Київський університет ім. Тараса Шевченка

На правах рукопису

КЛЮШИН Дмитро Анатолійович

УДК 532.546

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧ ТЕПЛОМАСОПЕРЕНОСУ В ГРУНТІ ПРИ МІКРОЗРОШУВАННІ

05.13.16 — застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання і математичних методів в наукових дослідженнях

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Київ
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
1994

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі обчислювальної математики факультету кібернетики Київського університету ім. Тараса Шевченка.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор ЛЯШКО С. І.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор СКОПЕЦЬКИЙ В. В.,

кандидат фізико-математичних наук, доцент РИЖЕНКО А. І.

Провідна організація: Фізико-механічний інститут НАН України (м. Львів).

Захист відбудеться «29» вересня 1994 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 068.18.10 при Київському університеті ім. Тараса Шевченка за адресою: 252127 Київ 127, проспект Академіка Глушкова, 6.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Київського університету ім. Тараса Шевченка.

Автореферат розіслано «3» серпня 1994 р.

Учений секретар спеціалізованої вченої ради БЕЙКО І. В.

Актуальність теми. Для підвищення ефективності та екологічної безпеки систем мікрозрошування необхідно прогнозувати водносольовий та температурний режими в грунті із урахуванням технологічних та природних факторів, до яких належать зосереджений характер джерел зрошування та значний нагрів поверхні грунту і конструкційних елементів систем мікрозрошування в регіонах з посушливим кліматом, а також складний рельєф зрошуваних ділянок. У зв`язку з цим актуальними стали проблеми дослідження процесів тепломасопереносу в грунті при мікрозрошуванні.

Численні результати в цьому напрямку було отримано в роботах Б.К.Різенкампфа, М.М.Верігіна, І..І.Крамаровської, С..М.Новосельского, Д.Ф.Шульгіна, Д.Ф.Файзуллаєва, J.R.Philip, P.A.C.Raats, E.Bresler, A.W.Warrick та інших. В цих роботах для розв`язання різноманітних задач стаціонарної та нестаціонарної фільтрації води в грунті при зрошуванні з точкових, плоских або лінійних джерел було застосовано як аналітичні, так і чисельні методи, проте до розгляду не приймався вплив температури на вологоперенос.

Таким чином, на цей час виникла потреба в проведенні нових досліджень тепломасопереносу в грунті при мікрозрошуванні на основі комп`ютерного моделювання.

Мета роботи полягає в розробці методики комп`ютерного моделювання тепломасопереносу в грунті при мікрозрошуванні і дослідженні на її основі закономірностей відповідних процесів розподілу вологи, солей і тепла в пористому середовищі. Для цього необхідно розв`язати такі задачі: .

- створити математичні моделі нестаціонарного плоско-вертикального тепломасопереносу при мікрозрошуванні насичено-ненасичених грунтів із урахуванням схилу поверхні на основі диференціальних рівнянь в часткових похідних із узагальненими розв`язками;

- розробити методику комп`ютерної реалізації створених математичних моделей на основі теорії різницевих схем для диференціальних рівнянь із узагальненими розв`язками та сучасних ітераційних методів розв`язування систем сіткових рівнянь;

- обгрунтувати коректність розробленої методики та адекватність математичних моделей досліджуваним процесам;

- розробити програмне забезпечення для комп`ютерного моделювання тепломасопереносу в грунті при мікрозрошуванні;

- на основі обчислювальних експериментів виявити закономірності тепломасопереносу в пористому середовищі при мікрозрошуванні насичено-ненасичених грунтів з горизонтальною або нахиленою поверхнею.

Методика досліджень грунтується на математичному моделюванні нестаціонарного плоско-вертикального волого-, соле- та теплопереносу в грунті за допомогою крайових задач для квазілінійних або слабко нелінійних диференціальних рівнянь в часткових похідних другого порядку змішаного еліптико-параболічного типу із узагальненими розв'язками. При моделюванні тепломасопереносу використано математичну модель Ликова-Philip-de Vries, що базується на законах збереження маси та енергії. Для розв'язування цих задач застосовано математичний апарат теорії різницевих схем для диференціальних рівнянь із узагальненими розв'язками, розроблений О.А.Самарським, Р.Лазаровим та В.Л.Макаровим, а також теореми про коректність нелінійних різницевих схем, що доведені в роботах О.В.Лапіна, А.Д.Ляшка та М.М.Карчевського. Отримані при цьому розріджені системи лінійних алгебраїчних рівнянь стрічкової структури розв'язувались за допомогою високоефективної процедури прискорення по узагальненому методу спряжених градієнтів ORTHOMIN. Дослідження закономірностей неізотермічного масопереносу в грунті при мікрозрошуванні проводились методом обчислювального експерименту на основі створених математичних моделей та алгоритмів.

Наукова новизна отриманих результатів полягає в наступному:

- вперше розглянуто математичну модель неізотермічного масопереносу в насичено-ненасичених грунтах із урахуванням схилу поверхні, а також плоских або лінійних джерел зрошування на межі області в узагальненому формулюванні;
- розроблено нові алгоритми чисельного розв'язку крайових задач тепломасопереносу в грунті при мікрозрошуванні на основі теорії різницевих схем для диференціальних рівнянь із узагальненими розв'язками;
- доведено коректність побудованих різницевих схем, здобуто оцінки швидкості збіжності схем у соболевських просторах;
- методом обчислювального експерименту виявлено закономірності тепломасопереносу в пористому середовищі при мікрозрошуванні насичено-ненасичених грунті з горизонтальною або нахиленою поверхнею.

Практична цінність роботи. Запропонована в дисертації методика дозволила розв'язати важливі для практики проектування систем мікрозрошування задачі плоско-вертикального нестаціонарного волого-, соле-та теплопереносу в насичено-ненасичених грунтах, об'єднані єдиною математичною моделлю в узагальненому формулюванні. Створений на основі розробленої методики комплекс програм використовується в Інституті гідротехніки та меліорації Української академії аграрних наук.

Вірогідність результатів обумовлена використанням фундаментальних положень механіки суцільного середовища, теоретичними оцінками збіжності і точності розроблених обчислювальних алгоритмів, тестовими розрахунками і порівнянням із результатами експериментальних і польових вимірювань, а також із чисельними розв'язками, отриманими за допомогою інших методів.

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідалися: на I-III наукових конференціях молодих учених Київського університету ім. Тараса Шевченка (м.Київ, 1985-89 рр.); на Всесоюзній нараді-семінарі молодих учених "Сучасні проблеми механіки рідини та газу" (м.Грозний, 1986 р.); на 3-й Всесоюзній науково-технічній конференції "Використання обчислювальної техніки для розв'язування проблеми охорони навколишнього середовища в теплоенергетиці" (м.Севастополь, 1986 р.); в Школі молодих учених за чисельними методами механіки суцільних середовищ (с.Шушенське, 1987 р.); на 3-му Всесоюзному семінарі "Сучасні проблеми теорії фільтрації" (м.Москва, 1987 р.); на Республіканській науково-технічній конференції "Досягнення науково-технічного прогресу - в проекти меліоративного будівництва" (м.Київ, 1988 р.); на Республіканському науково-технічному семінарі "Крайові задачі фільтрації грунтових вод" (м.Казань, 1988 р.); на науковому семінарі відділу фільтрації НДІ математики та механіки ім. Н.Г.Чеботарьова при Казанському університеті (м.Казань, 1989 р.); на 7-й Чехословацькій конференції по диференціальних рівняннях та їх застосуваннях EQUADIFF-7 (м.Прага, Чехословаччина, 1989 р.); на 5-й конференції по чисельних методах (м.Мішкольц, Угорщина, 1990 р.); на Українській науковій конференції "Моделювання та дослідження стійкості систем" (м.Київ, 1991 р.); на Українській науковій конференції "Моделювання та дослідження стійкості процесів" (м.Київ, 1992 р.); на Другому республіканському науково-технічному семінарі "Машинні методи розв'язання задач теорії фільтрації" (м.Казань, 1992 р.); на Республіканському науковому семінарі "Обчислювальна та прикладна математика" наукової ради Національної академії наук з проблеми "Кібернетика" на кафедрі обчислювальної математики Київського університету ім. Тараса Шевченка (м.Київ, 1994 р.); на науковому семінарі кафедри моделювання складних систем Київського університету ім. Тараса Шевченка (м.Київ, 1994 р.).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 10 наукових робіт.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається із вступу, трьох глав, висновку та списку використаної літератури. Дисертація містить 158 сторінок, 69 рисунків і 15 таблиць.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету роботи, показано наукову новизну, практичну та теоретичну цінність отриманих результатів, стисло викладено зміст дисертації.

Перша глава присвячена математичним моделям неізотермічного масопереносу в насичено-ненасичених пористих середовищах при наявності на межі області плоских або лінійних джерел зрошування.

В розділі 1.1 розглянуто сучасний стан досліджень в галузі математичного моделювання тепломасопереносу в грунті при наявності джерел зрошування. На основі аналізу наукової літератури з цього питання показано, що досліджувані в дисертації проблеми тепломасопереносу в грунті при мікрозр шуванні розглянуто вперше.

В розділі 1.2 формулюються класичні та узагальнені математичні моделі тепломасопереносу в грунті в декартових та циліндричних координатах із урахуванням лінійних або плоских джерел зрошування на межі області.

Наведено умови, за яких нестаціонарні процеси волого-, соле- та теплопереносу в насичено-ненасичених грунтах при наявності плоских або лінійних джерел на межі прямокутника $\overline{\Omega} = \{0 \le x_\alpha \le l_\alpha,\ \alpha = 1,2\}$ на інтервалі часу $(0, t_{max}]$ описуються законами Дарсі, Фіка і Фур`є відповідно:

$$V = -K(U,T)gradU - D_C(\Theta)gradC - D_{TU}(\Theta)gradT, \tag{1}$$

$$S = -D_K(\Theta,V)gradC - D_{TC}(\Theta)gradT + VC, \tag{2}$$

$$Q = -(\lambda(\Theta) + L\varepsilon\rho_W D_{TU}(\Theta))gradT - L\varepsilon\rho_W V. \tag{3}$$

Сформульовано математичну модель нестаціонарного профільного або осесиметричного плоско-вертикального тепломасопереносу, що описується системою диференціальних рівнянь нерозривності, балансу маси розчиненої речовини і тепла відповідно:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = -divV + f_W,\ \ (x,t) \in \Omega_T, \tag{4}$$

$$\frac{\partial(\Theta C)}{\partial t} = -divS + f_S,\ \ (x,t) \in \Omega_T, \tag{5}$$

$$C_T\frac{\partial T}{\partial t} = -divQ + f_T,\ \ (x,t) \in \Omega_T \tag{6}$$

із крайовими умовами

$$U\big|_{\Gamma_1^{(1)}} = \tilde{U}(x,t),\;\; V\big|_{\Gamma_2^{(1)}} = Q_W(x,t) + E_W(x,t,U), \tag{7}$$

$$C\big|_{\Gamma_1^{(2)}} = \tilde{C}(x,t),\;\; S\big|_{\Gamma_2^{(2)}} = Q_S(x,t) + E_S(x,t,C), \tag{8}$$

$$T\big|_{\Gamma_1^{(3)}} = \tilde{T}(x,t),\;\; Q\big|_{\Gamma_2^{(3)}} = Q_H(x,t) + E_H(x,t,T) \tag{9}$$

і початковими умовами

$$U(x,0) = U_0(x),\; C(x,0) = C_0(x),\; T(x,0) = T_0(x). \tag{10}$$

Тут використані такі позначення:

$$Q_W(x,t) = \begin{cases} Q_W^{(i)} & x \in X_i^{(1)}(t) \\ 0, & x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{N_W} X_i^{(1)}(t) \end{cases},\quad Q_S(x,t) = \begin{cases} Q_S^{(i)}, & x \in X_i^{(2)}(t) \\ 0, & x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{N_S} X_i^{(2)}(t) \end{cases},\quad Q_H(x,t) = \begin{cases} Q_H^{(i)}, & x \in X_i^{(3)}(t) \\ 0, & x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{N_H} X_i^{(3)}(t) \end{cases},$$

$\overline{\Omega}_T = \overline{\Omega} \times (0, t_{max}]$, $\overline{\Omega} = \{x = (x_1, x_2):\ 0 \le x_\alpha \le l_\alpha,\ \alpha = 1,2\}$, $\Gamma = \overline{\Omega} \setminus \Omega = \Gamma_1^{(i)} \cup \Gamma_2^{(i)}$, $i = 1,2,3$; $\Gamma_1^{(l)}$, $l = 1,2,3$ - частина межі, на якій задано крайові умови першого роду; $\Gamma_2^{(l)}$, $l = 1,2,3$ - частина межі, на якій задано крайові умови другого або третього роду; V - вектор швидкості вологопереносу; S - вектор питомого потоку розчиненої речовини; Q - вектор питомого потоку тепла; $Q_W^{(l)}$, $l = \overline{1, N_W}$ - інтенсивність l-го джерела води; $Q_S^{(l)}$, $l = \overline{1, N_S}$ - інтенсивність l-го джерела розчиненої речовини; $Q_H^{(l)}$, $l = \overline{1, N_H}$ - інтенсивність l-го джерела тепла; $E_W(x,t)$ - питомий потік води через межу області (за умов відсутності джерела); $E_S(x,t)$ - питомий потік розчиненої речовини через межу області (за умов відсутності джерела); $E_H(x,t)$-питомий потік тепла через межу області (за умов відсутності джерела); $X_l^{(\alpha)}(t)$, $\alpha = 1,2,3$ - відрізок межі, на якому задано l-те джерело; $f_W(x,t)$, $f_S(x,t)$, $f_H(x,t)$ - функції джерел (стоків) води, розчиненої речовини і тепла відповідно; $\Theta(x,t)$ - об'ємна вологість; $U(x,t) = P(x,t) - x_2$ - п'єзометричний напір; $P(x,t)$ - висота тиску; $C(x,t)$ - концентрація розчину; $T(x,t)$-температура розчину; $K(U,T)$- тензор коефіцієнтів вологопроводності грунту; $D_C(\Theta)$ - тензор коефіцієнтів концентраційної дифузії води; $D_{TU}(\Theta)$ - тензор коефіцієнтів термодифузії води; $D_K(\Theta,V)$ - тензор коефіцієнтів конвективної дифузії розчиненої речовини; $D_{TC}(\Theta)$ - тензор коефіцієнтів термодифузії розчиненої речовини; $\lambda(\Theta)$ - тензор коефіцієнтів теплопроводності грунту; L - питома внутрішня теплота випарювання; ε - коефіцієнт фазових перетворювань;

$C_T = C_W\rho_W\Theta + C_S\rho_S(1-\Theta)$ - об'ємна теплоємність грунту; C_W - питома теплоємність води; C_S - питома теплоємність скелету грунту; ρ_W - густина розчину; ρ_S - щільність скелету грунту; $x=(x_1,x_2)$, x_1 - горизонтальна (в осесиметричному випадку радіальна) координата, x_2 - вертикальна координата; t -час.

В розділі 1.2 сформульовано моделі тепломасопереносу, що враховують розривний характер функцій джерел (стоків), і дано визначення узагальнених розв'язків відповідних задач в декартових та циліндричних координатах.

В главі II побудовано методику чисельного розв'язку задачі (4)-(10). Оскільки розвязування системи рівнянь (4)-(10) потребує занадто великих комп'ютерних ресурсів, вона розподіляється на послідовність окремих задач волого-, соле- та теплопереносу, кожна з яких є квазілінійною або слабко нелінійною крайовою задачею.

В розділі 2.1 досліджено різницеву схему для задачі загального вигляду

$$C(U)\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(K_{\alpha\beta}(x,t,U)\frac{\partial U}{\partial x_\beta}\right) + K_0\left(x,t,U,\frac{\partial U}{\partial x_1},\frac{\partial U}{\partial x_2}\right) + f(x,t),\ (x,t)\in\Omega_T\ , \quad (11)$$

$$-\sum_{\beta=1}^{2}\left(K_{\alpha\beta}(x,t,U)\frac{\partial U}{\partial x_\beta}\right) + \lambda_{-\alpha}(x_\beta,t,U) = g_{-\alpha}(x_\beta,t),\quad x_\alpha = 0, \quad (12)$$

$$\sum_{\beta=1}^{2}\left(K_{\alpha\beta}(x,t,U)\frac{\partial U}{\partial x_\beta}\right) + \lambda_{+\alpha}(x_\beta,t,U) = g_{+\alpha}(x_\beta,t),\quad x_\alpha = l_\alpha,\ \alpha=1,2;\ \beta=3-\alpha, \quad (13)$$

$$U(x,0) = U_0(x),\ x\in\overline{\Omega}. \quad (14)$$

На функції, що входять до рівнянь (11)-(14), накладено обмеження:

I. $f(x,t)\in L_2(\Omega),\ g_{\pm\alpha}(x_\beta,t)\in L_2(\partial\Omega)\ \forall t\in(0,t_{max}],\ \alpha=1,2;\ \beta=3-\alpha;$

II. $\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}K_{\alpha\beta}(x,t,p_0)\xi_\alpha\xi_\beta \ge \mu_0\sum_{\alpha=1}^{2}\xi_\alpha^2,\ \mu_0>0;$

III. $\left|K_{\alpha\beta}(x,t,p_0)\right| \le \mu_1;\ \alpha,\beta=1,2;\ \mu_1>0;\ 0<M_1\le C(U)\le M_2<\infty;$

IV. $\left|K_{\alpha\beta}(x,t,p_0) - K_{\alpha\beta}(x,t,q_0)\right| \le \mu_2\left|p_0-q_0\right|,\ \alpha,\beta=1,2;$

$\left|\lambda_{\pm\alpha}(x,t,p_0) - \lambda_{\pm\alpha}(x,t,q_0)\right| \le \mu_4\left|p_0-q_0\right|,\ \alpha=1,2;$

V. $\left|K_0(x,t,p_0,p_1,p_2) - K_0(x,t,q_0,q_1,q_2)\right| \le \mu_3\sqrt{\sum_{\alpha+\beta\le 2}(p_\alpha-q_\beta)^2},\ \alpha,\beta=0,1,2;$

$$\left(K_0(x,t,p_0,p_1,p_2) - K_0(x,t,q_0,q_1,q_2)\right)(p_0-q_0) + \sum_{\alpha+\beta=2}(p_\alpha-q_\beta)^2 \ge$$

$$\ge \mu_5\sqrt{\sum_{\alpha+\beta\le 2}(p_\alpha-q_\beta)^2},\ \alpha,\beta=0,1,2;\ \mu_5>0;$$

VI. $\varphi(t) = U(x,t) \in C_2(0,t_{max}]$ $\forall x \in \overline{\Omega}$,

$$\frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x_\alpha^2} \in L_2(\Omega),\ \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial} \in L_2(\Omega)\ \forall t \in (0,t_{max}],\ \alpha = 1,2.$$

Узагальненим розв'язком задачі (11)-(14) назвемо функцію $U(x,t) \in W_2^2(\Omega)$ при фіксованому $t \in (0,t_{max}]$; що за будь-яких $\eta \in L_2(\Omega)$ і $t \in (0,t_{max}]$ задовольняє інтегральну тотожність

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(K_{\alpha\beta}(x,t,U)\frac{\partial U}{\partial x_\beta}\right) + f(x,t)\right)\eta\right\}dx_1dx_2 + \sum_{\alpha=1}^{2}\int_0^{l_\beta}\left\{\lambda_{-\alpha}(x_\beta,t,U)\eta\big|_{x_\alpha=0} + \right.$$

$$\left. +\lambda_{+\alpha}(x_\beta,t,U)\eta\big|_{x_\alpha=l_\alpha} - g_{-\alpha}(x_\beta,t)\eta\big|_{x_\alpha=0} - g_{+\alpha}(x_\beta,t)\eta\big|_{x_\alpha=l_\alpha}\right\}dx_\beta - \int_0^{l_1}\int_0^{l_2} C(U)\frac{\partial U}{\partial t}\eta\, dx_1dx_2 = 0 \quad (15)$$

і початкову умову (14).

На різницевій сітці $\overline{\omega} = \left\{(x_1,x_2) \in \overline{\Omega}\colon x_\alpha = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = \overline{0,N_\alpha},\ h_\alpha = \dfrac{l_\alpha}{N_\alpha},\ \alpha = 1,2\right\}$ інтегральне співвідношення (15) за допомогою усереднюючих операторів Стєклова апроксимується різницевою схемою, яку можна записати у вигляді операторного рівняння в гільбертовому просторі $H_{h\tau}$ сіткових функцій y аналогічно схемам О.В.Лапіна, А.Д.Ляшка і М.М.Карчевського:

$$(E + \sigma\tau R)y_t + \Lambda(y)y = F(y),\ y(0) = y_0\ , \quad (16)$$

де R -регуляризуючий оператор, σ -параметр регуляризації, τ - крок за часом.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* I-VI. *Тоді при* $\sigma \geq 0.5\mu_1^2\mu_0^{-1}$ *схема (16) коректна на множині функцій* $D = \left\{U \in H_{h\tau}\colon \max_{x\in\omega^+}\left|U_{\bar{x}_\alpha}\right| < M,\ \alpha = 1,2\right\}$, *де* $\omega^+ = \left\{(x_1,x_2) \in \overline{\Omega}\colon x_\alpha = i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha = \overline{1,N_\alpha},\ h_\alpha = \dfrac{l_\alpha}{N_\alpha},\ \alpha = 1,2\right\}$.

Висновок. *За умов теореми 1 схема (16) коректна для будь-якого* $U(x,t) \in W_2^2(\Omega)$ *при фіксованому* $t \in (0,t_{max}]$

Із нерівності коректності схеми (16) випливає, що

$$\|z(t)\|_B \leq N \max_{0<t'\leq t}\|\Psi(t')\|_{R^{-1}}\ ,$$

де $z(t)$ - розв'язок задачі $Bz_t + \Lambda y - \Lambda U = \Psi(t')$, а $\Psi(t')$ - похибка апроксимації різницевої схеми (16), що визначається за формулою $\Psi(t') = F(U) - \Lambda U - BU_t$.

Теорема 2. *Якщо* $U(x,t) \in W_2^2(\Omega)$ *при фіксованому* $t \in (0,t_{max}]$ *і виконуються умови* I-VI, *то різницева схема (16) збігається в сітковій нормі* $W_2^1(\overline{\omega})$ *(на часовому шарі) зі швидкістю* $O\left(\sqrt{|h|} + \tau\right)$, *де* $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, *тобто має місце оцінка* $\|z\|_{W_2^1(\omega)} \leq M\left(\sqrt{|h|} + \tau\right)\|U\|_{W_2^2(\Omega)}$.

В розділі 2.2 розглянуто осесиметричну задачу

$$C(U)\frac{\partial U}{\partial t}=\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{1}{x_1^{2-\alpha}}\left(x_1^{2-\alpha}K_\alpha(x,t,U)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right)+\frac{1}{x_1}K_0\left(x,t,U,\frac{\partial U}{\partial x_1},\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)+f(x,t),\ (x,t)\in\Omega_T\ , \quad (17)$$

$$-K_2(x,t,U)\frac{\partial U}{\partial x_2}+\lambda_{-2}(x_1,t,U)=g_{-2}(x_1,t),\quad x_2=0\ , \quad (18)$$

$$K_\alpha(x,t,U)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}+\lambda_{+\alpha}(x_\beta,t,U)=g_{+\alpha}(x_\beta,t),\quad x_\alpha=l_\alpha,\ \alpha=1,2;\ \beta=3-\alpha, \quad (19)$$

$$\lim_{x_1\to+0}x_1K_1(x,t,U)\frac{\partial U}{\partial x_1}=0\ , \quad (20)$$

$$U(x,0)=U_0(x),\ x\in\overline{\Omega}. \quad (21)$$

Узагальненим розв'язком задачі (17)-(21) назвемо функцію $U(x,t)\in W^2_{2,r}(\Omega)$ при фіксованому $t\in(0,t_{max}]$, що за будь-яких $\eta\in W^2_{2,r,0}(\Omega)$ і $t\in(0,t_{max}]$ задовольняє інтегральну тотожність

$$\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{x_1\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(K_\alpha(x,t,U)\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\right)+f(x,t)\right)G(\eta)\right\}dx_1dx_2+\int_0^{l_1}\left\{\lambda_{-2}(x_1,t,U)G(\eta)\big|_{x_2=0}+\right.$$
$$+\lambda_{+2}(x_1,t,U)G(\eta)\big|_{x_2=l_2}-g_{-2}(x_1,t)G(\eta)\big|_{x_2=0}-\left.g_{+2}(x_1,t)G(\eta)\big|_{x_2=l_2}\right\}dx_1+$$
$$+\int_0^{l_2}\left\{\lambda_{+1}(x_2,t,U)G(\eta)\big|_{x_1=l_1}-g_{+1}(x_2,t)G(\eta)\big|_{x_1=l_1}\right\}dx_2-\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}x_1C(U)\frac{\partial U}{\partial t}G(\eta)dx_1dx_2 \quad (22)$$

додаткову умову (20) і початкову умову (21).

Тут G - диференціальний оператор, що визначається правою частиною рівняння (17). Крім того, припускаємо також, що

I'. $f(x,t)\in L_{2,r}(\Omega),\ g_{\pm\alpha}(x_\beta,t)\in L_2(\partial\Omega)\ \forall t\in(0,t_{max}]$;

II'. $K_\alpha(x,t,p_0)\geq\mu_0>0,\ \alpha=1,2$;

III'. $\left|K_\alpha(x,t,p_0)\right|\leq\mu_1;\ \alpha=1,2;\ \mu_1>0;\ 0<M_1\leq C(U)\leq M_2<\infty$;
$\left|\lambda_{\pm\alpha}(x,t,p_0)-\lambda_{\pm\alpha}(x,t,q_0)\right|\leq\mu_4\left|p_0-q_0\right|,\ \alpha=1,2$;

IV'. $\left|K_\alpha(x,t,p_0)-K_\alpha(x,t,q_0)\right|\leq\mu_2\left|p_0-q_0\right|,\ \alpha=1,2$;

V'. $\left|K_0(x,t,p_0,p_1,p_2)-K_0(x,t,q_0,q_1,q_2)\right|\leq\mu_3\sqrt{\sum_{\alpha+\beta\leq2}\left(p_\alpha-q_\beta\right)^2},\ \alpha,\beta=1,2$;

$\left(K_0(x,t,p_0,p_1,p_2)-K_0(x,t,q_0,q_1,q_2)\right)(p_0-q_0)+\sum_{\alpha+\beta=2}\left(p_\alpha-q_\beta\right)^2\geq$

$\geq\mu_5\sqrt{\sum_{\alpha+\beta\leq2}\left(p_\alpha-q_\beta\right)^2},\quad \alpha,\beta=1,2;\ \mu_5>0$;

VI'. $\varphi(t)=U(x,t)\in C_2(0,t_{max}]\ \forall x\in\overline{\Omega}$,
$\frac{\partial^3U}{\partial t\partial x_\alpha^2}\in L_{2,r}(\Omega),\ \frac{\partial^2U}{\partial t\partial x_\alpha}\in L_{2,r}(\Omega)\ \forall t\in(0,t_{max}],\ \alpha=1,2$;

де $L_{2,r}(\Omega)$- дійсний гільбертів простір із скалярним добутком $(U,V)=\int\limits_{\Omega} x_1 UV d\Omega$, $W^2_{2,r,\theta}(\Omega)$ - простір функцій, що породжується замиканням за нормою

$$\|U\|_{W_{2,r}(\Omega)}=\|U\|_{2,r,\Omega}=\left(\int\limits_{\Omega} x_1\left(\sum_{|\alpha|=2}\left|D^{\alpha}U\right|^2+\frac{1}{x_1^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2\right)d\Omega\right)^{1/2}$$ функцій $U\in C_2^1(\Omega)\cap C_1^1(\overline{\Omega})$,

що задовольняють крайові умови $U(x,t)=0,\ x\in\Gamma;\ \dfrac{\partial U}{\partial x_1}=0,\ x_1=0\ \ \forall t\in(0,t_{max}]$.

Різницева схема, що апроксимує задачу (17)-(21), будується аналогічно (16), за винятком апроксимації умови обмеженості розв`язку (20), для чого сітка зрушується на півкроку у напрямку осі x_1.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови* I'-VI', *то при* $\sigma\ge 0.5\mu_1^2\mu_0^{-1}$ *різницева схема, що апроксимує задачу (17)-(21), коректна на множині функцій* $D=\left\{U\in H_{hr}:,\max\limits_{x\in\omega^+}\left|U_{\bar{x}_\alpha}\right|<M,\ \alpha=1,2\right\}$.

Висновок. *За умов теореми 3 схема, що апроксимує задачу (17)-(21), коректна для будь-якого* $U(x,t)\in W_{2,r}^2(\Omega)$ *при фіксованому* $t\in(0,t_{max}]$.

Теорема 4. . *Якщо* $U(x,t)\in W_{2,r}^2(\Omega)$ *при фіксованому* $t\in(0,t_{max}]$ *і виконуються умови* I'-VI', *то різницева схема , що апроксимує задачу (17)-(21), збігається в сітковій нормі* $W_{2,r}^1(\omega)$ *(на часовому шарі) зі швидкістю* $O\left(\sqrt{|h|}+\tau\right)$, *де* $|h|=\sqrt{h_1^2+h_2^2}$.

Розділ 2.3 містить опис ітераційного методу розв`язку нелінійних різницевих схем для задач тепломасопереносу. Доведена теорема про збіжність методу простої ітерації по нелінійності для побудованих різницевих схем. Наведено результати обчислювальних експериментів, що свідчать про перевагу ітераційної процедури прискорення ORTHOMIN для розв`язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь на кожній ітерації по нелінійності над змінно-трикутним методом.

Глава III присвячена чисельному моделюванню ізотермічного та неізотермічного масопереносу в грунті при мікрозрошуванні і аналізу його закономірностей.

В розділі 3.1 отримано розв`язки модельних задач нестаціонарного ізотермічного плоско-вертикального профільного вологопереносу в грунті із горизонтальною поверхнею в декартовій і циліндричній системах координат при крапельному зрошуванні. Розглянуто випадок зрошування за допомогою ізольованої крапельниці (осесиметричний вологоперенос), а також випадок, коли близько розташовані крапельниці створюють лінійне джерело (профільний вологоперенос). Здійснено порівняння отриманих розв`язків із результатами лабораторних та польових вимірювань, а також із розв`язками, одержаними за допомогою чисельних методів в роботах E.Bresler і соавторів стосовно до піску та суглинку. Доведено, що отримані чисельні розв`язки добре узгоджуються як з експериментальними даними, так і з відповідними чисельними розв`язками, що свідчить про адекватність сформульованих математичних моделей вологопереносу досліджуваним процесам, а також про надійність розробленої чисельної методики.

Аналогічні дослідження проведено стосовно до задачі осесиметричного солепереносу в піску та суглинку при крапельному зрошуванні засоленого грунту. Проведено аналіз розподілу концентрації розчиненої речовини в грунті в залежності від інтенсивності зрошування і гідрофізичних властивостей грунту. Порівняння отриманих розв`язків із чисельними розв`язками E.Bresler та даними експериментальних вимірювань показало добре узгодження між ними. Це свідчить про коректність запропонованої моделі солепереносу в грунті і надійність розробленої чисельної методики розв`язку відповідних крайових задач.

В розділі 3.2 розв`язано задачі нестаціонарного плоско-вертикального профільного та осесиметричного вологопереносу в грунті із врахуванням впливу температурного градієнту та схилу поверхні при мікрозрошуванні різних типів грунту, а саме: піску, супіску та легкого суглинку. При моделюванні тепломасопереносу в грунті було застосовано математичну модельЛикова-Philip-de Vries, що базується на законах збереження маси і енергії і враховує взаємний вплив волого- і теплопереносу. Виявлено закономірності формування контуру зволоження за умов ізотермічного та неізотермічного режимів зрошування. Розглянуто випадки застосування крапельниць низької, середньої та високої інтенсивності. Доведено, що вплив температурного градієнту суттєво сприяє просуванню ізолінії мінімального зволоження на глибину, і його врахування в задачах вологопереносу в грунті при мікрозрошуванні має практичне значення для всіх розглянутих типів грунту. При цьому вплив температурного градієнту збільшується відповідно до зростання теплопровідності грунту, а також температури нагріву джерела і поверхні.

Розв`язано задачу ізотермічного профільного вологопереносу при крапельному зрошуванні грунту, що має схил поверхні. Проаналізовано закономірності формування контуру зволоження залежно від куту схилу поверхні та інтенсивності джерела зрошування. В результаті обчислювальних експериментів доведено, що вплив куту схилу поверхні на розподіл вологості в грунті, що має гравітаційну природу, стає помітним лише через значний проміжок часу (в залежності від інтенсивності водовипусків і, відповідно, від маси зрошувальної води в грунті). При цьому відстань між джерелом і точкою виходу ізолінії мінімальної зволоженості на поверхню нижче по схилу і глибина промочування істотно залежать від куту схилу поверхні, а відстань від джерела до точки виходу цієї ізолінії на поверхню вище по схилу більше залежить від інтенсивності джерела, аніж від куту схилу поверхні. Проведені обчислювальні експерименти показали, що при зростанні схилу поверхні глибина промочування грунту зменшується, а відстань промочування вниз по схилу зростає. Це призводить до витягування контуру зволоження вздовж поверхні грунту в напрямку схилу і, відповідно, до нераціональних витрат зрошувальної води. Таким чином, урахування впливу куту схилу поверхні на розподіл води в грунті дає можливість розробляти більш ефективні системи мікрозрошування на передгір`ї.

ОСНОВНІ ВИСНОВКИ РОБОТИ

1. Сформульовано нові моделі тепломасопереносу в грунті при мікрозрошуванні на основі диференціальних рівнянь в часткових похідних із узагальненими розв`язками, що враховують вплив температурного градієнту на перерозподіл вологості в грунті, а також інші природні та технологічні особливості мікрозрошування.

2. Побудовано методику комп`ютерного моделювання нестаціонарного плоско-вертикального профільного або осесиметричного масопереносу при мікрозрошуванні в насичено-ненасичених грунтах на основі сформульованих моделей і теорії різницевих схем для диференціальних рівнянь із узагальненими розь`язками.

3. Побудовано і досліджено різницеві схеми, які апроксимують крайові задачі для еліптико-параболічних диференціальних рівнянь із змішаними похідними і узагальненими розв`язками, що описують плоско-вертикальний профільний або осесиметричний тепломасоперенос в насичено-ненасичених грунтах із горизонтальною або нахиленою поверхнею.

4. На основі обчислювальних експериментів доведено високу ефективність розробленої чисельної методики для розв`язку задач тепломасопереносу в насичено-ненасичених грунтах при наявності плоских або лінійних джерел на межі області фільтрації.

5. Розроблено програмне забезпечення для чисельного моделювання тепломасопереносу в насичено-ненасичених грунтах при мікрозрошуванні, що грунтується на запропонованій чисельній методиці.

6. Отримані за допомогою запропонованої методики розв'язки добре узгоджуються з даними лабораторних та польових досліджень, а також з результатами, що одержані за допомогою інших чисельних методів. Це свідчить про адекватність сформульованих математичних моделей досліджуваним фізичним процесам, а також про коректність і надійність розроблених обчислювальних алгоритмів.

7. Проаналізовано закономірності формування контуру зволоження в грунті за неізотермічних умов. Доведено, що вплив температурного градієнту суттєво сприяє просуванню ізолінії мінімального зволоження на глибину, і його урахування в задачах вологопереносу в грунті при мікрозрошуванні має практичне значення для всіх розглянутих типів грунту.

8. Показано, що при наявності схилу поверхні грунту глибина промочування грунту зменшується, а відстань промочування вниз по схилу зростає пропорційно куту схилу поверхні. Це призводить до витягування контуру зволоження вздовж поверхні грунту в напрямку схилу.

Основні положення дисертації викладені у таких роботах:

1. Клюшин Д.А. Численное решение задачи капельного орошения // Всесоюз. совещание - семинар молодых ученых "Современные проблемы механики жидкости и газа" (г.Грозный, 1986 г.): Тез.докл.- Грозный, 1986. - С.1[illegible]3.
2. Клюшин Д.А. Численное моделирование процессов тепломассопереноса при капельно-инъекционном орошении //Всесоюз. конф. "Использование вычислительной техники для решения проблемы охраны окружающей среды в теплоэнергетике" (г.Севастополь, 1986 г.): Тез. докл. - Киев, 1986. - Ч.3 - С.68-70.
3. Клюшин Д.А. О численном моделировании процессов тепломассопереноса в пористых средах при наличии точечных источников// Школа молодых ученых по численным методам механики сплошных сред (с.Шушенское, 1987) Тез.докл.- Новосибирск, 1987. - С.67.
4. Веретехина Л.В.. Демченко Л.И., Клюшин Д.А. Численный расчет тепломассопереноса при работе систематического дренажа и капельном орошении// Теория гидродинамических моделей технических задач. - Свердловск, 1988. - С.[illegible]03-110.
5. Клюшин Д.А., Мистецкий Г.Е. Математическое моделирование капельного орошения на горизонтальных и наклонных массивах// Респ. науч.-техн. конф. "Достижения научно-технического прогресса - в проекты мелиоративного строительства" (г.Киев, 1988 г.): Тез.докл. - Киев, 1988.- С.88.

6. Kljushin D. A. On the numerical solution of a quasilinear boundary value problem of humidity transport in a porous medium at the presence of a point source // Enlarged Abstracts of the 7-th Czechoslovac Conference on Differential Equations and Their Applications, EQUADIFF-7 (Praha, 1989). — P. 156—158.

7. Lyashko I. I., Pavlov V. V., Mistetsky G. E., Kljushin D. A. Numerical simulation of mass and heat transport from buried point source in unsaturated porous medium // Abstract of the 5-th Conference on Numerical Methods (Miscolc, 1990). — P. 61.

8. Ромащенко М. И., Мистецкий Г. Е., Клюшин Д. А. Математическая модель внутрипочвенного влаго-, соле- и теплопереноса при микроорошении // Мелиорация и водное хозяйство. — 1991. — №7. — С. 51—52.

9. Ляшко С. И., Клюшин Д. А. Оптимальное управление фильтрацией в области с точечными стоками // Укр. науч. конф. «Моделирование и исследование устойчивости процессов» (г. Киев, 1992 г.): Тез. докл. — Киев, 1992. — С. 100.

10. Клюшин Д. А. Компьютерное моделирование тепломассопереноса в ненасыщенном грунте при капельном орошении // 2-й Респ. науч.-техн. семинар «Машинные методы решения задач теории фильтрации» (г. Казань, 1992 г.): Тез. докл. — Казань, 1992. — С. 20.

Особистий внесок автора в опублікованих роботах полягає в формулюванні математичних моделей профільного та осесиметричного тепломасопереносу в насичено-ненасиченому пористому середовищі при мікрозрошуванні [1—5, 8, 9], розробці і дослідженні методики їх комп'ютерної реалізації [4, 6, 7] і аналізі закономірностей тепломасопереносу в пористому середовищі при мікрозрошуванні грунтів з горизонтальною або нахиленою поверхнею [10].

Підп. до друку 25.07.94. Формат 60×84/16. Папір друк №2. Офс. друк. Ум. друк. арк. 0,70. Ум. фарбо-відб. 0,93. Обл.-вид. арк. 1,0. Тираж 100 прим. Зам. 809

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
252650 Київ МСД 22, проспект Академіка Глушкова, 40