные условия дифференцируемости по Фреше функционала (29) и находится выражение для его градиента в виде:

$$J'_\alpha(v) = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial v_0}, \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial v_1}, \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial v_2}\right). \qquad (39)$$

Используя этот градиент, устанавливается необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

В конце этого параграфа рассматриваются задачи оптимального управления, когда управление линейно входит в коэффициент уравнения Шредингера. При этом исследуются задачи о минимизации функционала (29) при $\alpha = 0$ на множествах $V \equiv \{v : v = v(t),\ v \in L_2(0,T),\ |v(t)| \le b_0,\ \mathring{\forall} t \in (0,T)\}$ и $\widetilde{V} \equiv \{v : v = v(x,t),\ v \in W_2^{0,1}(\Omega),\ |v(x,t)| \le b_0,\ \left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right| \le b_1,\ \mathring{\forall} (x,t) \in \Omega\}$ при условиях (30), (31), когда $C(x,t,v_0) = v_0 \equiv v(x,t)$, $f(x,t,v_1) \equiv f(x,t)$, $\varphi(x,v_2) \equiv \varphi(x)$. В обоих случаях доказывается существование хотя бы одного решения рассмотренных задач оптимального управления. Когда управление v зависит только от переменной t, устанавливается необходимое условие оптимальности в виде принципа максимума Понтрягина с помощью оценки остаточного члена приращения функционала, не используя методику доказательства теоремы 5. В случае множества допустимых управлений $\widetilde{V}$ для рассматриваемой задачи оптимального управления доказывается необходимое условие оптимальности в виде вариацион -

...ного неравенства. В этом параграфе приведен также пример неустойчивости рассмотренных задач оптимального управления при $\alpha = 0$.

В § 2 второй главы сначала исследуются задачи оптимального управления для линейного уравнения Шредингера с интегральным критерием качества по всей области и её границе, когда управления входят в коэффициент и правую часть уравнения и зависят только от переменной x или только от переменной t. При этом установлены аналоги теорем 4, 5. Кроме того, указываются достаточные условия дифференцируемости по Фреше рассмотренного функционала и находится формула для его градиента, с помощью которого доказывается необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

В конце § 2 второй главы, как и в первом параграфе, исследуются задачи оптимального управления для линейного уравнения Шредингера с интегральным критерием качества по всей области и её границе, когда управление входит линейно в коэффициент уравнения и функционал не содержит интеграла от управления. В этом случае получены аналогичные результаты. Кроме того, приведен пример неустойчивости.

Глава 3. ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА.

Третья глава посвящена исследованию задач оптимального управления для квазилинейного уравнения Шредингера, когда управления входят в коэффициенты этого уравнения. Эта глава состоит из четырех параграфов.

В § I третьей главы изучается задача оптимального управления для одномерного квазилинейного уравнения Шредингера с финальным и интегральным критерием качества по всей области.

Пусть требуется минимизировать функционал

$$J_\alpha(v) = \beta_0 \|\Psi - y_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \beta_1 \|\Psi(\cdot, T; v) - y_1\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha \|v - \omega\|^2_{L_2^{(m)}(0,l)} \quad (40)$$

на множестве $V \equiv \{ v : v = v(x),\ v \in L_\infty^{(m)}(0,l),\ v(x) \in V_0 \subset E_m,\ \overset{\circ}{\forall}\, x \in (0,l) \}$ при условиях

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) - a(x)\Psi - C(x,v)\Psi + a_1|\Psi|^2\Psi = f(x,t), \quad (41)$$

$$\Psi(x,0) = \varphi(x),\ x \in (0,l),\ \Psi(0,t) = \Psi(l,t) = 0,\ t \in (0,T), \quad (42)$$

где $\alpha,\ \beta_0,\ \beta_1 \geq 0$ - заданные числа, причем $\beta_0 + \beta_1 \neq 0$, $\omega \in L_2^{(m)}(0,l)$ - заданный элемент, m - натуральное число, $y_0 \in L_2(\Omega)$, $y_1 \in L_2(D)$ - заданные функции, $a_1 \neq 0$ - любое вещественное число, $a_0(x)$, $a(x)$ являются ограниченными измеримыми функциями и удовлетворяют условиям (17), (18), (22), $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)$, $f \in W_2^{0,1}(\Omega)$, а $C(x,v)$ удовлетворяет условиям Каратеодори в области $(0,l) \times V_0$. Кроме того, предположим, что выполняются следующие условия:

$$0 \leq C(x, v(x)) \leq b_0,\ \forall v \in V,\ \overset{\circ}{\forall}\, x \in (0,l); \quad (43)$$

$$C(x, v(x)) \in L_\infty(0,l),\ \forall v \in L_\infty^{(m)}(0,l); \quad (44)$$

$$|C(x,\tau_0) - C(x,\tau_1)| \leq C_0(x)\|\tau_0 - \tau_1\|_{E_m},\ \forall \tau_0, \tau_1 \in V_0,\ \overset{\circ}{\forall}\, x \in (0,l), \quad (45)$$

где $0 < C_0 \in L_\infty(0,l)$.

Под решением редуцированной задачи (41), (42) понимается функция $\Psi(x,t) \equiv \Psi(x,t;v)$ из $C^0([0,T], \overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)) \cap C^1([0,T], L_2(0,l))$.

<u>Теорема 6</u>. Существует плотное подмножество G пространства $L_2^{(m)}(0,l)$ такое, что для любого $\omega \in G$ при $\alpha > 0$ задача оптимального управления (40)-(42) имеет единственное решение.

Введем функцию

$$\mathcal{H}(x, \Psi, v, \overline{\varphi}) = C(x,v)\int_0^T Re[\Psi\overline{\varphi}]\,dt - \alpha\sum_{k=1}^m (v^k - \omega^k)^2, \quad (46)$$

где $\Psi = \Psi(x,t;v)$ - есть решение редуцированной задачи (41), (42), а $\varphi \equiv \varphi(x,t;v)$ является решением соответствующей сопряженной задачи при $v \in V$.

Теорема 7. Для оптимальности управления $v^* \in V$ в задаче (40)-(42) необходимо выполнение условия:

$$\mathcal{H}(x,\psi^*(x,\cdot),v^*(x),\bar{\varphi}^*(x,\cdot)) = \max_{v \in V_0} \mathcal{H}(x,\psi^*(x,\cdot),v,\bar{\varphi}^*(x,\cdot)) \quad (47)$$

для $\overset{\circ}{\forall} x \in (0,l)$, где $\psi^*(x,t) \equiv \psi(x,t;v^*)$, $\bar{\varphi}^*(x,t) \equiv \bar{\varphi}(x,t;v^*)$.

Кроме того, в этом параграфе приводятся достаточные условия дифференцируемости по Фреше функционала (40) и находится выражение для его градиента, на основе которого доказано необходимое условие в виде вариационного неравенства.

Далее в § I третьей главы рассматривается задача оптимального управления для одномерного квазилинейного уравнения Шредингера, когда управление входит линейно в коэффициент этого уравнения и зависит от x и t. Для рассматриваемой задачи оптимального управления доказано существование хотя бы одного решения и необходимое условие оптимальности в виде вариационного неравенства.

В § 2 третьей главы исследуются задачи оптимального управления для одномерного квазилинейного уравнения Шредингера с интегральным критерием качества по всей области и её границе. При этом установлены аналоги результатов первого параграфа этой главы.

В § 3 третьей главы исследуется задача оптимального управления для многомерного квазилинейного уравнения Шредингера с финальным и интегральным критерием качества по всей области, когда управление линейно входит в коэффициент уравнения и зависит от обеих переменных x и t.

Пусть требуется минимизировать функционал

$$J_0(v) = \beta_0 \|\psi - y_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \beta_1 \|\psi(\cdot,T;v) - y_1\|^2_{L_2(D)} \quad (48)$$

на множестве $V \equiv \{ v : v = v(x,t) ,\ v \in W_2^{1,1}(\Omega) ,\ |v(x,t)| \le b_0 ,$ $\left\| \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right\|_{E_3} \le b_1 ,\ \left| \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right| \le b_2 ,\ \forall (x,t) \in \Omega \}$ при условиях

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{j,p=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jp}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_p} \right) - a(x)\psi - v(x,t)\psi + i a_1 |\psi|^2 \psi = f(x,t), \qquad (49)$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x),\ x \in D \subset E_3 ,\ \psi|_S = 0 , \qquad (50)$$

где b_j , $j = 0,1,2$, - заданные числа, такие, что множество V не пусто, $\beta_0 , \beta_1 \ge 0$ - заданные числа, причем $\beta_0 + \beta_1 \ne 0$, $a_1 > 0$ - любое число, $y_0 \in L_2(\Omega)$, $y_1 \in L_2(D)$ - заданные функции, $a_{jp}(x)$ $j,p = 1,2,3$, - ограниченные измеримые функции, удовлетворяющие условиям (3), (4) при $n = 3$, $a(x), \varphi(x), f(x,t)$ - заданные измеримые функции, удовлетворяющие условиям (25), (27).

Под решением редуцированной задачи (49), (50) понимается функция $\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ из следующего класса функций:

$$\overset{\circ}{W} \equiv \left\{ \psi : \psi = \psi(x,t) , \psi \in L_\infty([0,T], \overset{\circ}{W}{}_2^2(D)) ,\ \frac{\partial \psi}{\partial t} \in L_\infty([0,T], L_2(D)) \right\}$$

<u>Теорема 8.</u> Задача оптимального управления (48)-(50) имеет хотя бы одно решение.

Далее в этом параграфе доказана формула для вариации функционала в виде

$$\delta J_0(v, w) = - \int_\Omega Re \left[\psi(x,t) \bar{\Phi}(x,t) \right] w(x,t) dx dt \qquad (51)$$

для любой функции $w \in W_\infty^{1,1}(\Omega)$, где $\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ является решением редуцированной задачи (49), (50), а $\Phi(x,t) \equiv \Phi(x,t;v)$ - есть решение сопряженной задачи, соответствующей задаче (48)-(50).

<u>Теорема 9.</u> Пусть $V_* \equiv \{ v : v \in V,\ J_0(v) = J_{0*} = \inf_{v \in V} J(v) \}$ является множеством решений задачи оптимального управления (48)-(50). Тогда в любой точке $v^* \in V_*$ необходимо выполнение условия

$$\int\limits_{\Omega} Re\left[\psi^*(x,t)\,\bar{\varphi}^*(x,t)\right]\left(v(x,t)-v^*(x,t)\right)dx\,dt \le 0 \qquad (52)$$

при всех $v \in V$, где $\psi^*(x,t) \equiv \psi(x,t;v^*)$, $\bar{\varphi}^*(x,t) = \bar{\varphi}(x,t;v^*)$.

В § 4 третьей главы исследуется задача оптимального управления для многомерного квазилинейного уравнения Шредингера с интегральным критерием качества по всей области и её границе, когда управление входит линейно в коэффициант уравнения и зависит от обеих переменных x и t. При этом критерий качества не содержит интеграла от управления. В этом параграфе установлены аналоги результатов третьего параграфа этой главы.

Глава 4. РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА.

Четвертая глава посвящена исследованию конечно-разностной аппроксимации задач оптимального управления для линейного уравнения Шредингера, когда управление входит в коэффициент этого уравнения. Эта глава состоит из двух параграфов.

В § I четвертой главы исследуются вопросы конечно-разностной аппроксимации задачи оптимального управления для линейного уравнения Шредингера с финальным критерием качества, когда управление линейно входит в коэффициент этого уравнения.

Пусть требуется минимизировать функционал

$$\mathcal{J}(v) = \int_0^l \left|\psi(x,T;v) - y(x)\right|^2 dx \qquad (53)$$

на множестве

$$V \equiv \Big\{ v : v = v(x,t),\ v \in W_2^{1,1}(\Omega),\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \in L_2(\Omega),\ |v(x,t)| \le b_0,$$

$$\left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right| \le b_1,\ \left|\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right| \le b_2,\ \left|\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x \partial t}\right| \le b_3,\ \forall (x,t) \in \Omega \Big\} \qquad (54)$$

при условиях:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - a(x)\psi - v(x,t)\psi = f(x,t) , \quad (55)$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x),\ x\in(0,l),\ \frac{\partial\psi(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial\psi(l,t)}{\partial x} = 0 ,\ t\in(0,T), \quad (56)$$

где b_j, $j=\overline{0,3}$, – заданные положительные числа, такие, что множество V не пусто, $a_0>0$ – заданное число, $y\in W_2^1(0,l)$ – заданная функция, $a(x)$ – заданная ограниченная измеримая функция, удовлетворяющая условиям

$$0<\mu_4 \le a(x) \le \mu_2 ,\quad \left|\frac{da(x)}{dx}\right| \le \mu_5 ,\ \forall x\in(0,l) , \quad (57)$$

а функции $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям

$$\varphi\in W_2^3(0,l),\ \frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(l)}{dx} = 0 ,\ f\in W_2^{0,1}(\Omega),\ \frac{\partial f}{\partial x}\in W_2^{0,1}(\Omega), \quad (58)$$

μ_2, μ_4, μ_5 – заданные положительные числа.

Рассмотрим разностный аналог этой задачи. С этой целью сперва введем последовательность сеток $\{(x_j,t_k)_n\}$, $n=1,2,\ldots$, $j=\overline{0,M_n}$, $k=\overline{0,N_n}$, где $x_j = jh-h/2$, $h=h_n = l/(M_n-1)$, $t_k = k\tau$, $\tau = \tau_n = T/N_n$. Обозначим $M=M_n$, $N=N_n$, $\delta_{\bar t}\varphi_{jk} = (\varphi_{jk}-\varphi_{jk-1})/\tau$, $\delta_{\bar x}\varphi_{jk} = (\varphi_{jk}-\varphi_{j-1k})/h$, $\delta_x\varphi_{jk} = (\varphi_{j+1k}-\varphi_{jk})/h$, $\delta_{x\bar x}\varphi_{jk} = (\varphi_{j+1k} - 2\varphi_{jk} + \varphi_{j-1k})/h^2$.

Пусть при каждом $n\ge 1$ требуется минимизировать функцию

$$I_n([v]_n) = h\sum_{j=1}^{M-1}|\varphi_{jN}-y_j|^2 \quad (59)$$

на множестве

$$V_n \equiv \{ [v]_n : [v]_n = \{v_{jk}\}_{j=\overline{1,M-1}}^{k=\overline{1,N}} ,\ |v_{jk}|\le b_0 ,\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},$$
$$|\delta_{\bar x} v_{jk}| \le b_1 ,\ j=\overline{2,M-1},\ k=\overline{1,N},\ |\delta_{\bar t} v_{jk}|\le b_2 ,\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{2,N},$$
$$|\delta_{x\bar x} v_{jk}|\le b_3 ,\ j=\overline{2,M-1},\ k=\overline{2,N} \} \quad (60)$$

при условиях

$$i\delta_{\bar t}\varphi_{jk} + a_0\delta_{x\bar x}\varphi_{jk} - a^j\varphi_{jk} - v_{jk}\varphi_{jk} = f_{jk}\,,\ j=\overline{1,M-1}\,,\ k=\overline{1,N}\,, \tag{61}$$

$$\varphi_{j0} = \varphi_j\,,\ j=0,1,\dots,M\,,\ \delta_{\bar x}\varphi_{1k} = \delta_{\bar x}\varphi_{Mk} = 0\,,\ k=1,2,\dots,N\,, \tag{62}$$

где

$$y_j = \frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} y(x)\,dx\,,\ a^j = \frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x)\,dx\,,\ \varphi_j = \frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\varphi(x)\,dx\,,$$

$$j=1,2,\dots,M-1\,,\ \varphi_0=\varphi_1\,,\ \varphi_M=\varphi_{M-1}\,,\ f_{jk} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} f(x,t)\,dx\,dt\,,$$

$j=1,2,\dots,M-1,\ k=1,2,\dots,N$.

Теорема IO. Для решения разностной схемы (6I), (62) при $[v]_n \in V_n$ верна оценка

$$h\sum_{j=1}^{M-1}|\varphi_{jm}|^2 \le C_4\Big(h\sum_{j=1}^{M-1}|\varphi_j|^2 + \tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}|f_{jk}|^2\Big) \tag{63}$$

для любого $m\in\{1,2,\dots,N\}$, где $C_4>0$ – постоянная, которая не зависит от h и τ.

Введем следующие усреднения решения редуцированной задачи (55), (56) при $v\in V$:

$$[\psi(x,t;v)]_n = \{\psi_{jk}\}\,,\ \text{где}\ \psi_{jk} = \frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi(x,t_k)\,dx\,,\ j=\overline{1,M-1}\,,$$

$k=\overline{1,N}$, $\psi_{j0}=\varphi_j$, $j=\overline{0,M}$, $\psi_{0k}=\psi_{1k}$, $\psi_{Mk}=\psi_{M-1k}$, $k=\overline{1,N}$.

Кроме того, определим оператор Q_n на множестве V формулой

$$Q_n(v) = \{v^{jk}\}\,,\ \text{где}\ v^{jk} = \int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v(x,t)\,dx\,dt,\ j=\overline{1,M-1}\,,\ k=\overline{1,N}\,.$$

Обозначим $\{z_{jk}\} = \{\varphi_{jk}\} - \{\psi_{jk}\}$. Ясно, что $\{z_{jk}\}$ будет удовлетворять следующей системе

$$i\delta_{\bar t}z_{jk} + a_0\delta_{x\bar x}z_{jk} - a^j z_{jk} - v_{jk}z_{jk} = F_{jk}\,,\ j=\overline{1,M-1}\,,\ k=\overline{1,N}\,, \tag{64}$$

$$z_{j0}=0,\ j=0,1,2,\dots,M,\quad \delta_{\bar x} z_{1k}=\delta_{\bar x} z_{Mk}=0,\ k=1,2,\dots,N, \quad (65)$$

где сеточная функция F_{jk} определяется формулой

$$F_{jk}=f_{jk}-\left(i\delta_{\bar t}\psi_{jk}+a_0\delta_{x\bar x}\psi_{jk}-a^{j}\psi_{jk}-v_{jk}\psi_{jk}\right),\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N}. \quad (66)$$

Теорема II. Пусть выполнено условие $C_5\le \tau/h^2\le C_6$, где $C_5, C_6>0$ - постоянные, не зависящие от h и τ. Тогда верна оценка

$$h\sum_{j=1}^{M-1}|z_{jm}|^2\le C_7\left(\tau^2+h^2+\|Q_n(v)-[v]_n\|^2\right),\ \forall m\in\{1,2,\dots,N\}, \quad (67)$$

где $C_7>0$ - постоянная, которая не зависит от h и τ,

$$\|Q_n(v)-[v]_n\|=\left(\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}|v^{jk}-v_{jk}|^2\right)^{1/2}.$$

Теорема I2. Пусть выполнены условия теоремы II. Тогда для любых $v\in V,\ [v]_n\in V_n$ имеет место оценка

$$|J(v)-I_n([v]_n)|\le C_8\left(\tau+h+\|Q_n(v)-[v]_n\|\right), \quad (68)$$

где $C_8>0$ - постоянная, которая не зависит от h и τ.

Далее, используя теорему I2, и доказывая две вспомогательные леммы, доказана оценка скорости сходимости разностных аппроксимаций по функционалу в виде

$$|I_{n*}-J_*|\le C_9(\tau+h), \quad (69)$$

где $J_*=\inf\limits_{v\in V}J(v)$, $I_{n*}=\inf\limits_{[v]_n\in V_n}I_n([v]_n)$, $C_9>0$ - постоянная, которая не зависит от h и τ.

В § 2 четвертой главы исследуются вопросы конечно-разностной аппроксимации задачи оптимального управления для линейного уравнения Шредингера с интегральным критерием качества по границе области, когда управление входит в коэффициент уравнения и зависит от обеих переменных x и t. В этом параграфе установлены аналоги теорем и лемм первого параграфа и доказана оценка скорости сходимости разностных аппроксимаций по функционалу в виде

$$\left| I_{n*} - J_* \right| \le C_{10} \left(\sqrt{\tau} + \sqrt{h} \right), \qquad (70)$$

где $C_{10} > 0$ - постоянная, которая не зависит от h и τ.

Глава 5. РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА.

Пятая глава посвящена исследованию вопросов конечно-разностной аппроксимации задач оптимального управления для квазилинейного уравнения Шредингера, когда управление входит в коэффициент уравнения. Эта глава состоит из двух параграфов.

В § I пятой главы изучается конечно-разностная аппроксимация следующей задачи оптимального управления о минимизации функционала

$$J(v) = \int_0^l |\psi(x,T;v) - y(x)|^2 dx \qquad (71)$$

на множестве

$$V \equiv \Big\{ v : v = v(x,t),\ v \in W_2^{1,1}(\Omega),\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \in L_2(\Omega),\ b_0 \le v(x,t) \le b_1, \quad \left| \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right| \le b_2,\ \left| \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right| \le b_3,\ \left| \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x \partial t} \right| \le b_4,\ \forall (x,t) \in \Omega \Big\} \qquad (72)$$

при условиях

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - a(x)\psi - v(x,t)\psi - a_1 |\psi|^2 \psi = f(x,t), \qquad (73)$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x),\ x \in (0,l),\ \frac{\partial \psi(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(l,t)}{\partial x} = 0,\ t \in (0,T), \qquad (74)$$

где b_j, $j = \overline{0,4}$, - заданные положительные числа, такие, что множество V не пусто, $a_0, a_1 > 0$ - заданные числа, $y \in W_2^1(0,l)$ - заданная функция, $a(x)$ - заданная ограниченная измеримая функция, удовлетворяющая условиям (57), а функции $\varphi(x)$ и $f(x,t)$ удовлетворяют условиям (58).

Записывая дискретный аналог задачи (7I)-(74), получим задачу о минимизации функции

$$I_n([v]_n) = h \sum_{j=1}^{M-1} |\varphi_{jN} - y_j|^2 \qquad (75)$$

при каждом натуральном $n \geqslant 1$ на множестве

$$V_n \equiv \{ [v]_n : [v]_n = \{v_{jk}\}_{j=\overline{1,M-1}}^{k=\overline{1,N}},\ b_0 \le v_{jk} \le b_1,\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},$$
$$|\delta_{\bar x} v_{jk}| \le b_2,\ j=\overline{2,M-1},\ k=\overline{1,N},\ |\delta_{\bar t} v_{jk}| \le b_3,\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{2,N},$$
$$|\delta_{\bar x \bar t} v_{jk}| \le b_4,\ j=\overline{2,M-1},\ k=\overline{2,N} \ \} \qquad (76)$$

при условиях

$$i\,\delta_{\bar t}\varphi_{jk} + a_0\,\delta_{x\bar x}\varphi_{jk} - a^j\varphi_{jk} - v_{jk}\varphi_{jk} - a_1|\varphi_{jk}|^2\varphi_{jk} =$$
$$= f_{jk},\ j=1,2,\dots,M-1,\ k=1,2,\dots,N, \qquad (77)$$

$$\varphi_{j0} = \varphi_j,\ j=0,1,\dots,M,\ \delta_{\bar x}\varphi_{1k} = \delta_{\bar x}\varphi_{Mk} = 0,\ k=1,2,\dots,N, \qquad (78)$$

где сеточные функции y_j, a^j, φ_j, f_{jk} определены, как и выше.

Имеет место

Теорема I3. Для решения разностной схемы (77), (78) при $[v]_n \in V_n$ верна оценка

$$h\sum_{j=1}^{M-1}|\varphi_{jm}|^2 + h\sum_{j=2}^{M-1}|\delta_{\bar x}\varphi_{jm}|^2 + h\sum_{j=1}^{M-1}|\varphi_{jm}|^4 \le C_{11}\Big(h\sum_{j=1}^{M-1}|\varphi_j|^2 +$$
$$+ h\sum_{j=2}^{M-1}|\delta_{\bar x}\varphi_j|^2 + h\sum_{j=1}^{M-1}|\varphi_j|^4 + \tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}|f_{jk}|^2 +$$
$$+ \tau h\sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1}|\delta_t f_{jk}|^2\Big),\ m\in\{1,2,\dots,N\}, \qquad (79)$$

где $C_{11} > 0$ - постоянная, которая не зависит от h и τ.

Для оценки погрешности схемы (77), (78) рассмотрим систему:

$$i\delta_{\bar t} z_{jk} - a_0 \delta_{x\bar x} z_{jk} - a^j z_{jk} - v_{jk} z_{jk} = F_{jk} + a_1 \left(|\varphi_{jk}|^2 \varphi_{jk} - \right.$$

$$\left. - |\psi_{jk}|^2 \psi_{jk}\right), \; j = 1,2,\dots,M-1, \; k = 1,2,\dots,N, \tag{80}$$

$$z_{j0} = 0, \; j = 0,1,\dots,M, \; \delta_{\bar x} z_{1k} = \delta_{\bar x} z_{Mk} = 0, \; k = 1,2,\dots,N, \tag{81}$$

где $z_{jk} = \varphi_{jk} - \psi_{jk}$, φ_{jk} – есть решение разностной схемы (77), (78), а ψ_{jk} являются усреднениями решения редуцированной задачи (73), (74) при $v \in V$. Сеточная функция F_{jk} в данном случае определяется формулой:

$$F_{jk} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left(a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - a(x)\psi - v(x,t)\psi - a_1 |\psi|^2 \psi \right) dx\, dt -$$

$$- a_0 \delta_{x\bar x} \psi_{jk} + a^j \psi_{jk} + v_{jk} \psi_{jk} + a_1 |\psi_{jk}|^2 \psi_{jk}, \; j = \overline{1, M-1}, \; k = \overline{1, N}. \tag{82}$$

Имеет место

<u>Теорема 14</u>. Пусть $\tau > 0$ удовлетворяет условию

$$\tau \le \Big[8 a_1 \max_{\substack{1 \le j \le M-1 \\ 1 \le k \le N}} \left(|\psi_{jk}|^2 + |\varphi_{jk}|^2 \right) \Big]^{-1}.$$

Пусть, кроме того, выполнено условие согласования $C_{12} \le h^2/\tau \le C_{13}$, где $C_{12}, C_{13} > 0$ – постоянные, не зависящие от h и τ . Тогда верна оценка

$$h \sum_{j=1}^{M-1} |z_{jm}|^2 \le C_{14} \left(\tau^2 + h^2 + \| Q_n(v) - [v]_n \|^2 \right), \; m \in \{1,2,\dots,N\}, \tag{83}$$

где $C_{14} > 0$ – постоянная, которая не зависит от h и τ .

<u>Теорема 15</u>. Пусть выполнены условия теоремы 14. Тогда для любых $v \in V$, $[v]_n \in V_n$ имеет место оценка

$$\left| J(v) - I_n([v]_n) \right| \le C_{15} \left(\tau + h + \| Q_n(v) - [v]_n \| \right), \tag{84}$$

где $C_{15} > 0$ – постоянная, которая не зависит от h и τ .

Далее, используя теорему I5 и доказывая две вспомогательные леммы, доказана оценка скорости сходимости разностных аппроксимаций по функционалу в виде оценки (69).

В § 2 пятой главы изучается конечно-разностная аппроксимация задачи оптимального управления для квазилинейного уравнения Шредингера с интегральным критерием качества по границе области, когда управление входит линейно в коэффициент уравнения и зависит только от переменной x. В этом параграфе доказаны аналоги теорем и лемм, доказанных в § I этой главы, и установлена оценка скорости сходимости разностных аппроксимаций по функционалу в виде оценки (70).

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность своему научному консультанту доктору физико-математических наук, профессору Искендерову А.Д. за поддержку и полезные консультации.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

I. ИСКЕНДЕРОВ А.Д., ЯГУБОВ Г.Я. Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантовомеханического потенциала // ДАН СССР. - 1988. - т. 303, № 5. - С. I044-I048.

2. ИСКЕНДЕРОВ А.Д., ЯГУБОВ Г.Я. Оптимальное управление нелинейными квантовомеханическими системами // Автоматика и телемехан. - I989. - № I2. - С. 27-38.

3. ИСКЕНДЕРОВ А.Д., ТАГИЕВ Р.К., ЯГУБОВ Г.Я. Задачи оптимального управления для уравнений в частных производных // Приложение в кн. "Методы оптимизации" - Баку: Изд-во БГУ, I994. - С. 355-369.(на азербайджанском языке).

4. ЯГУБОВ Г.Я. Задача оптимального управления для уравнения типа Шредингера // В сб. "Численные методы и математическое обеспечение ЭВМ". - Баку: Изд-во АГУ, I984. - С. II6-I25.

5. ЯГУБОВ Г.Я. Оптимальное управление некоторыми квантовомеханическими системами // В сб. "Вычислительные методы теории

управления". - Баку: Изд-во АГУ, 1989. - С. 67-76.

6. ЯГУБОВ Г.Я. Разностный метод решения задачи оптимального управления коэффициентом квазилинейного уравнения Шредингера // В сб. "Математическое моделирование и автоматизированные системы". - Баку: Изд-во БГУ, 1990. - С. 53-60.

7. ЯГУБОВ Г.Я. Задача оптимального управления для квантовомеханических систем // Тезисы докл. У респуб. научн. конф. ВУЗов Азербайджана. - Баку, 1982.

8. ЯГУБОВ Г.Я. Задача оптимального управления для уравнения Шредингера // Деп. в ВИНИТИ. - 1982. - № 3163-82 деп. - 41 С.

9. ЯГУБОВ Г.Я. Оптимальное управление квантовомеханическими системами с распределенными параметрами // Тезисы докл. УII респуб. научн. конф. ВУЗов Азербайджана. - Баку, 1984.

10. ЯГУБОВ Г.Я. Некоторые вопросы корректности задачи оптимального управления для нестационарного уравнения типа Шредингера // Деп. в АзНИИНТИ. - 1984. - № 238 Аз-84. - 39 С.

11. ЯГУБОВ Г.Я. Задача оптимизации для систем, описываемых уравнением Шредингера // Материалы докл. научн. конф., посвященной итогам научно-исслед. работ за 1984 г. - Баку: Изд-во АГУ, 1986.

12. ЯГУБОВ Г.Я. Оптимальное управление начальным состоянием квантовых обьектов // Тезисы докл. Всесоюзн. научно-технической конф. "Актуальные проблемы моделирования и управления системами с распределенными параметрами". - Киев, 1987.

13. ЯГУБОВ Г.Я. Корректность постановки и разностный метод решения задачи оптимального управления для нелинейного уравнения Шредингера // Тезисы докл. Всесоюзн. научн. конф. "Дифференциальные уравнения и оптимальное управление". - Ашхабад, 1990. - С. 224-225.

I4. ЯГУБОВ Г.Я. Обратная задача для уравнения Шредингера // Тезисы докл. Международной научн. конф. "Некорректно поставленные задачи в естественных науках". - Москва, I99I.

Тип. БДУ. Зак. 112. Тир. 100 16.06.94 г.