МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

МАСОЛ Володимир Іванович

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ВИПАДКОВИХ РІВНЯНЬ ТА СУМІЖНІ ПИТАННЯ

01.01.05 — теорія ймовірностей та математична статистика

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 1994

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Київському університеті ім. Тараса Шевченка

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, ст. наук. співроб.
ЛЕВИТСЬКА А.О.
доктор фізико-математичних наук, професор ЛІНЬКОВ Ю.М.
доктор фізико-математичних наук, професор МІШУРА Ю.С.

Провідна установа: Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України

Захист відбудеться "25" X 1994 р. в 15 годин на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.01 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601, Київ, 4, вул. Терещенківська, 3, конференц-зал.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці інституту

Автореферат розіслано "31" VIII 1994 р.

Учений секретар спеціалізованої ради
доктор фізико-математичних наук ГУСАК Д.В.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Фундаментальні результати теорії систем лінійних випадкових булевих рівнянь /далі - СЛВБР/, що знайдені в працях І.М. Коваленка, М.В. Козлова, Г.В. Балакіна, В.Ф. Колчина, мають відношення до установлення області інваріантності для граничного розподілу числа розв'язків СЛВБР та його (граничного розподілу) явний вигляд. Ці результати мають безпосередній вихід до основної проблеми кодування, яка для СЛВБР зводиться до вибору розподілу ймовірностей коефіцієнтів системи, при якому число ненульових коефіцієнтів має бути по можливості мінімальним, але ймовірність однозначного оберненого перетворення має бути достатньо високою. Перенесення результатів для СЛВБР на системи нелінійних випадкових булевих рівнянь /далі - СНВБР/ наштовхується на трудноші, подолання яких за допомогою ідей та методів, розвинених у теорії СЛВБР, не уявляється можливим.

При переході від систем лінійних булевих рівнянь до систем нелінійних булевих рівнянь /далі - СНБР/ виникають проблеми, обумовлені тим, що задача пошуку розв'язків СНБР відноситься до класу NP-повних задач. Одна з них - проблема отримання оцінок потужностей множин, які об'єднують по тих або інших ознаках різні вектори, що можуть бути розв'язками систем нелінійних рівнянь над скінченним полем (зокрема, СНБР). У дисертації пропонуються точні та наближені методи знаходження згаданих оцінок, причому останній з них використовує граничні розподіли спеціальних статистик цілочислової послідовності заданої специфікації. Відзначимо, що частина з найдених граничних розподілів узагальнює на випадкові мультімножини результати L. Carlitz /1972/, E. Bender /1973/, S. Tanny /1973/, С.Х. Сіраждінова /1979/ та інших авторів.

Розробка методів вивчення функціоналів інтегрального типу від однорідних у часі неперервних з імовірністю 1 дифузійних процесів /далі - ОЧНДП/ до моменту першого досягнення ними високого рівня являє собою складну задачу, яку розглядали, зокрема, P. Mandl /1968/, В.С. Королюк, А.Ф. Турбін /1978/, G. Keller та ін. /1982/. Актуальність цієї задачі обумовлена використанням ідей та методів теорії випадкових процесів у вивченні розміщення частинок по скриньках. Так, М.М. Савчуком /1986/ встановлена слабка збіжність випадкових процесів, пов'язаних з розміщенням різних частинок по різних скриньках, до рішень підходящих стохастичних диференціальних рівнянь. Поява вінерівського процесу як слабої границі спеціально побудованого випадкового процесу при дослідженні зазначених вище цілочислових послідовностей говорить про те, що методи теорії випадкових процесів можуть бути застосовані до задач у схемі розміщення однакових частинок по різних скриньках, у термінах якої припускає інтерпретацію будь-яка статистика (0,1)-вектора заданої специфікації.

Мета дисертації полягає в розробці асимптотичних методів дослідження наступних розподілів:
- числа розв'язків СНВБР і СЛВБР;
- статистик випадкових цілочислових послідовностей заданої специфікації;
- функціоналів інтегрального типу від процесів з класу ОЧНДП до моменту першого досягнення ними високого рівня.

Загальна методика дослідження. Отримання граничних розподілів для розглянутих у дисертації функціоналів спирається на метод моментів. Апарат асимптотичного ($n\to\infty$) аналізу попередньо знайденого явного виразу для k-го, $k\geq 1$, факторіального моменту числа розв'язків СНВБР побудовано на поданні цього виразу у вигляді суми з числом доданків, яке залежить від k, та наступним вивченням при $n\to\infty$ кожного доданку за допомогою доведених у дисертації комбінаторних співвідношень для підмножин булеану, потужність якого залежить від k ; у свою чергу, початкові моменти довільного порядку функціоналів інтегрального типу від процесів з класу ОЧНДП до моменту першого досягнення ними високого рівня проаналізовані на асимптотику завдяки виявленій (за допомогою знайдених розв'язків відповідних диференціальних рівнянь) між ними рекурентній залежності з наступним застосуванням деяких методів та результатів математичного аналізу. Нові аспекти теорії СЛВБР отримані на базі вивчених у дисертації властивостей просторів заданої ваги над скінченним полем. Граничні теореми для статистик випадкових цілочислових послідовностей заданої специфікації встановлені за допомогою методів моментів, зведення до задач підсумовування незалежних випадкових величин у схемі серій та ін.

Наукова новизна, теоретична та практична цінність. Вперше отримані наступні найбільш важливі результати (по розділах):
- знайдені область інваріантності для граничного розподілу числа розв'язків сумісної СНВБР із заданим порядком нелінійності і па-

раметр пуассонівського граничного розподілу цього числа;
- доведені критерії адитивного подання коефіцієнтів Гаусса у вигляді спеціально уведених комбінаторних чисел та експоненціальна поведінка відношень цих чисел до коефіцієнта Гаусса;
- знайдені області інваріантності для граничних факторіальних моментів довільного порядку числа розв'язків СЛВБР, явні вирази цих моментів у кожній області через коефіцієнти Гаусса та спеціально уведені комбінаторні числа; знайдено граничний розподіл числа розв'язків СЛВБР за умови, що матриця коефіцієнтів системи має фіксоване число нульових ліній;
- доведена нормальність граничного розподілу наступних статистик випадкової цілочислової послідовності заданої специфікації: числа (ℓ, r)-спалів, індексу r-мажорування; вивчена локальна поведінка цих статистик; найдені явні вирази центруючих та нормуючих функцій від елементів специфікації;
- доведена асимптотична незалежність і нормальність числа конфігурацій типу 10 та числа конфігурацій типу 1*0, де символ * заміняє нуль або одиницю, у випадковій (0,1)-послідовності, що складається з відомої кількості нулів та одиниць;
- доведені граничні теореми для розподілу наступних статистик випадкової (0,1)-послідовності, що складається з відомої кількості нулів, одиниць та конфігурацій типу 10: числа конфігурацій типу 1*0, числа конфігурацій типу 1**0, розмаху одиниць;
- знайдені граничні характеристичні функції функціоналів інтегрального типу від процесів з класу СЧНДП до моменту першого досягнення ними високого рівня в залежності від властивостей фіксованої границі; виявлені усі значення параметру, від якого залежить кожна із згаданих функцій, що надають можливість подати граничну характеристичну функцію в скінченному вигляді через елементарні трансцендентні функції.

Результати дисертації можуть бути використані в задачах кодування інформації, математичної статистики (наприклад, при перевірці гіпотези про випадковість розташування елементів цілочислової послідовності заданої специфікації), різних схем розміщення частинок по скриньках тощо.

<u>Апробація</u>. Результати роботи були представлені на IУ та УI Міжнародних конференціях з теорії ймовірностей та математичної

статистики (Вільнюс, 1985, 1993), Міжнародній конференції, присвяченій пам'яті академіка М.П. Кравчука (Київ, 1992), Міжнародній конференції з методів розпізнавання у випадкових процесах та полях (Київ, 1992), Україно-Угорській конференції з нових напрямків теорії ймовірностей та математичної статистики (Мукачево, 1992), Міжнародній конференції з ймовірнісних моделей процесів у керуванні та надійності (Донецьк, 1993), Республіканських школах-семінарах з статистичного аналізу даних на ЕОМ (Ужгород, 1989, Алушта, 1990).

Результати дисертації обговорювались на наукових нарадах, які проводились спільно Інститутом кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України та Математичним інститутом імені В.А. Стеклова АН Росії (Київ, 1976, 1978, 1980), наукових семінарах у Київському університеті імені Тараса Шевченка (1992), Московському інституті електронного машинобудування (1992), Інституті технічної кібернетики АН Беларусі (Мінськ, 1993).

Публікації. По темі дисертації опубліковано 25 робіт (усі без співавторів).

Структура дисертації. Реферована робота об'ємом 237 сторінок складається з вступу, семи розділів та списку літератури, що містить 95 найменувань. У розділі 1 знайдені явні вирази для факторіальних моментів довільного порядку числа розв'язків сумісної СНВБР. Аналіз цих виразів істотно залежить від порядку нелінійності системи. Так, для лінійного варіанта (йому присвячений розділ 3) виникла необхідність знайти в розділі 2 нові результати для просторів над скінченним полем. У розділі 4 розвивається тема оцінювання розподілів вибраних статистик випадкової цілочислової послідовності заданої специфікації. У розділах 5 та 6 ця тема поглиблюється для (0,1)-послідовностей, причому, якщо в розділі 5 знаходяться оцінки розподілів статистик випадкових векторів з відомою кількістю нулів та одиниць у кожному з них, то в розділі 6 додатково припускається відомим число конфігурацій виду 10. Розділ 7 містить матеріал, який присвячений дослідженню функціоналів інтегрального типу від процесів з класу ОЧНДП до моменту першого досягнення ними високого рівня.

Основний зміст дисертаційної роботи

Вступ містить постановки задач, огляд літератури, аналіз методів доведення теорем.

Розділ I присвячений сумісним СНВБР виду

$$\sum_{k=1}^{g_i(n)} \sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n} a^{(i)}_{j_1\dots j_k} x_{j_1}\cdots x_{j_k}=b_i,\ i=\overline{1,N}. \qquad (1)$$

У записі системи (1) використані позначення: коефіцієнти $a^{(i)}_{j_1\dots j_k}$, $1\le j_1<\dots<j_k\le n$, $k=\overline{1,g_i(n)}$, $i=\overline{1,N}$, - незалежні випадкові булеві величини з розподілом $P\{a^{(i)}_{j_1\dots j_k}=1\}=p_{ik}$; числа b_i являють собою результат підстановки в ліву частину (1) булева вектора x^c, $x^c=(x^c_1,\dots,x^c_n)$, $i=\overline{1,N}$; $g_i(n)$ - невипадкова функція, що приймає цілі додатні значення, $g_i(n)<\infty$, $i=\overline{1,N}$; додавання в (1) виконується за $mod\ 2$.

У § I знайдено явний вигляд факторіальних моментів $M(\nu_n)_k$ довільного порядку к, $k\ge 1$, числа ν_n розв'язків системи (1), що відмінні від x^c. Доведення побудовано на можливості представлення $M(\nu_n)_k$ у вигляді суми відповідних добутків індикаторів $I(x)$, $x\ne x^c$, кожний з яких приймає значення 1, якщо x є розв'язком системи (1), і дорівнює 0 в протилежному випадку. Остаточний вираз для $M(\nu_n)_k$, $k\ge 1$, залежить від p_{it}, $t=\overline{1,g_i(n)}$, $i=\overline{1,N}$, і параметрів n, к та $\rho(n)$, де $\rho(n)=|x^c|$, $|x^c|$ - число ненульових компонент вектора x^c. У прикладах, які завершують § I, знайдено $\lim\limits_{n\to\infty} M\nu_n$ за умови $g_i(n)=n$, $i=\overline{1,N}$, та різних припущень відносно розподілів p_{it}, $t=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,N}$, та величини $\rho(n)$. У § 2 містяться допоміжні результати, які використовуються при аналізі на асимптотику $(n\to\infty)$ формул для $M(\nu_n)_k$, $k\ge 1$. Ці результати відбивають деякі властивості підмножин булеану скінченної множини. Зокрема, для довільної вихідної підмножини булеану знайдена потужність усіх елементів булеану, що утворюють у перетині з кожним елементом вихідної підмножини сукупність, потужність якої є парне число. Шукана потужність знайшла свій вираз через параметри та число розв'язків спеціально побудованої системи лінійних булевих рівнянь. Прийом, що полягає у побудові та дослідженні зазначених спеціальних систем, використовується при доведенні усіх тверджень § 2.

У § 3 формулюються та доводяться дві теореми про граничний $(n\to\infty)$ пуассонівський з параметром 2^m, $m=n-N=const$, розподіл величини ν_n. Ці теореми відрізняються між собою умовами на порядок нелінійності системи (1). Так, у першій з них $g_i(n)=r$, $i=\overline{1,N}$, $2\le r\le[\varepsilon n]$ де $\varepsilon>0$, ε – мале фіксоване число, а в другій теоремі параметр r не залежить від n, $r=const$, $r\ge 2$. Відмінність у припущеннях щодо порядку нелінійності викликала умову: для довільного i, $i=\overline{1,N}$, існує t, $t\in\{2,\dots,r\}$, таке, що $cn^{-2}\ln n\le p_{it}\le 1-cn^{-2}\ln n$, де $\varepsilon c>1$, у першій теоремі § 3 та умову: $c_t n^{-t}\ln n\le p_{it}\le 1-c_t n^{-t}\ln n$, $t=\overline{1,r}$, $i=\overline{1,N}$, де c_t, $t=\overline{1,r}$, – невід'ємні числа, $\sum_{t=2}^{r} c_t\to\infty$, $n\to\infty$, у другій теоремі § 3. Слід зауважити, що умови теорем § 3 не накладають обмежень на розподіли коефіцієнтів лінійної частини системи (1), тобто на величини p_{i1}, $i=\overline{1,N}$. Доведення теорем § 3 побудовано на отриманні співвідношень $M(\nu_n)_k\to\lambda^k$, $n\to\infty$, $k\ge 1$, де $\lambda=2^m$, з наступним використанням відомого факту, що пуассонівський з параметром $\lambda>0$ розподіл однозначно визначається своїми факторіальними моментами, які мають вигляд λ^k, $k\ge 1$. У § 4 система (1) розглядається за умов, при яких можуть не мати місця теореми § 3. Ці умови дозволяють отримувати оцінки ймовірності $P\{\nu_n>0\}$ при $n\to\infty$. У першій з двох теорем § 4 $r=const$, $r\ge 2$, але припущення $\sum_{t=2}^{r} c_t\to\infty$, $n\to\infty$, може не виконуватись. Та якщо замість нього справджується нерівність $\sum_{t=1}^{r} c_t \rho^{t-1}\times$ $\times((t-1)!)^{-1}>1$, де $\rho(n)=\rho n$, $\rho=const$, $\rho\in(0,1/4]$, то при $n\to\infty$ ймовірність $P\{\nu_n>0\}$ належить інтервалу $[(1+2^{-m})^{-1},\min(1,2^m)]$. У першій теоремі § 4 розглянуто також випадок $\rho\in[1/4,1)$. У теоремі 3.4.1 припускається, що $g_i(n)=r$, $i=\overline{1,N}$, $r=\rho' n$, $\rho'=const$, виконується співвідношення, яке залежить від ρ' і ρ та умова: для довільного i, $i=\overline{1,N}$, існує t, $t\in\{1,\dots,r\}$, таке, що $p_{it}=1/2$. За цих умов знайдено інтервал, якому належить $P\{\nu_n>0\}$ при $n\to\infty$. Доведення теорем § 4 спирається на асимптотичний $(n\to\infty)$ аналіз перших двох факторіальних моментів величини ν_n з наступним використанням відомих нерівностей.

Питання про оцінку ймовірності того, що система (1) при додаткових обмеженнях на індекси $j_1,\dots,j_k$ невідомих величин $x_{j_1},\dots,x_{j_k}$, $1\le j_1<\dots<j_k\le n$, $k=\overline{1,g_i(n)}$, $i=\overline{1,N}$, має единий розв'язок, розглянуто в роботах І.М. Коваленка (1971) та Г.В. Балакіна (1973). Результати розділу І надруковані в [14, 15].

У розділі 2 вивчаються властивості k-вимірних підпросторів V_k, $1 \le k \le n$, n-вимірного векторного простору V_n над скінченним полем $GF(q)$, що містить q елементів ($q < \infty$, q - степінь простого числа). Потреба в цих властивостях виникає при дослідженні на асимптотику ($n \to \infty$) факторіальних моментів $M(\nu_n)_k$, $k \ge 1$, числа ν_n розв'язків СЛВБР. Відомо, що загальна кількість зазначених підпросторів дорівнює коефіцієнту Гаусса $\left[{n \atop k}\right]_q$. Число $\left[{n \atop k}\right]_q$ можна подати у вигляді $\left[{n \atop k}\right]_q = \sum_{\omega \ge 1} \left[{n \atop k} \middle| \omega\right]_q$, де $\left[{n \atop k} \middle| \omega\right]_q$ - кількість k-вимірних підпросторів $V_{(k|\omega)}$ ваги ω n-вимірного простору V_n над полем $GF(q)$, $\omega \ge 1$. Вагою простору V_n називається число $\omega = \min_{v \ne 0} |v|$, де $|v|$ - кількість ненульових компонент вектора $v \in V_n$. У теоремі 2.1.2 § 1 для $\omega \in \{1, 2\}$ знайдено число підпросторів $V_{(k|\omega)}$ простору V_n, які містять фіксований r-вимірний підпростір V_r. Доведення теореми 2.1.2 (як і наступних теорем 3.1.2 - 5.1.2) спирається на алгоритм побудови множини базисних векторів підпростору V_k простору V_n, $1 \le k \le n$. У теоремі 3.1.2 знайдено необхідну і достатню умову для того, щоб мала місце рівність $\left[{n \atop k}\right]_q = \left[{n \atop k} \middle| 1\right]_q + \left[{n \atop k} \middle| 2\right]_q$. Теорема 4.1.2 дає два співвідношення для обчислення $\left[{n \atop k} \middle| 1\right]_q$. Одне з них залежить від $\left[{n-\mu \atop k-\mu}\right]_q$ та $\left[{n-\mu \atop k-\mu} \middle| 1\right]_q$ при $1 \le \mu \le k$, а інше - від $\left[{n-\nu \atop k-1}\right]_q$ та $\left[{n-\nu \atop k-1} \middle| 1\right]_q$ при $1 \le \nu \le n-k+1$. У теоремі 5.1.2 наведено рекурентне по параметрах n і k співвідношення для знаходження $\left[{n \atop k} \middle| 2\right]_q$. Теорема 5.1.2 може бути доведена за допомогою запропонованого в пункті 6 алгоритму побудови множини базисних векторів підпростору $V_{(k|\omega)}$ простору V_n, $1 \le k \le n$, $\omega \ge 2$. Теорема 7.1.2 обгрунтовує алгоритм із п. 6.

Основний результат § 2 - теорема 6.2.2 про поведінку при $n \to \infty$ відношення $\left[{n \atop k} \middle| 1\right]_q / \left[{n \atop k}\right]_q$, зокрема, експоненціальну поведінку, якщо $k = c\, q^{n-k}(1 + o(1))$, де c - фіксоване додатне число, $o(1) \to 0$, $n \to \infty$. При доведенні теореми 6.2.2 використані обидві рівності для обчислення $\left[{n \atop k} \middle| 1\right]_q$, що знайдені в § 1, а також оцінка $\left[{t+s \atop s+1} \middle| 1\right]_q \le (t+s)\, q^{ts}$, яка обгрунтована в лемі 5.2.2. У теоремі 7.2.2 вивчається відношення $\left[{n \atop k} \middle| 2\right]_q / \left[{n \atop k}\right]_q$ при $n \to \infty$ і деяких значеннях параметра κ.

Для теорії кодування вираз $\left[{n \atop \kappa}\right]_q - \left[{n \atop \kappa}\middle|1\right]_q - \left[{n \atop \kappa}\middle|2\right]_q$ дає число нетривіальних (термінологія В.Д. Гоппи (1984)) лінійних кодів розміру κ. Результати розділу 2 надруковані в [9, 13].

У розділі 3 досліджені граничні $(n \to \infty)$ розподіли та факторіальні моменти числа ν_n розв'язків СЛВБР, яку можна отримати, коли в системі (1) покласти $g_i(n) \equiv 1$, $b_i \equiv 0$ та $P\{a_j^{(i)} = 1\} = p_{ij}$, $j = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,N}$, $m = n - N = const$. У § І основними результатами є теореми І.І.3 та 4.І.3. Припускаючи, що $p_{ij} \in [\delta_i, 1-\delta_i]$, $j = \overline{1,n}$, $i = \overline{1,N}$,

$$\sum_{i=1}^{N} e^{-n\delta_i} = o(1), \quad n \to \infty, \tag{2}$$

в теоремі І.І.3 знайдено вираз для $\lim\limits_{n\to\infty} M(\nu_n)_\kappa$, $\kappa \geq$, через коефіцієнти Гаусса $\left[{\kappa \atop r-1}\right]_2$ та комбінаторні числа $\left[{\kappa \atop r-1}\middle|1\right]_2$ і $\left[{\kappa \atop r-1}\middle|2\right]_2$ при $1 \leq r \leq [\kappa+1-\log_2(\kappa+1)]$. Верхня границя для параметра r обгрунтована за допомогою теореми 3.І.2. Доведення теореми І.І.3 побудовано на представленні явного виразу для $M(\nu_n)_\kappa$, $\kappa \geq 1$, у вигляді суми доданків, певна кількість з яких прямує $(n \to \infty)$ до $2^{(\kappa-r+1)m}$, а решта до нуля, з подальшим підрахуванням цієї кількості. Для отримання граничних $(n \to \infty)$ значень доданків із зазначеної суми використовувались також твердження з § 2 розділу І. Завдяки результату А.О. Левитської (1986), відомо, що порушення умови (2) має привести до зміни явного виразу для $\lim\limits_{n\to\infty} M(\nu_n)_\kappa$, $\kappa \geq 1$ (відносно виразу, знайденого в теоремі І.І.3). За умов

$$p_{ij} = (c_i + \ln n)/n, \quad |c_i| \leq const < \infty, \quad j = \overline{1,n}, \quad i = \overline{1,N}, \tag{3}$$

$n^{-1} \sum\limits_{i=1}^{N} e^{-c_i} \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, $n^{-1} \sum\limits_{i=1}^{N} c_i \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ в теоремі 4.І.3 доведено, що при $n \to \infty$ та $\kappa \geq 1$ $M(\nu_n)_\kappa \to \sum\limits_{t=0}^{\kappa} 2^{(\kappa-t)m} (\exp\{(2^t-1)e^{-b}\}-1) \exp\{(2^{\kappa-t}-1)a\} \left[{\kappa \atop t}\right]_2 +$

$$+ \sum_{r=1}^{[\kappa+1-\log_2(\kappa+1)]} 2^{(\kappa-r+1)m} \exp\{(2^{\kappa-r+1}-1)a\} \left(\left[{\kappa \atop r-1}\right]_2 - \left[{\kappa \atop r-1}\middle|1\right]_2 - \left[{\kappa \atop r-1}\middle|2\right]_2 \right).$$

У теоремі 8.1.3 знайдені необхідна і достатня умови для того, щоб однорідна СЛВБР мала єдиний розв'язок. У теоремі 8.1.3 припускається, що розподіл $p_{ij}=p$, $j=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,N}$, причому $n^{-1}(c+\ln n)\le p\le 1-n^{-1}(c+\ln n)$, де $c=const$, тобто співвідношення (2) може не виконуватись. Доведення теореми 8.1.3 побудовано на асимптотичному ($n\to\infty$) аналізі спеціальних виразів від перших двох факторіальних моментів величини ν_n. Основний результат § 2 - розв'язок задачі про розподіли числа ν_n при $n\to\infty$ за умови, що матриця коефіцієнтів СЛВБР має фіксовану кількість нульових рядків і стовпців. Постановка цієї задачі належить І.М. Коваленку. Загальна теорема 3.2.3, одна з умов якої - стохастична незалежність коефіцієнтів одного рівняння системи від коефіцієнтів будь-якого іншого рівняння системи, дає явний вираз граничного ($n\to\infty$) розподілу $P\{\nu_n=2^k-1/\xi=r_0,\eta=s_0\}$, де ξ (η) - кількість нульових рядків (стовпців) у матриці коефіцієнтів СЛВБР. Доведення теореми 3.2.3 використовує обгрунтовану в лемі 2.2.3 можливість подання величини $1+\nu_n$ усіх розв'язків СЛВБР у вигляді підходящого степеня числа 2 при умові $\xi=r_0$, $\eta=s_0$. У теоремі 4.2.3 припускається, що коефіцієнти СЛВБР - незалежні випадкові булеві величини, які приймають значення 1 з ймовірністю p_{ij}, $j=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,N}$. Решта умов теореми 4.2.3 стосується обмежень на розподіли p_{ij}, $j=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,N}$. Ці обмеження виконуються, якщо, наприклад, має місце (3). Доведення теореми 4.2.3 складається з перевірки припущень загальної теореми 3.2.3.

Граничний розподіл величини ν_n при виконанні (2) знайшов І.М. Коваленко (1975). Питання про розподіл ν_n при $n\to\infty$ $p_{ij}=(c+\ln n)/n$, $c=const$, $j=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,N}$, $|n-N|\underset{n\to\infty}{\to}\infty$ розв'язано Г.В. Балакіним (1983). Результати розділу 3 надруковані в [4, 8, 13].

У розділах 4 - 6 вивчаються асимптотичні ($n\to\infty$) розподіли статистик n-вимірного вектора заданої специфікації, який випадково та рівноімовірно витягується з сукупності n-вимірних векторів. Потужність цієї сукупності має явний аналітичний запис, що надає змогу використовувати зазначені розподіли статистик для, зокрема, наближеного оцінювання числа можливих розв'язків СНБР.

Розділ 4 присвячений інтегральним і локальним граничним ($n\to\infty$) теоремам для числа (ℓ,r)-спадів та індексу r-мажорування випадкової цілочислової послідовності заданої специфікації. Нехай $J_s=\{j_1,\dots,j_s\}$ - сукупність невід'ємних цілих чисел, причому j_1+

$+\dots+j_s=n,\ j_s\geq 1$. Позначимо $R(J_s)$ множину послідовностей $f,\ f=(f(1),\dots,f(n))$, у кожній з яких ціле k повторюється j_k разів, $k=\overline{1,s}$ (будемо казати, що f має специфікацію J_s). Сукупність $D(r,f,\ell)$ (ℓ,r)-спадів послідовності f визначимо рівністю $D(r,f,\ell)=\{i: f(i)-f(i+\ell)\geq r,\ i=\overline{1,n-\ell}\}$, де $r\geq 1,\ \ell\geq 1$. D.Rawling уведено (1981) індекс r-мажорування послідовності f як число, що дорівнює сумі елементів множини $D(r,f,1)$ плюс потужність сукупності $\{(i,j): 1\leq i<j\leq n,\ f(i)>f(j)>f(i)-r\}$. Нехай з $R(J_s)$ випадково і рівноімовірно витягнута f. Для числа (ℓ,r)-спадів у f та індексу r-мажорування f приймемо відповідно запис $\eta_{n,r}(\ell)$ та ξ_n.

§ 1 містить допоміжні твердження, які використовуються в § 2 і § 3. Так, в лемі 1.1.4 знайдено рекурентне по параметрах $j_1,\dots,j_s$ співвідношення для початкових моментів $M\eta^k_{n,r}(1)$ довільного порядку $k,\ k\geq 1$, випадкової величини $\eta_{n,r}(1)$. Доведення цього співвідношення грунтується на можливості представлення $\eta_{n,r}(1)$ у вигляді $\eta_{n,r}(1)=\xi_1+\dots+\xi_{n-1}$, де $\xi_i=\{1$, якщо у випадковій послідовності $f,\ f\in R(J_s)$, компоненти, які розташовані на місцях з номерами i та $1+i$, утворюють $(1,r)$-спад; 0 - в протилежному випадку$\}$, $i=\overline{1,n-1}$. У теоремі 3.2.4 /7.2.4/ § 2 сформульовані загальні умови на розподіл випадкової величини $\eta_{n,r}(\ell)$ / ξ_n /, при яких доведена асимптотична $(n\to\infty)$ $(0,1)$-нормальність величини $(\eta_{n,r}(\ell)-M\eta_{n,r}(1))/\sqrt{D\eta_{n,r}(1)}$ $/(\xi_n-M\xi_n)/\sqrt{D\xi_n}$ /. Перевірка цих умов для конкретної множини J_s становить задачу, варіанти розв'язку якої пропонуються в лемах 5.2.4, 6.2.4 для $\eta_{n,r}(1)$ і лемі 9.2.4 для ξ_n. Обгрунтування теореми 3.2.4 спирається на можливість представлення величини $\eta_{n,r}(1)$ у вигляді суми незалежних випадкових величин, які приймають значення нуль або одиниця із знайденими (при доведенні теореми 3.2.4) ймовірностями. Таке представлення величини $\eta_{n,r}(1)$ дозволило також побудувати за відомою схемою (Й.І. Гіхман, А.В. Скороход (1977)) випадковий процес $\xi_n(t),\ t\in[0,1]$ $(\sqrt{D\eta_{n,r}(1)}\,\xi_n(1)+M\eta_{n,r}(1)$ і $\eta_{n,r}(1)$ мають однакові розподіли) і довести збіжність при $n\to\infty$ скінченновимірних розподілів процесів $\xi_n(t)$ до скінченновимірних розподілів вінерівського процесу (теореми 10.2.4, 11.2.4). У § 3 в умовах теореми 3.2.4 вивчена локальна поведінка $(n\to\infty)$ величини $\eta^*_{n,r}(1)$ /теорема 1.3.4/ на основі результатів § 1, § 2 і роботи О.О. Боровкова та ін. (1985). Локальна поведінка $(n\to\infty)$ величини ξ_n розглянута в теоремі 4.3.4 (в умовах теореми 7.2.4), причому співвідношення

$$\sqrt{D\xi_n}\, P\{\xi_n = [y\sqrt{D\xi_n} + M\xi_n]\} - (2\pi)^{-1/2} e^{-y^2/2} \to 0, \; n \to \infty, \qquad (4)$$

доведено для тих значень параметра y, які не належать фіксованій околиці точки нуль. Без цього обмеження, але при додаткових припущеннях відносно $j_1, \dots, j_s$ (які явно виконуються при $j_1 = \dots = j_s = 1$), встановлена локальна теорема 5.3.4. Доведення теореми 5.3.4 базується на можливості представлення (за допомогою формул обернення характеристичних функцій) виразу в лівій частині (4) у вигляді суми скінченного числа доданків з наступним обгрунтуванням збіжності до нуля кожного з них.

Граничні $(n \to \infty)$ інтегральні та локальні теореми для числа $(1,1)$-спадів при $j_1 = \dots = j_s = 1$ знайдені в роботах E. Bender (1972), L. Carlitz та ін. (1973), S. Tanny (1973), С.Х. Сіраждінова (1979). Граничні $(n \to \infty)$ інтегральні /локальні/ теореми для індексу r-мажорування при $r \geq s$, $j_1 = \dots = j_s = 1$ наведені в роботах В.М. Сачкова (1978) /E. Bender (1972)/. Результати розділу 4 надруковані в [5 - 7].

У розділі 5 на сукупності $\Omega(m_0, m_1)$ усіх n-вимірних векторів, кожний з яких містить m_0 нулів, m_1 одиниць, $m_0 + m_1 = n$, уведено рівномірний розподіл і вивчаються статистики $\eta_n(\ell)$, $\ell \geq 1$, де $\eta_n(\ell)$ - число ℓ-сходин у випадковому векторі $f \in \Omega(m_0, m_1)$ (будемо казати, що компоненти $f(i)$ та $f(j)$ послідовності $f \in \Omega(m_0, m_1)$ утворюють ℓ-сходину, якщо $f(i) > f(j)$, $j = i + \ell$, $1 \leq i \leq n - \ell$, $\ell > 0$). Основний результат § I - теорема I.I.5 про сумісний розподіл випадкових величин $\eta_n(1)$, $\eta_n(2)$. Доведення теореми I.I.5 виконується за допомогою комбінаторних формул, а також наступної властивості двійкових послідовностей, які починаються з одиниці і закінчуються нулем: перестановка в таких послідовностях серій, що складаються лише з нулів, не змінює загальної кількості 2-сходин (а також, звичайно, загальної кількості I-сходин). У теоремі 6.I.5 знайдено розподіл величини $\eta_n(\ell)$, $\ell \geq 1$. У теоремі I.2.5 § 2 доведена асимптотична $(n \to \infty)$ незалежність і нормальність величин $(\eta_n(1) - \alpha_0\alpha_1 n)/\alpha_0\alpha_1\sqrt{n}$ і $(\eta_n(2) - \alpha_0\alpha_1 n)/\alpha_0\alpha_1\sqrt{n}$, де $m_0 = \alpha_0 n$, $m_1 = \alpha_1 n$, $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$. Умови теореми I.2.5 накладають обмеження на α_0 та α_1 при $n \to \infty$, а її обгрунтування побудовано на асимптотичному $(n \to \infty)$ аналізі явного виразу для сумісного розподілу величин $\eta_n(1)$ і $\eta_n(2)$. Із умов теореми I.2.5 випливає, що при $n \to \infty$ $(\alpha_0\alpha_1)^2 n \to \infty$. Якщо при $n \to \infty$ $m_i \to \infty$, $\alpha_i \to 0$, $(\alpha_0\alpha_1)^2 n \to \lambda$, $\lambda < \infty$, то сумісний граничний

$(n \to \infty)$ розподіл величин $m_i - \eta_n(1)$ і $m_i - \eta_n(2)$ має вигляд $(z_1! z_2!)^{-1} \times e^{-2\lambda} \lambda^{z_1+z_2}$, де z_1, z_2 - цілі фіксовані невід'ємні числа, $i=0,1$ (теорема 2.2.5). Теорема 4.2.5 у припущеннях $(\alpha_0\alpha_1)^2 n \to \infty$, $\ell = o(\alpha_0\alpha_1\sqrt{n})$ стверджує $(0,1)$-нормальність величини $(\eta_n(\ell) - \alpha_0\alpha_1 n)/\alpha_0\alpha_1\sqrt{n}$ при $n \to \infty$. У теоремі 5.2.5 встановлено, що випадкова величина $m_0 - \eta_n(\ell)$ при $n \to \infty$ приймає фіксоване ціле значення κ, $\kappa \geq 0$, з ймовірністю $e^{-\lambda}\lambda^{\kappa}/\kappa!$, якщо при $n \to \infty$ $m_0 \to \infty$, $\alpha_0 \to 0$, $(\ell^3 \ln m_0)/m_0 \to 0$. Це твердження також має місце, якщо в ньому замінити m_0 на m_1 і α_0 на α_1. У теоремах 8.2.5, 10.2.5 - 12.2.5 виконано асимптотичний $(n \to \infty)$ аналіз коефіцієнта кореляції випадкових величин $\eta_n(\ell_1)$, $\eta_n(\ell_2)$, $1 \leq \ell_1 < \ell_2 \leq n-1$. Завершується § 2 розглядом умов збіжності $(n \to \infty)$ скінченновимірних розподілів процесів $\xi_n(t)$ до скінченновимірних розподілів вінерівського процесу, де $\xi_n(t)$, $t \in [0,1]$, - випадковий процес, побудований в § 2 розділу 4 у припущенні, що специфікація $Js = (m_0, m_1)$.

За допомогою теорем 4.2.5 і 5.2.5 при $\ell = 1$ в п. 6 § 2 отримані граничні $(n \to \infty)$ розподіли числа серій, які утворені лише нулями випадкової послідовності f, $f \in \Omega(m_0, m_1)$. Ці ж розподіли можна отримати, використовуючи деякі твердження, знайдені у схемі розміщення однакових частинок по різних скриньках (див. А.Н. Трунов (1986)).. Результати розділу 5 надруковані в [11].

У розділі 6 вивчаються статистики послідовностей з множини $\Omega(\kappa, m_0, m_1)$. Тут $\Omega(\kappa, m_0, m_1)$ - сукупність усіх n-вимірних $(0,1)$-векторів, кожний з яких містить m_0 нулів, m_1 одиниць і κ 1-сходин. Перехід від $\Omega(m_0, m_1)$ у розділі 5 до $\Omega(\kappa, m_0, m_1)$ у розділі 6 дав змогу виявити певну кількість статистик, які допускають однаковий підхід до асимптотичного $(n \to \infty)$ аналізу їх розподілів. Нехай $\mu_{\kappa n}(\ell)$ - число ℓ-сходин у послідовності, яка випадково і рівноймовірно витягується з $\Omega(\kappa, m_0, m_1)$. У § 1 теореми 1.1.6 та 2.1.6 дають за допомогою методу моментів сумісний розподіл випадкових величин $\mu_{\kappa n}(\ell_i)$, $i = \overline{1,s}$, при $n \to \infty$ та фіксованих κ, s, ℓ_i, $i = \overline{1,s}$. Якщо $\kappa = \kappa(n)$ при $n \to \infty$, то залежність між $\mu_{\kappa n}(\ell_i)$, $i = \overline{1,s}$, ускладнюється, про що свідчить, зокрема, аналіз коефіцієнта кореляції величин $\mu_{\kappa n}(2)$ і $\mu_{\kappa n}(3)$, виконаний у теоремі 8.1.6. Хоча окремо для $\mu_{\kappa n}(2)/\kappa$ і для $\mu_{\kappa n}(3)/\kappa$ обгрунтовані твердження типу закону великих чисел за умов, що при $n \to \infty$ $\kappa \to \infty$, $m_0^{-1}\kappa \to q_0$, $m_1^{-1}\kappa \to q_1$ (теорема 3.1.6). Доведення теореми 3.1.6 отримано методом моментів. Цей же метод використано в теоремах 13.1.6 - 16.1.6 та 18.1.6 - 20.1.6, де знайдені граничні ($n \to \infty$) розподіли величин відповідно

$$(\min(m_0,m_1))^{-1} \max_{t_1 \le \ell \le t_2} \mu_{1n}(\ell),\ 1 \le t_1 \le t_2 \le n-1,\ (m_0 m_1)^{-1} \sum_{\ell \le t} \mu_{1n}(\ell).$$

У § 2 досліджені на асимптотику ($n \to \infty$) методом моментів розподіли наступних статистик послідовності f, $f \in \Omega(k, m_0, m_1)$: числа інверсій (теорема 3.2.6), індексу мажорування (теорема 5.2.6), довжини найбільшої /найменшої/ серії з одиниць (теорема 7.2.6 /теорема 9.2.6/), розмаху ρ_{kn} одиниць (теорема 14.2.6), номерів крайніх зліва ρ^-_{kn} та крайніх справа ρ^+_{kn} позицій, на яких розміщені одиниці (теорема 16.2.6). Тут $\rho_{kn} = \rho^+_{kn} - \rho^-_{kn} + 1$, $\rho^+_{kn} = \max\{i: f(i)=1\}$, $\rho^-_{kn} = \min\{i: f(i)=1\}$, де $f(i)$ - значення i-ї компоненти послідовності $f \in \Omega(k, m_0, m_1)$, $i = \overline{1,n}$. У теоремі 10.2.6 знайдені явні вирази розподілу величини ρ_{kn}, сумісного розподілу величин ρ^-_{kn}, ρ^+_{kn}. У теоремі 12.2.6 за умов, що при $n \to \infty$ $m_0 \to \infty$, $k/m_0 \to q_0$, $k/m_1 \to q_1$ проведено асимптотичний аналіз розподілів, отриманих у теоремі 10.2.6.

Результати розділу 6 надруковані в [10, 12].

У розділах 4 і 5 виявилось, що розподіли деяких статистик послідовностей заданої специфікації можуть бути отримані за допомогою розподілів спеціально побудованих випадкових процесів, а скінченновимірні розподіли цих процесів збігаються до скінченновимірних розподілів вінерівського процесу. Таким чином, постають задачі дослідження статистик випадкових процесів (зокрема, оцінювання параметрів дифузійних процесів), розподілів функціоналів від дифузійних процесів тощо. Першу з них розглядали Р.Ш. Липцер, А.Н. Ширяев (1974), Ю.М.Ліньков (1981) та ін. Деяким аспектам другої задачі присвячений розділ 7.

У розділі 7 знайдені розподіли функціоналів інтегрального типу від дифузійних процесів до моменту першого досягнення ними високого рівня. Нехай $\xi(t)$, $t \ge 0$, - процес з класу ОЧНДП. Позначимо $\tau(a,x,z)$ - момент першого досягнення процесом $\xi(t)$, $t \ge 0$, одного з кінців інтервалу (a,z), $\xi(0)=x$ з ймовірністю 1, $x \in (a,z)$. У § 1 теорема 1.1.7 дає явний вигляд граничної ($z \to \infty$) характеристичної функції випадкової величини $\eta_z = \int_0^{\tau(a,x,z)} f(\xi(t))\,dt$, де

$f(\cdot)$ - невипадкова неперервна функція, а саме: $M\exp\{is\varrho_z^{-1}\eta_z\} \to$ $\to (\psi(s))^{-1}$, де ϱ_z - нормуюча функція,

$$\psi(s) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-2is)^k \prod_{j=1}^{k} (j(j-1)\varrho + j)^{-1}, \quad \varrho \in [0, \infty).$$

Аналіз припущень, при яких доведена теорема 1.1.7, дозволяє дійти висновків, що, зокрема, фіксована границя a - відштовхуюча, при $z \to \infty$ $(D\eta_z)^{1/2}/M\eta_z \to (\varrho/(1+\varrho))^{1/2}$, відома аналітична умова існування стаціонарного розподілу процесу $\xi(t), t \geq 0$, може не виконуватись. Останній з наведених висновків стосується також решти теорем § 1. У п. 3 показано, що серед усіх значень параметра ϱ, $\varrho \in (0, \infty)$, тільки при $\varrho = 2$ функція $\psi(s)$ записується в скінченному вигляді через елементарні трансцендентні функції. В умовах теореми 5.1.7 фіксована границя a - притягуюча і знайдено перетворення Фур'є функції, яка є граничною $(z \to \infty)$ для $P\{\tilde{g}_z^{-1}\eta_z < v / \xi(\tau(a,x,z)) = z\}$, $v \in (-\infty, \infty)$, де $\tilde{g}_z$ - нормуюча функція. Зазначене перетворення має вигляд

$$\Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-2is)^k \prod_{j=1}^{k} (j(j+1)\tilde{\varrho} + j^2)^{-1}\Big)^{-1}, \quad \tilde{\varrho} \in (0, \infty),$$

і, як показано у п. 7, тільки при $\tilde{\varrho} = 1$ його можна подати через елементарні трансцендентні функції. У теоремі 8.1.7 розглянуто випадок, коли $\tilde{\varrho} = 0$, а отриманий при цьому граничний $(z \to \infty)$ розподіл величини $\tilde{g}_z^{-1}\eta_z$ при умові $\xi(\tau(a,x,z)) = z$ має перетворення Фур'є $(\psi(s))^{-1}$. Обгрунтування теорем § 1 побудовано на знаходженні рекурентних співвідношень для граничних $(z \to \infty)$ моментів вихідних випадкових величин з наступною перевіркою умов однозначного визначення розподілу по його моментах.

Результати та методи § 1 використані в § 2 для доведення основної теореми 1.2.7, в якій знайдено граничну $(z \to \infty)$ характеристичну функцію величини $\mu_z = \int_0^{\tau(z)} f(\zeta(t))\,dt$. Тут $\zeta(t) = \xi_k(t - \varkappa_{k-1})$ при $t \in [\varkappa_{k-1}, \varkappa_k)$, $k \geq 1$; $\varkappa_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k$, $n \geq 1$; $\tau_k = \inf\{t: t \geq 0,\ \xi_k(t) = a\}$, $a < 0$, $k \geq 1$; $\xi_k(t)$, $t \geq 0$, $k \geq 1$, - незалежні процеси з класу ОЧНДП, скінченновимірні розподіли яких не залежать від k, $\xi_k(0) = 0$, $k \geq 1$, з ймовірністю 1; $\tau(z) = \inf\{t: t \geq 0,\ \zeta(t) = z\}$. Процес $\zeta(t), t \geq 0$, природно назвати регенеруючим дифузійним процесом з моментами регенерації

$\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ Умови теореми I.2.7 /3.2.7/ співпадають з умовами теореми 5.I.7 /8.I.7/, а отриманий при цьому результат має вигляд

$$M\exp\{is\tilde{g}_z^{-1}\mu_z\} \to \left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-2is)^k\prod_{j=1}^{k}\left(j(j-1)\tilde{\varrho}+j^2\right)^{-1}\right)^{-1}$$

$$/M\exp\{is\tilde{g}_z^{-1}\mu_z\} \to (\psi(s))^{-1}/.$$

Граничні теореми для випадкових функціоналів інтегрального типу від ергодичних процесів розглянуті в роботах В.С. Королюка, А.Ф. Турбіна /1978/, В.М. Шуренкова /1989/ та їх учнів, від зворотних процесів з класу ОЧНДП - в роботах Ю.С. Мішури /1976, 1977/. Граничні характеристичні функції, що допускають запис через елементарні трансцендентні функції, для моментів першого досягнення високого рівня процесами з класу ОЧНДП, отримані P. Mandl /1968/, G. Keller та ін. /1988/. Результати розділу 7 надруковані в [1-3].

Основні результати дисертації містяться в наступних роботах:

1. Масол В.И. Предельные распределения для функционалов от траектории случайного процесса диффузионного типа // Теория вероятностей и мат. статистика. - 1975. - Вып. 13. - С. 100 - 106.
2. Масол В.І. Граничні теореми для функціоналів адитивного типу від регенеруючих дифузійних процесів // Доп. АН УРСР. - 1976. - № 1. - С. 15 - 17.
3. Масол В.И. Предельные распределения для функционалов аддитивного типа от диффузионных процессов // Теория вероятностей и мат. статистика. - 1977. - Вып. 16. - С. 59 - 64.
4. Масол В.И. Расширение области инвариантности для случайных булевых матриц // Кибернетика. - 1980. - № 3. - С. 125 - 128.
5. Масол В.И. Предельное распределение числа спадов целочисленной последовательности // 4-я Междунар. Вильнюс. конф. по теории вероятностей и мат. статистике. Тез. докл. - Вильнюс, 1985. - Т. 2. - С. 51 - 52.
6. Масол В.И. Предельные распределения некоторых статистик целочисленной последовательности // Теория вероятностей и мат. статистика. - 1986. - Вып. 35. - С. 69 - 75.
7. Масол В.И. Локальные теоремы для некоторых статистик целочисленной последовательности // Теория случайных процессов. - 1988.

- Вып. 16. - С. 61 - 66.
8. Масол В.І. Про ймовірність єдиного розв'язку системи лінійних випадкових булевих рівнянь // Вісн. Київ. ун-ту. - 1988. - Вип. 30. - С. 58 - 62.
9. Масол В.И. Некоторые применения алгоритмов построения подпространств над конечным полем // Укр. мат. журн. - 1989. - 41, № 8. - С. 1146 - 1148.
10. Масол В.И. О случайных двоичных последовательностях с заданным числом ступеней // Там же. - 1990. - 42, № 4. - С. 512 - 518.
11. Масол В.И. Асимптотическое поведение некоторых статистик (0,1)-вектора // Теория вероятностей и мат. статистика. - 1990. - Вып. 43. - С. 83 - 90.
12. Масол В.И. О распределении числа ℓ-ступеней случайной двоичной последовательности с ограничениями // Укр. мат. журн. - 1991. - 43, № 9. - С. 1186 - 1193.
13. Масол В.І. Граничні розподіли числа лінійних кодів заданої ваги // Тез. Міжнар. конф., присвяченої пам'яті акад. М.П. Кравчука. - Київ, 1992. - С. 126.
14. Masol V.I. Moments of the number of solutions of a system of random Boolean equations // Random Oper. Stoch. Eqs. - 1993. - V. 1, № 2. - P. 171 - 179.
15. Masol V.I. Theorems of invariance for systems of random Boolean equations // VI Int. Vilnius conf. in prob. theory and math. stat.: Abstr. of comm. - Vilnius, 1993. - V. 2. - P. 19 - 20.

ВМасол

Підп. до друку 20.06.94 Формат 60х84/16. Папір друк. Офс.друк.
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид. арк. 0,8.
Тираж 100 пр. Зам. 165 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3