ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ІВ. ФРАНКА

На правах рукопису

БОБИК
ІГОР ОМЕЛЯНОВИЧ

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗАГАЛЬНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

01.01.02.– диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

ЛЬВІВ – 1994

Робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь Львівського державного університету ім. Ів. Франка

Науковий керівник – доктор фізико-математичних наук, професор **ПТАШНИК В.Й.**

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор **РОМАНКО В.К.** (Московський фізико-технічний інститут),

доктор фізико-математичних наук **КАЛЕНЮК П.І.** (державний університет "Львівська політехніка").

Провідна організація – Інститут математики Національної АН України, м.Київ.

Захист відбудеться "16" 09. 1994 р. о 15³⁰ год. на засіданні спеціалізованої вченої Ради Д 04.04.01 по присудженню наукового ступеня доктора фізико-математичних наук у Львівському державному університеті ім. Ів.Франка (290602, м.Львів, вул.Університетська, 1).

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці Львівського держуніверситету.

Автореферат розіслано "11" 08. 1994р.

Вчений секретар
спеціалізованої Ради Микитюк Я.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. З точки зору коректної постановки граничних задач найбільш глибоко вивчені диференціальні рівняння з частинними похідними класичних типів та безпосередні їх узагальнення. Для довільних рівнянь з частинними похідними, а також некласичних задач, у цьому напрямку отримані менш вагомі результати. Одним з небагатьох загальних результатів у теорії граничних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними є теорема Хермандера, яка стверджує, що для довільного лінійного диференціального оператора з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами в обмеженій області існує деяка коректна крайова задача. Однак ця теорема існування не дає ніяких вказівок щодо ефективного опису таких умов для наперед заданого оператора. Тому залишається актуальним вивчення конкретних випадків коректної постановки крайових задач для гіперболічних і загальних (безтипних) диференціальних рівнянь.

Граничні задачі для деяких загальних диференціальних і диференціально-операторних рівнянь вивчались в роботах Ю.М. Березанського, В.М. Борок, В.І. Горбачук, М.Л. Горбачука, О.О. Дезіна, А.Х. Мамяна, В.К. Романка, М.Й. Юрчука та ін. Багато досліджень присвячено також вивченню некласичних граничних задач для окремих диференціальних операторів з частинними похідними. Це, зокрема, праці Ж. Адамара, В.І. Арнольда, Ю.М. Березанського, В.П. Бурського, Н.Н. Вахавії, Г.В. Вірабяна, А. Губера, М.Д. Давтяна, В.М. Масленникової, І.В. Мельникової, П.П. Мосолова, С.Г. Овсепяна, С.Л. Соболєва, І.В. Федака, М.В. Фокіна, в яких вивчаються крайові задачі з даними на всій границі області для нееліптичних рівнянь; А.В. Біцадзе, В.М. Борок, І.Л. Віленця, О.О. Дезіна, М.І. Матійчука, А.М. Нахушева, В.К. Романка, О.А. Самарського, М.Й. Юрчука, В.І. Чесаліна, які присвячені вивченню граничних задач з нелокальними умовами для диференціальних рівнянь з частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь.

У більшості зі вказаних робіт виділені регулярні випадки розглядуваних задач. Однак задачі з даними на всій границі області, а також задачі з нелокальними умовами для загальних (в тому числі гіперболічних) диференціальних операторів з частинними похідними є, взагалі, некоректними, а питання про їх розв'язність в багатьох випадках пов'язане з проблемою малих знаменників. Типовим прикладом тут є задача *Діріхле для рівняння коливань* струни, на некоректність якої в 1921 р. вказав Ж. Адамар.

Перші позитивні результати в розв'язанні проблеми малих знаменників на основі "метричного" підходу отримали в 1939 р. Д. Боржин і Р. Даффін при дослідженні задачі *Діріхле для рівняння* коливань струни в прямокутнику, а в 1942 р. – К.Л. Зігель для задачі про стійкість особливої точки типу центр.

Проблема малих знаменників розглядалась також в роботах В.І. Арнольда, Ю.М. Березанського, В.П. Бурського, Н.Н. Вахабі, Р. Денчева, Ф. Джона та ін. при вивченні задачі *Діріхле для гі*перболічних рівнянь другого порядку, в працях В.С. Ільківа, П.П. Мосолова, В.М. Поліщук, Б.Й. Пташника, Б.О. Салиги, В.В. Фіголя, П.І. Штабалюка при дослідженні крайових задач для гіперболічних і загальних рівнянь і систем високого порядку.

Дана дисертація присвячена вивченню задач з даними на всій границі області та нелокальних крайових задач для гіперболічних і безтипних лінійних диференціальних рівнянь (головним чином, з постійними коефіцієнтами). Значне місце в ній займає метричний аналіз оцінок знизу малих знаменників, частина з яких має складну нелінійну конструкцію. Результати дисертації в певній мірі доповнюють і розвивають результати робіт згаданих вище авторів.

Мета роботи. *Дослідження коректності та побудова розв'язків крайових задач для гіперболічних і безтипних лінійних диференціальних рівнянь (задачі з даними на всій границі області,* задачі з нелокальними умовами). Доведення метричних теорем про оцінки знизу малих знаменників, з яких випливає існування класичних розв'язків задач для майже всіх (відносно міри Лебега) коефіцієнтів рівнянь, коефіцієнтів граничних умов і параметрів області.

Методика дослідження. В дисертаційній роботі використовуються методи загальної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, функціонального аналізу, теорії рядів Фур'є і метричної теорії чисел.

Наукова новизна. Встановлені теореми існування і єдиності розв'язків розглядуваних задач в різних функціональних просторах, які формулюються в термінах діофантових властивостей чисел. Доведені метричні теореми про оцінки малих знаменників, з яких випливає виконання достатніх умов існування класичних розв'язків задач для майже всіх (відносно міри Лебега) векторів, складених з коефіцієнтів рівнянь і крайових умов та параметрів областей. Побудовані явні формули для розв'язків розглядуваних задач у вигляді рядів за системами ортогональних функцій.

Теоретична і практична значимість. Результати роботи є певним внеском в теорію граничних задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Побудовані формули для розв'язків задач можуть бути використані для вивчення конкретних задач практики.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на Львівському міському семінарі з теорії диференціальних рівнянь (1992 р., 1994 р.); Міжнародних конференціях "Нелінійні граничні задачі" (м.Донецьк, 1991 р., 1993 р.); на Міжнародній конференції "Актуальні проблеми фундаментальних наук" (м.Москва, 1991 р.); Всеукраїнській конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (м.Дрогобич, 1994 р.); читаннях, присвячених пам'яті академіка Я.С. Підстригача в ІППММ НАН України (м.Львів, 1994 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в роботах [1–8].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, 7 параграфів, об'єднаних у 3 розділи та списку літератури, що включає 97 найменувань. Загальний обсяг роботи 130 сторінок.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Наведемо деякі позначення, що використовуються в дисертації: $\wedge$ – "і"; $\vee$ – "або"; $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$, $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$; $\mathbb{Z}_+^p$ – множина точок $\mathbb{R}^p$ з цілими невід'ємними координатами; $\{y \in Y : P(y)\}$ – підмножина елементів Y, що володіють властивістю $P(y)$; $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$; $k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$; $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$; $\hat{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^{p+1}$; $(k, x) = k_1x_1 + \cdots + k_px_p$; $|k| = |k_1| + \cdots + |k_p|$; $|\hat{s}| = s_0 + |s| = s_0 + s_1 + \cdots + s_p$; Ω^p – p-вимірний тор $\{x \in \mathbb{R}^p : 0 \leqslant x_r \leqslant 2\pi, r = 1, \ldots, p\}$; $D^p = [0; T] \times \Omega^p$; $H_q(\Omega^p)$ $(q \in \mathbb{Z}_+)$ – гільбертовий простір 2π-періодичних за $x_1, \ldots, x_p$ комплекснозначних функцій $v(x) = \sum\limits_{|k| \geqslant 0} v_k \exp\big(i(k, x)\big)$ з нормою $\|v(x)\|^2_{H_q(\Omega^p)} = (2\pi)^p \times \sum\limits_{|k| \geqslant 0} \left[1 + |k|^2\right]^q |v_k|^2$; $H_q^n(D^p)$ $(q \in \mathbb{Z}_+,\ n \in \mathbb{Z}_+)$ – гільбертовий простір функцій $u(t, x)$ таких, що для кожного $t \in [0; T]$ функція $\dfrac{\partial^r u(t, x)}{\partial t^r} \in H_{q-r}(\Omega^p)$ $(r = 0, 1, \ldots, n)$ і неперервна по t в нормі $H_{q-r}(\Omega^p)$; $B_\delta^1(\Omega^p)$ $(\delta > 0)$ – простір 2π-періодичних за $x_1, \ldots, x_p$ комплекснозначних функцій $f(x)$ з нормою $\|v(x)\|_{B_\delta^1(\Omega^p)} = \sum\limits_{|k| \geqslant 0} |f_k| \exp\big(\delta \|k\|\big)$; $C^m\big([0; T], B_\delta^1(\Omega^p)\big)$ – простір функцій $g(t, x)$ таких, що для кожного $t \in [0; T]$ функція $\dfrac{\partial^r g(t, x)}{\partial t^r} \in B_\delta^1(\Omega^p)$ $(r = 0, 1, \ldots, m)$ і неперервна по t в нормі $B_\delta^1(\Omega^p)$; Γ – простір тригонометричних многочленів $P(x) = \sum\limits_{k=-m}^{m} C_k \exp(ikx)$, $x \in [0; 2\pi]$ $(m = 0, 1, \ldots)$ з комплексними коефіцієнтами, Γ' – простір всіх лінійних неперервних функціоналів над Γ, який співпадає з простором формальних тригонометричних рядів, аналогічні позначення зберігаємо і в багатовимірному випадку.

У вступі зроблений короткий огляд літератури по темі дисертації, сформульовані основні результати роботи, а також наведені позначення, функціональні простори та деякі відомості теоретико-числового характеру, що використовуються в дисертації.

Перший розділ присвячений дослідженню крайових задач з даними на всій границі області для гіперболічних і безтипних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Щоб глибше розкрити природу задач, окремо аналізуються випадки однієї і багатьох просторових змінних, виділені класи рівнянь і граничних умов, для яких класична коректність задачі не пов'язана з проблемою малих знаменників. На прикладі рівняння другого порядку показано, як отримані результати переносяться на лінійні оператори, збурені нелінійним інтегро-диференціальним оператором.

В §1 розглядаються рівняння другого порядку. В області D^1 досліджується задача

$$\mathrm{L}[u] \equiv a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0), \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} l_1[u] &\equiv u(0,x) + q_1 u_t(0,x) = \varphi_1(x), \\ l_2[u] &\equiv u(T,x) + q_2 u_t(T,x) = \varphi_2(x), \end{aligned}\right\} \quad (q_1, q_2 \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

$$q_2 - q_1 + T \neq 0. \tag{3}$$

Розв'язок задачі (1)–(3) шукається у вигляді ряду

$$u(t,x) = {\sum_{k=-\infty}^{\infty}}' u_k(t) \exp(ikx).$$

Нехай $\mu_j = p_j + r_j i \quad (p_j, r_j \in \mathbb{R}),\ j = 1,2$ – корені рівняння $a\mu^2 + b\mu + c = 0$. Для єдиності розв'язку задачі (1)–(3) в просторі $H_q^2(D^1)$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови (теорема 1.1)

$$\Delta(k) \equiv \det\left\| u_{jk}((m-1)T) + q_j \frac{du_{jk}((m-1)T)}{dt} \right\|_{m,j=1}^2 \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \tag{4}$$

де $u_{jk}(t) = \exp(ik\mu_j t)$, коли $\mu_1 \neq \mu_2$, та $u_{jk}(t) = t^{j-1}\exp(ik\mu_j t)$, коли $\mu_1 = \mu_2$ $(j = 1,2)$. На основі теореми 1.1 встановлені ефективні умови единості розв'язку задачі (1)–(3) в термінах чисел T, p_j, r_j, q_j $(j = 1,2)$ (теореми 1.2–1.8).

Теорема 1.9. Нехай існують $M > 0$ та $s \in \mathbb{Z}$ такі, що виконуються нерівності

$$|\Delta(k)| > M|k|^{-s}\exp(\beta(k)T) \quad \begin{pmatrix} \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \quad (|k| > K_0); \\ \beta(k) = \max\{-kr_1, -kr_2\}. \end{pmatrix} \tag{5}$$

Нехай $r_1 r_2 \leqslant 0$, а $\varphi_j(x) \in H_{q+s+\alpha_j}(\Omega^1)$ $(j = 1,2)$, де $\alpha_j = 1$, коли $q_{3-j} \neq 0$, та $\alpha_j = 0$, коли $q_{3-j} = 0$. Тоді в просторі $H_q^2(D^1)$ існує розв'язок задачі (1)–(3), який неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$ $(j = 1,2)$.

Теорема 1.10. Нехай виконуються нерівності (5) і нехай $r_1 r_2 > 0$. Якщо $\varphi_j(x) \in B^2_{\delta_1}(\Omega^1)$ $\left(\delta_1 > \delta_2 T,\ \delta_2 = \min\{|r_1|, |r_2|\}\right)$, то існує розв'язок задачі (1)–(3), який неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$ $(j = 1,2)$.

Якщо $(\mu_1 = \mu_2) \vee (r_1 \neq r_2) \vee (r_1 = r_2 \wedge p_1 \neq -p_2 \wedge q_1 \neq q_2 \wedge \wedge |q_1 + q_2| + |r_1| \neq 0)$, то оцінки (5) виконуються для всіх $T > 0$ (теореми 1.11, 1.12). Якщо ж $(p_1 \neq p_2) \wedge (r_1 = r_2) \wedge (p_1 = -p_2 \vee \vee q_1 = q_2 \vee q_1 + q_2 = r_1 = 0)$, то нерівності (5) справджуються для майже всіх (відносно міри Лебега) чисел π/T (теореми 1.13, 1.14).

Отримані при дослідженні задачі (1)–(3) результати переносяться на випадки, коли рівняння (1) є неоднорідне з правою частиною $f(t,x)$, а також, коли оператор L збурений нелінійним інтегро-диференціальним оператором:

$$\mathrm{L}[u] = f(t,x) + \mu \int_0^{2\pi} K(t,x,y) F\big(t,y,\bar{u}(t,y)\big) dy \quad (\mu \in \mathbb{R}), \tag{6}$$

$$l_j[u] = 0 \quad (j = 1,2; \quad q_2 - q_1 + T \neq 0), \tag{7}$$

де L, l_j – оператори задачі (1)–(3); $\bar{u}(t,y) = \left(u, \dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial t \partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$. Якщо при $\mu = 0$ існує єдиний розв'язок задачі (6), (7) (див. теорему 1.15), то збурена задача зводиться до еквівалентного до неї інтегро-диференціального рівняння, розв'язність якого для досить малих $|\mu|$ доводиться за допомогою принципів нерухомої точки Каччіополлі-Банаха і Шаудера (теореми 1.16 і 1.17).

Далі в § 1 розглядається задача типу *Діріхле* для безтипного диференціального оператора з багатьма незалежними змінними

$$\sum_{|s|=2} A_s \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} = 0 \quad (A_s \in \mathbb{C}, \quad A_{2,0,\ldots,0} \neq 0), \tag{8}$$

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \qquad u(T,x) = \varphi_2(x). \tag{9}$$

Встановлені умови єдиності та існування розв'язку задачі (8), (9) в просторах $C^2\big([0;T], B^1_\eta(\Omega^p)\big)$ і $H^2_q(D^p)$ (теореми 1.18–1.20), а також проведено метричний аналіз оцінок знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі (теорема 1.21).

В § 2 в області $D = \{(t,x) : t \in (0,T),\ x \in \mathbb{R}^n\}$ для рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \,\Delta + b^2 \right)^2 u(t,x) = f(t,x), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \tag{10}$$

де a, b – додатні числа, розглядаються дві крайові задачі з умовами

$$u\big|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u\big|_{t=T} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=T} = 0, \tag{11}$$

$$u\big|_{t=0} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{t=0} = u\big|_{t=T} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{t=T} = 0 \tag{12}$$

в класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними. Позначимо $C_B^{(q,r)}(D)$ $(r \geqslant q)$ – банаховий простір функцій $u(t,x)$, q раз неперервно диференційовних по t, а також r раз неперервно диференційовних по x в $\overline{D}$ і майже періодичних в сенсі Бора по $x_1,\ldots,x_n$ рівномірно відносно $t \in [0;T]$, з нормою

$$\|u\|_{C_B^{(q,r)}(D)} = \max_{\substack{|s|\leqslant r\\ s_0\leqslant q}} \sup_{(t,x)\in\overline{D}} \left\{ \frac{\partial^{|s|}u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_n^{s_n}} \right\}.$$

Розв'язок задач (10), (11) і (10), (12) шукається в просторі $C_B^{(4,4)}(D)$ у вигляді ряду $u(t,x) = \sum\limits_{|k|\geqslant 0} u_k(t)\exp(i\mu_k,x)$ в припущенні, що $f(t,x) \in C_B^{(0,m)}(D)$, де m – досить велике натуральне число, $\mu_k = (\mu_{k_1},\ldots,\mu_{k_n}) \in M$ $(k \in \mathbb{Z}^n)$, $M \subset \mathbb{R}^n$ – спектр функції $f(t,x)$. Задачі (10), (11) та (10), (12), які є близькі за постановкою, мають суттєво різну природу. Якщо для першої з них існує єдиний розв'язок для довільних додатніх a, b і T (теореми 2.1, 2.2), то для другої задачі розв'язність має місце не для всіх наборів параметрів a, b і T і є нестійкою щодо цих параметрів.

<u>Теорема 2.3.</u> *Для єдиності розв'язку задачі (10), (12) в класі функцій з $C_B^{(4,4)}(D)$ із заданим спектром M необхідно і достатньо, щоб для всіх $\mu_k \in M$ виконувались умови*

$$2T\sqrt{a^2\|\mu_k\|^2 + b^2} \neq m\pi, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Припустимо, що для всіх векторів $\mu_k \in M$ виконуються нерівності $c_1\|k\|^\sigma \leqslant \|\mu_k\| \leqslant c_2\|k\|^\sigma$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $\sigma > 0$.

<u>Теорема 2.5.</u> *Якщо $f(t,x) \in C_B^{(0,\alpha)}(D)$, де $\alpha > 3 + 2n/\sigma$, то для майже всіх (відносно міри Лебега) значень $T > 0$ і довільних фіксованих $a > 0$ і $b > 0$ задача (10), (12) має єдиний розв'язок в класі функцій із $C_B^{(4,4)}(D)$, який неперервно залежить від $f(t,x)$.*

В § 3 в області D^p досліджується задача

$$L[u] \equiv \sum_{|s|=n} A_s \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} = 0 \quad (A_s \in \mathbb{C}, \quad A_{n,0,\dots,0} \neq 0), \quad (13)$$

$$\left.\frac{\partial^{j_1-1} u}{\partial t^{j_1-1}}\right|_{t=0} = \varphi_{j_1}(x), \quad \left.\frac{\partial^{j_2-1} u}{\partial t^{j_2-1}}\right|_{t=T} = \varphi_{m+j_2}(x) \quad \begin{pmatrix} j_1 = 1,\dots,m, \\ j_2 = 1,\dots,n-m, \\ 1 \leqslant m \leqslant n-1. \end{pmatrix} \quad (14)$$

Як і в § 1, вигляд області D^p накладає умови 2π-періодичності за $x_1,\dots,x_p$ на функції $u(t,x)$ та $\varphi_q(x)$ $(q = 1,\dots,n)$.

Позначимо: $\gamma_q(k) = i\|k\|\lambda_q(k)$, де $\lambda_q(k)$ $(q = 1,\dots,\ell)$ – корені рівняння

$$\sum_{|s|=n} A_s \left(\frac{k_1}{\|k\|}\right)^{s_1} \dots \left(\frac{k_p}{\|k\|}\right)^{s_p} \lambda^{s_0} = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}),$$

кратність яких для спрощення викладок вважається не залежною від k і дорівнює відповідно m_q $(m_1 + \dots + m_\ell = n)$; $\Delta(k) \equiv \equiv \Delta_1(k)\|k\|^\alpha$ $\left(\alpha = \frac{m(m-1)+(n-m)(n-m-1)}{2} - \sum_{j=1}^{\ell} \frac{m_j(m_j-1)}{2}\right)$ – визначник системи лінійних рівнянь

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{q=1}^{\ell} \sum_{r_q=1}^{m_q} C_{q,r_q}(k)(r_q-1)!\, C_{j_1-1}^{r_q-1} \left[\gamma_q(k)\right]^{j_1-r_q} = \\ &\qquad\qquad = \varphi_{j_1,k} \quad (j_1 = 1,\dots,m), \\ &\sum_{q=1}^{\ell} \sum_{r_q=1}^{m_q} \sum_{j=0}^{j_2-1} C_{j_2-1}^{j} A_{r_q-1}^{j} \left[\gamma_q(k)\right]^{j_2-j-1} T^{r_q-j-1} \times \\ &\qquad \times C_{q,r_q}(k) \exp\left[\gamma_q(k) T\right] = \varphi_{m+j_2,k} \quad (j_2 = 1,\dots,n-m), \end{aligned}\right\}$$

де $\varphi_{j,k}$ – коефіцієнти Фур'є функції $\varphi_j(x)$ $(j = 1,\dots,n)$.

<u>Теорема 3.1.</u> *Для єдиності розв'язку задачі* (13), (14) *в просторі* $C^n([0;T], \Gamma')$ *необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$\Delta_1(k) \neq 0 \qquad (k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}). \quad (15)$$

При виконанні умов (15) задача (13), (14) завжди має розв'язок в просторі $C^n([0;T], \Gamma)$ $(C^n([0;T], \Gamma'))$, якщо $\varphi_j(x) \in \Gamma(\Gamma')$ $(j = 1,\ldots,n)$ відповідно (теорема 3.2). Для проміжних просторів розв'язність задачі пов'язана з проблемою малих знаменників. Не обмежуючи загальності будемо вважати, що $\forall k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ $\operatorname{Im}\lambda_j(k) \leqslant \operatorname{Im}\lambda_{j+1}(k)$ $(j = 1,\ldots,\ell-1)$; позначимо $\widetilde{\lambda}_{m_1+\cdots+m_{q-1}+j}(k) = \lambda_q(k)$ $(q = 1,\ldots,\ell;\ j = 1,\ldots,m_q)$.

Теорема 3.3. Нехай існують $M > 0$ і $\varkappa_1 \in \mathbb{Z}$ такі, що виконуються нерівності

$$|\triangle_1(k)| > M\|k\|^{-\varkappa_1}\exp(\|k\|\beta_0(k)T)$$

$$\Big(\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad (|k| > K_1);\ \ \beta_0(k) = -\sum_{j=1}^{n-m}\operatorname{Im}\widetilde{\lambda}_j(k)\Big). \tag{16}$$

Якщо $\varphi_{j_1}(x) \in B^1_{\delta_1}(\Omega^p)$

$$\Big(j_1 = 1,\ldots,m;\ \delta_1 > \beta_1 T,\ \beta_1 = \max\Big\{0,\ \sup_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}}\big(-\operatorname{Im}\widetilde{\lambda}_{n-m+1}(k)\big)\Big\}\Big),$$

$\varphi_{m+j_2}(x) \in B^1_{\delta_2}(\Omega^p)$

$$\Big(j_2 = 1,\ldots,n-m;\ \delta_2 > \beta_2 T,\ \beta_2 = \max\Big\{0,\ \sup_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}}\big(\operatorname{Im}\widetilde{\lambda}_{n-m}(k)\big)\Big\}\Big),$$

то існує розв'язок задачі (13), (14), який належить простору $C^n([0;T], B^1_\delta(\Omega^p))$ $(\delta < \min_{r=1,2}\{\delta_r - \beta_r T\})$ і неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$ $(j = 1,\ldots,n)$.

Для проведення метричного аналізу нерівності (16) доведено наступне твердження.

Лема 3.1. Для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}$) значень $T > 0$ і для довільних фіксованих многочленів $P_j(\xi)$ $(j = 1,\ldots,m)$ над полем $\mathbb{C}$ нерівність

$$\Big|\sum_{j=1}^{m} P_j(i\|k\|T)\exp(i\|k\|\alpha_j T)\Big| \geqslant \|k\|^{n-p(s-1)-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0,\ \alpha_j \in \mathbb{R}),$$

де $n = \max_{j=1,\ldots,m} \left\{ \deg P_j\big(i\|k\|T\big) \right\}$, s – кількість многочленів степеня n, виконується для всіх (крім скінченного числа) значень $k \in \mathbb{Z}^p$.

Показано, що для рівнянь з однією просторовою змінною (теорема 3.7), а також для деяких класів рівнянь (13) з багатьма просторовими змінними (приклад 3.2) нерівності (16) виконуються для майже всіх $T > 0$ і для довільних фіксованих коефіцієнтів $A_{\hat{s}}$ $(|\hat{s}| = n)$.

В загальному випадку при $p > 1$ нерівності (16) виконуються для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{pn}$) векторів $y = (y_1, \ldots, y_{pn})$, $\big(y_{jn+r} = \operatorname{Re} A_{n-r,\underbrace{0,\ldots,0}_{j},r,0,\ldots,0};\ j = 0,\ldots,p-1,$ $r = 1,\ldots,n\big)$ і для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ при $\varkappa_1 > p(\omega+\sigma-1)$, де $\sigma = C_n^m$, $\omega = \dfrac{n-1}{2} + v$, $v = \sum_{\ell=2}^{\tilde{m}} C_{n-1}^{\ell-1} C_{n-\ell}^{\ell}$, $\tilde{m} = \min\{m, n-m\}$ (теорема 3.8). Якщо оператор L – гіперболічний за І.Г. Петровським, то нижня межа показника $\varkappa_1$ може бути уточнена (теорема 3.9). При встановленні цих фактів використана схема доведення леми 3.1.

В другому розділі вивчаються крайові задачі з даними на всій границі області для диференціальних рівнянь з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами.

В § 4 в області $D = [0;T] \times \Omega$, де Ω – область в $\mathbb{R}^p$ з досить гладкою границею $\partial\Omega$, розглядається задача

$$\Lambda u \equiv \sum_{s_0+s_1=n} A_{s_0 s_1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2s_0} \mathrm{L}^{s_1} u(t,x) = f(t,x), \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial^{j_1-1}u}{\partial t^{j_1-1}}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^{j_2-1}u}{\partial t^{j_2-1}}\right|_{t=T} = 0 \quad \begin{pmatrix} j_1 = 1,\ldots,m, \\ j_2 = 1,\ldots,2n-m, \\ 1 \leqslant m \leqslant 2n-1, \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\mathrm{L}^r u\big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (r = 0,\ldots,n-1), \tag{19}$$

де $A_{s_0 s_1} \in \mathbb{C}$ $(s_0+s_1 = n)$, $A_{n0} \neq 0$; $\mathrm{L} \equiv \sum_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - a(x)$ – самоспряжений диференціальний оператор еліптичного типу, причому $a_{ij}(x) \in C^{2q-1}(\overline{\Omega})$, $a(x) \in C^{2q-2}(\overline{\Omega})$ $(q \geqslant n)$ і $a(x) \geqslant 0$ всюди в Ω; $\mathrm{L}^0 u \equiv u$, $\mathrm{L}^j u \equiv \mathrm{L}(\mathrm{L}^{j-1} u)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Відомо, що при зроблених вище припущеннях відносно коефіцієнтів оператора L і області Ω задача

$$\mathrm{L} X + \lambda X = 0, \qquad X\big|_{\partial\Omega} = 0$$

має повну ортонормовану систему власних функцій $\{X_k(x)\}$ $(k \in \mathbb{N})$ в $\mathrm{L}_2(\Omega)$, а всі власні значення λ_k $(k \in \mathbb{N})$ є додатніми числами.

Позначимо через $B_\delta^\varkappa(\Omega)$ простір функцій $v(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k X_k(x)$ з нормою $\|v(x)\|_{B_\delta^\varkappa(\Omega)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |v_k| \exp(\delta \lambda_k^\varkappa)$; $C^m([0;T], B_\delta^\varkappa(\Omega))$ – простір функцій $g(t,x)$ таких, що для кожного $t \in [0;T]$ функція $\dfrac{\partial^r g(t,x)}{\partial t^r} \in B_\delta^\varkappa(\Omega)$ $(r = 0, 1, \ldots, m)$ і неперервна по t в нормі $B_\delta^\varkappa(\Omega)$.

Нехай $\Delta(k)$ – визначник системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{q=1}^{\ell} \sum_{r_q=1}^{m_q} \Big[C_{q,r_q}^{+}(k) + (-1)^{j_1 - r_q} C_{q,r_q}^{-}(k)\Big](r_q - 1)! \times \\
&\qquad \times C_{j_1-1}^{r_q-1} (i\mu_q \sqrt{\lambda_k})^{j_1 - r_q} = 0 \quad (j_1 = 1, \ldots, m), \\
&\sum_{q=1}^{\ell} \sum_{r_q=1}^{m_q} \sum_{j=0}^{j_2-1} \Big[C_{q,r_q}^{+}(k) \exp[i\mu_q \sqrt{\lambda_k}\, T] + (-1)^{j_2-j-1} C_{q,r_q}^{-}(k) \times \\
&\quad \times \exp[-i\mu_q \sqrt{\lambda_k}\, T]\Big] C_{j_2-1}^{j} A_{r_q-1}^{j} (i\mu_q \sqrt{\lambda_k})^{j_2-j-1} T^{r_q-j-1} = 0 \\
&\qquad\qquad (j_2 = 1, \ldots, 2n - m),
\end{aligned}\right\}$$

в якій $\pm\mu_q$ $(q = 1, \ldots, \ell)$ – корені рівняння $\sum\limits_{s_0+s_1=n} A_{s_0 s_1} \mu^{2s_0} = 0$ кратностей m_q відповідно $(m_1 + \cdots + m_\ell = n)$; $\Delta_1(k) \equiv (i\sqrt{\lambda_k})^{-\alpha} \times \Delta(k)$, $\alpha = \dfrac{m(m-1) + (2n-m)(2n-m-1)}{2} - \sum\limits_{j=1}^{\ell} m_j(m_j - 1)$.

Теорема 4.1. *Для єдиності розв'язку задачі (17)–(19) в просторі* $C^{2n}\big([0;T],\, B^{\varkappa}_{\delta}(\Omega)\big)$ **необхідно і достатньо, щоб виконувались умови** $\triangle_1(\lambda_k) \neq 0$ $(k = 1,2,\dots)$.

Позначимо $\delta_1 = \max\limits_{j=1,\dots,\ell}\{|\operatorname{Im}\mu_j|\}T$, $\delta_2 = \sum\limits_{j=1}^{\ell} m_j|\operatorname{Im}\mu_j|T$;

$$G^{m,\ell} = \Big\{g = (g_1,\dots,g_{2\ell}) \in \mathbb{Z}_+^{2\ell} : |g| = 2n - m,\ g_r \leqslant m_r,\ g_{2\ell-r-1} \leqslant m_r$$

$$(r = 1,\dots,\ell)\Big\},\quad \varphi(g) = \sum_{r=1}^{\ell}\big(g_r(m_r - g_r) + g_{2\ell-r-1}(m_r - g_{2\ell-r-1})\big).$$

Теорема 4.2. **Нехай існують константи** $M_1 > 0$ **і** $\nu_1 \in \mathbb{R}$ **такі, що виконуються нерівності**

$$|\triangle_1(\lambda_k)| \geqslant M_1(\sqrt{\lambda_k})^{-\nu_1}\exp(\delta_2\sqrt{\lambda_k}) \quad (\forall k \in \mathbb{N},\ k > k_1), \tag{20}$$

і нехай $a_{ij}(x) \in C^{2n-1}(\Omega)$ $(i,j = 1,\dots,p)$, $a(x) \in C^{2n-2}(\Omega)$, $f(t,x) \in$ $\in C\big([0;T],\, B^{1/2}_{\delta_3}(\Omega)\big)$ $(\delta_3 > \delta_1)$. **Тоді існує розв'язок задачі (17)–(19), який належить простору** $C^{2n}\big([0;T],\, B^{1/2}_{\delta_4}(\Omega)\big)$ $(\delta_4 < \delta_3 - \delta_1)$ **і неперервно залежить від функції** $f(t,x)$.

Теорема 4.3. **Нехай виконуються нерівності (20) і нехай** $\delta_1 = 0$. **Якщо** $a_{ij}(x) \in C^{2\sigma-1}(\Omega)$ $(i,j = 1,\dots,p)$, $a(x) \in C^{2\sigma-2}(\Omega)$, $f(t,x) \in C^{(0,2\sigma)}(D)$ **і задовольняють умови** $\mathrm{L}^s f\big|_{\partial\Omega} = 0$ $(s = 0,\dots,\sigma-1)$, **де** $2\sigma > \max\Big\{n, \max\limits_{g\in G^{m,\ell}}\{\varphi(g) + \max\limits_{r=1,\dots,\ell}(m_r - g_r)\} +$ $+ \max\limits_{r=1,\dots,\ell}\{m_r\} + 2p + \nu_1 - 1\Big\}$, **то існує розв'язок задачі (17)–(19) з простору** $C^{2n}(D)$, **який неперервно залежить від функції** $f(t,x)$.

При дослідженні можливості виконання оцінок (20) показано, що в залежності від $\operatorname{Im}\mu_j$ $(j = 1,\dots,\ell)$ **вони можуть здійснюватися для всіх** $T > 0$ (теорема 4.4) **або для майже всіх (відносно міри Лебега) значень** $T > 0$ (теорема 4.5).

В § 5 в області D^p **розглядається задача з умовами (14) для рівняння**

$$\prod_{r=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{s=1}^{p}\lambda_{sr}(t)\frac{\partial}{\partial x_s} - b_r(t)\right]u(t,x) = 0, \tag{21}$$

де $\lambda_{sr}(t)$ і $b_r(t)$ $(s=1,\ldots,p;\ r=1,\ldots,n)$ – дійсні функції аргумента t, $r-1$ раз неперервно диференційовні в проміжку $0\leqslant t\leqslant T$. Основна увага зосереджена на випадку, коли

$$\lambda_{sr}(t)=\lambda_s(t)+\alpha_{sr},\quad b_r(t)=\beta(t)+\beta_r\quad (\alpha_{sr},\beta_r\in\mathbb{R}). \tag{22}$$

Позначимо: $\Delta_1(k)=\det\left\|U_j\left[f_{r,k}(t)\right]\right\|_{j,r=1}^{n}$, де $f_{r,k}(t)$ $(r=1,\ldots,n)$ – фундаментальна система розв'язків рівняння

$$\prod_{r=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial t}-b_r(t)-i\sum_{s=1}^{p}k_s\lambda_{sr}(t)\right]u_k(t)=0;$$

$$U_{j_1}\equiv\left.\frac{d^{j_1-1}}{dt^{j_1-1}}\right|_{t=0}\ (j_1=1,\ldots,m),\quad U_{m+j_2}\equiv\left.\frac{d^{j_2-1}}{dt^{j_2-1}}\right|_{t=T}\ (j_2=1,\ldots,n-m).$$

Для єдиності розв'язку задачі (21), (14) в просторі $H_n^n(D^p)$ необхідно і достатньо, щоб рівняння

$$\Delta(k)=0 \tag{23}$$

не мало нетривіальних розв'язків в цілих числах $k_1,\ldots,k_p$ (теорема 5.1), а для існування розв'язку з простору $H_q^n(D^p)$ вимагається, щоб ліва частина рівняння (23) погано апроксимувалася нулем (теореми 5.2, 5.3). При цьому доведені метричні твердження про оцінки знизу величини $|\Delta(k)|$ (теореми 5.4, 5.5), з яких випливає класична розв'язність задачі (21), (14), (22) для майже всіх $T>0$ і довільних значень α_{sr} (у випадку, коли всі числа β_r різні) і для майже всіх $T>0$ та для майже всіх векторів, певним чином складених з α_{sr} (у випадку, якщо деякі з чисел β_r співпадають).

Третій розділ присвячений вивченню задач з нелокальними умовами для диференціальних рівнянь з ча ; инними похідними зі сталими коефіцієнтами.

В § 6 в області D^p для рівняння

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+A\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)\equiv\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial t^2}+\sum_{|s|\leqslant 2}A_s\frac{\partial^{|s|}u(t,x)}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}=0, \tag{24}$$

де $A_s \in \mathbb{C}$, $(|s| \leqslant 2)$, розглядається задача з умовами

$$\begin{cases} u\big|_{t=0} - \mu_1 u\big|_{t=T} = \varphi_1(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} - \mu_2 \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=T} = \varphi_2(x) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}; \ \mu_1 \neq 1, \\ \mu_2 \neq 1, \ \mu_1 \neq -\mu_2. \end{pmatrix} \tag{25}$$

Позначимо: $a = \dfrac{\mu_1\mu_2 + 1 + \sqrt{(\mu_1\mu_2+1)^2 - 4(\mu_1+\mu_2)^2}}{2(\mu_1+\mu_2)}$,

$\psi = \operatorname{arctg}(\operatorname{Im} a / \operatorname{Re} a)$; $K_1 = \{k \in \mathbb{Z}^p : A(ik) \neq 0\}$; $\pm\lambda_1(k)$ – корені рівняння $\lambda^2 - A(ik) = 0$ (не обмежуючи загальності будемо вважати, що $\forall k \in K_1 \quad \operatorname{Re}\lambda_1(k) \geqslant 0$).

Теорема 6.2. *Для єдиності розв'язку задачі* (24), (25) *в просторі* $H_2^2(D^p)$ *необхідно і достатньо, щоб* $\forall k \in K_1$ *виконувалась хоча б одна з умов*

$\operatorname{Re}\lambda_1(k)T \neq \ln\big(\max\{|a|, 1/|a|\}\big)$;

$$\operatorname{Im}\lambda_1(k)T \neq \begin{cases} \pm\psi + 2\pi m, & \text{якщо } |a| = 1, \\ \operatorname{sgn}(|a|-1)\psi + 2\pi m, & \text{якщо } |a| \neq 1 \end{cases} \quad (\pm m = 1, 2, \ldots).$$

Якщо виконуються умови єдиності розв'язку розглядуваної задачі, то справедливе твердження.

Теорема 6.3. *Нехай існують константи* $M_r > 0$, $\gamma_r \in \mathbb{R}$ $(r = 1, 2, 3)$ *такі, що виконуються нерівності*

$$\big|\exp(-\lambda_1(k)T) - a\big| \geqslant M_1|k|^{-\gamma_1} \quad (\forall k \in K_1 \ (|k| > n_1)), \tag{26}$$

$$\big|\exp(-\lambda_1(k)T) - 1/a\big| \geqslant M_2|k|^{-\gamma_2} \quad (\forall k \in K_1 \ (|k| > n_2)), \tag{27}$$

$$\big|\lambda_1(k)\big| \geqslant M_3|k|^{-\gamma_3} \quad (\forall k \in K_1 \ (|k| > n_3)), \tag{28}$$

і нехай $\varphi_j(x) \in H_{q+\nu_j}(\Omega^p)$, $\nu_j > \gamma_1 + \gamma_2 + (j-1)\gamma_3$ $(j = 1, 2)$. *Тоді існує розв'язок задачі* (24), (25) *з простору* $H_q^2(D^p)$, *який неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$ $(j = 1, 2)$.

Доведено, що для майже всіх чисел ψ нерівності (26) ((27)) виконуються при $\gamma_1 > p$ $(\gamma_2 > p)$ відповідно (теореми 6.4, 6.5), а оцінки (28) мають місце для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^p$) векторів $b = (b_1, \ldots, b_p)$, $b_j = \operatorname{Im} A_{\underbrace{0,\ldots,0}_{j-1},2,0,\ldots,0}$, при $\gamma_3 > \frac{p}{2} - 1$ (теорема 6.6).

В § 7 досліджується в області D^p задача з нелокальними умовами за змінною t для загального диференціального рівняння з частинними похідними

$$\sum_{|s|\leqslant n} A_s \frac{\partial^{|s|} u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} = 0 \quad (A_s \in \mathbb{C},\ A_{n,0,\ldots,0} \neq 0), \qquad (29)$$

$$\left.\frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=0} - \mu_j \left.\frac{\partial^{j-1} u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=T} = \varphi_j(x), \quad \mu_j \in \mathbb{C} \ (j = 1, \ldots, n). \qquad (30)$$

Показано, що (на відміну від задачі (13), (14)) існування класичного розв'язку розглядуваної задачі для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{pn}$) векторів $y = (y_1, \ldots, y_{pn})$ $(y_{jn+r} = \operatorname{Re} A_{n-r,\underbrace{0,\ldots,0}_{j},r,0,\ldots,0};\ j = 0, \ldots, p-1,\ r = 1, \ldots, n)$ для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^n$) векторів $z = (z_1, \ldots, z_n)$ $(z_j = \operatorname{arctg}(\operatorname{Im}\mu_j / \operatorname{Re}\mu_j))$ і для майже всіх (відносно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ забезпечується вибором функцій $\varphi_j(x)$ з просторів $H_{q_j}(\Omega^p)$ $(j = 1, \ldots, n)$, тобто задача (29), (30) є класично коректною для майже всіх її параметрів.

Основні результати дисертації опубліковані в роботах:

1. Бобик І.О., Пташник Б.Й. Крайові задачі для нестрого гіперболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1990. – Вип. 34. – С. 36–42.
2. Бобик І.О. Крайова задача для гіперболічного рівняння другого порядку // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1991. – Вип. 36. – С. 10–15.
3. Бобик І.О. Крайові задачі для гіперболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами // ДАН України. – 1993. – № 6. – С. 5–9.

4. Бобик I., Пташник В. Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь: Тези доп. Всеукр. конф. (Дрогобич, 25–27 січня 1994. р.) – К.: Ін-т математики АН України, 1994. – С. 15.
5. Бобик I.О., Пташник Б.Й. Крайові задачі для загальних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. – Львів, 1994. – 27 с. – (Препр. АН України. Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача: №2-94).
6. Бобик I.О., Пташник Б.Й. Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // УМЖ. – 1994. – 46, №7. – С. 795–802.
7. Бобик I.О. Нелокальні крайові задачі для загальних диференціальних рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами / Державний університет "Львівська політехніка". – Львів, 1994. – 20 с. Деп. в ДНТВ України 21.06.94, №1212 - Ук94.
8. Пташник Б.И., Бобык И.Е. Краевые задачи для общего дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами // Актуальные проблемы фундаментальных наук: Материалы Международной научно-техн. конф. – М., 1991. – Т. 2 – С. 108–110.

Автор висловлює щиру вдячність науковому керівнику, доктору фіз.-мат. наук, професору Пташнику Б.Й. за керівництво і постійну увагу до роботи.

В О Б И К

ІГОР ОМЕЛЯНОВИЧ

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗАГАЛЬНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

01.01.02.- диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Підписано до друку 18.06.94. Формат 60х84,1/16.
Папір типограф.№ 1. Друк офсет. Умовн.друк.л.0,93.
Умовн.фарб.відб.1,16. Умовно-видав.л.,1.22.
Зам.279. Тираж 100. Безкоштовно.
Машинно-офсетна лабораторія Львівського
держуніверситету, Львів, вул. Університетська,1.

Б О Б И К

ІГОР ОМЕЛЯНОВИЧ

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗАГАЛЬНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

01.01.02 – диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата

фізико-математичних наук

Підписано до друку 10.06.94. Формат 60х84 1/16.
Папір типограф.№ 1. Друк офсет. Умовн.друк.арк.0,93.
Умовн.фарб.відб.1,16. Умовно-видавн.арк.1,22.
Зам.279. Тираж 100. Безкоштовно.

Множинно-офсетна лабораторія Львівського
держуніверситету, Львів, вул. Університетська,1.