ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ
АН УКРАЇНИ

На правах рукопису

ШУРКО ІРИНА ЛЕОНІДІВНА

ДИФУЗІЙНІ АПРОКСИМАЦІЇ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ І ПОЛІВ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

01.01.05 - теорія ймовірностей та математична статистика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

ДОНЕЦЬК - 1994

АВ 30.676

ЛННБ України ім.В.Стефаника
00756562 (V)

Дисертація є рукопис

Роботу виконано на кафедрі алгебри та теорії ймовірностей математичного факультету Донецького державного університету.

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук Б.В.Бондарев.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук, професор В.В.Булдигін; кандидат фізико-математичних наук В.М.Клепіков.

Провідна установа: Інститут кібернетики АН України.

Захист відбудеться "21" вересня 1994 року о 15 год. на засіданні спеціалізованої ради К 06.01.02 в Інституті прикладної математики і механіки АН України за адресою:

340144 м.Донецьк, вул. Р.Люксембург, 74.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці інституту

Автореферат розіслано "15" липня 1994 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради Чані О.С.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

I.ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ.

Актуальність роботи. Дана робота присвячена розвиненню методу одного ймовірнісного простору та його застосуванню до обчислення ймовірності знаходження випадкових процесів і полів, що залежать від параметра, в криволінійних межах.

Починаючи з класичної праці А.В.Скорохода, до методу одного ймовірністного простору зверталося багато дослідників. Відмітимо праці Комлоша, Майора, Тушнаді, Дадлей і Філіпа, О.О.Боровкова, О.І.Саханенка та ін.

Важливу роль в багатьох застосуваннях теорії імовірностей і в математичній статистиці грають граничні задачі.

Дослідженню цих питань присвячені праці О.О.Боровкова, А.А.Могульского, О.О.Новікова, В.А.Гасаненка та ін.

Мета роботи. Побудова дифузійних апроксимацій випадкових процесів і полів, дослідження поведінки в криволінійних межах усереднених стохастичних систем і дифузійних процесів і полів з малою дифузією.

Наукова новизна, теоретична і практична вагомість роботи. В дисертації побудовані дифузійні апроксимації в рівномірній метриці за ймовірністю випадкових процесів і полів з незалежними приростами, а також нормованих інтегралів від стаціонарних процесів зі слабкою залежністю. Одержані результати використані для знаходження оцінок швидкості збіжності в криволінійних межах стохастичних усереднених систем, випадкових процесів і полів з малою дифузією і процесів, підданих швидкоколивним випадковим діянням, до відповідних граничних процесів.

Одержані результати є новими. Вони можуть бути використані при розв'язанні різних задач в застосуваннях теорії ймовірностей і математичній статистиці.

Методика дослідження. В роботі використано метод одного ймовірнісного простору А.В.Скорохода та різні мартингальні методи теорії випадкових процесів і полів.

Публікації. За темою дисертації надруковано сім робіт.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались на XXII школі-колоквіумі з теорії імовірностей і математичної статистики (Бакуріані, 1988), на V Міжнародній Вільнюсській конференції з теорії ймовірностей і математичної статистики (1989), на I і III Донецьких конференціях, присвячених пам'яті відомого математика Й.І.Гіхмана (1988, 1993), на спільному науковому семінарі відділу теорії ймовірностей і математичної статистики Інституту прикладної математики і механіки АН України та кафедри алгебри та теорії імовірностей Донецького державного університету.

Обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, трьох глав, списку літератури (62 назви) і викладена на 132 стор. машинописного тексту.

II. ЗМІСТ РОБОТИ.

У всупі проводиться огляд робіт, присвячених методу одного ймовірнісного простору та оцінюванню швидкості збіжності в граничних задачах і стисло викладено зміст роботи.

Перша глава складається з трьох параграфів. В ній розглянені питання дифузійних апроксимацій за ймовірністю випадкових процесів і полів.

В §1.1 встановлена нерівність типу нерівності Комлоша - Майора - Тушнаді для випадкового процесу $\xi_\varepsilon(t)=\sqrt{\varepsilon}\,\xi(t/\varepsilon)$, $t\in[0,1]$, де $\xi(t)$ - випадковий процес з незалежними приростами, скінченними стрибками, такий що

$$d\xi(t)=b(t)\,dw(t)+\int f(t,u)\,\tilde{\nu}(du,dt),\ \xi(0)=0,\ t\in[0,\infty),$$

ЛННБ України ім.В.Стефаника 3562 (V)

стандартний вінерівський процес $w(t)$ і пуассонівська міра $\nu(A,t)$ взаємно незалежні, $E\nu(A,t)=\pi(A)t$, $\tilde{\nu}(A,t)=$ $=\nu(A,t)-\pi(A)t$.

В другому параграфі аналогічний результат встановлений для випадкових полів з незалежними приростами, а в третьому - знайдені оцінки швидкості збіжності нормованих інтегралів від стаціонарних процесів зі слабкою залежністю до стандартного вінерівського процесу в рівномірній метриці за ймовірністю. Розглянені приклади застосування одержаних результатів.

Щоб охарактеризувати результати першої глави, наведемо одну з теорем.

Нехай $\xi(s,t)$ - випадкове поле з незалежними приростами

$$\xi(s,t)=\int_0^s\int_0^t b(u,v)\,w(du,dv)+\int_0^s\int_0^t\int_{\Theta} f(u,v,\theta)\,\tilde{\nu}(du,dv,d\theta),$$

де $s\geq 0$, $t\geq 0$, $w(s,t)$ - двопараметричне вінерівське поле, $\tilde{\nu}(ds,dt,d\theta)$ - центрована пуассонівська міра, $E\tilde{\nu}^2(ds,dt,d\theta)=\pi(d\theta)\,ds\,dt$. Тут $\pi(d\theta)$ - деяка σ - скінченна міра на $\Theta=R^1\setminus\{0\}$, w і $\tilde{\nu}$ незалежні між собою.

Покладемо $\xi_\varepsilon(s,t)=\sqrt{\varepsilon}\,\xi(s/\sqrt{\varepsilon},t/\sqrt{\varepsilon})$, $(s,t)\in D=[0,S]\times[0,T]$, $\varepsilon>0$ - малий параметр.

Теорема I.3. Припустимо, що виконуються умови:

1) $b(s,t)$, $f(s,t,\theta)$ обмежені для всіх $s\geq 0$, $t\geq 0$, $\theta\in\Theta$;

2) існує функція $\varphi(\varepsilon)$ така, що при $\varepsilon\to 0$ $\varphi(\varepsilon)\to\infty$, $\sqrt{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)\to 0$,

$$e^{-\varphi(\varepsilon)}\int_0^{S/\sqrt{\varepsilon}}\int_0^{T/\sqrt{\varepsilon}}\Big(b^2(u,v)+\int_{\Theta} f^2(u,v,\theta)\,\pi(d\theta)\Big)\,du\,dv\to 0;$$

3) знайдеться $0<\sigma^2<\infty$ таке, що рівномірно за $k=0,1,2,\ldots$ $l=0,1,2,\ldots$

$$\frac{1}{b^2} < D\xi((k,l)[k+1,l+1)] < b^2;$$

4) $\eta_\varepsilon(s,t)$ - гауссівське випадкове поле таке, що

$$\eta_\varepsilon(s,t)=\sqrt{\varepsilon}\int\limits_0^{S/\sqrt{\varepsilon}}\int\limits_0^{T/\sqrt{\varepsilon}}\Big(b^2(u,v)+\int\limits_{\Theta} f^2(u,v,\theta)\pi(d\theta)\Big)^{1/2}\widetilde{w}(du,dv),$$

де $\widetilde{w}(s,t)$ - вінерівське поле, що задається, взагалі кажучи, на іншому ймовірнісному просторі, ніж $w(s,t)$.

Тоді за $\eta_\varepsilon(s,t)$ можна побудувати випадкове поле $\widetilde{\xi}_\varepsilon(s,t)$, що має ті ж скінченновимірні розподіли, що й $\xi_\varepsilon(s,t)$, таке що

$$P\Big\{\sup_{(s,t)\in D}|\eta_\varepsilon(s,t)-\widetilde{\xi}_\varepsilon(s,t)|>3\sqrt{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)\Big\}\le$$

$$\le e^{-C_1\lambda\varphi(\varepsilon)}\Big(1+\lambda\int\limits_0^{\frac{S}{\sqrt{\varepsilon}}+1}\int\limits_0^{\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}}+1}\Big(b^2(u,v)+\int\limits_{\Theta} f^2(u,v,\theta)\pi(d\theta)\Big)du\,dv\Big)+$$

$$+C_2e^{-\varphi^2(\varepsilon)}\int\limits_0^{\frac{S}{\sqrt{\varepsilon}}+1}\int\limits_0^{\frac{T}{\sqrt{\varepsilon}}+1}\Big(b^2(u,v)+\int\limits_{\Theta} f^2(u,v,\theta)\pi(d\theta)\Big)du\,dv,$$

де C_1, C_2, λ - деякі додатні константи.

Друга глава дисертації присвячена одержанню граничних теорем для нормованих відхилень розв'язків вихідної стохастичної системи з малим параметром від розв'язку усередненої "детермінованої" системи в криволінійних межах.

В §2.1 одержана оцінка для ймовірності знаходження між двома межами флуктуацій розв'язку СДР

$$d\xi_\varepsilon(t)=\varepsilon(a(t,\xi_\varepsilon(t))+dw(t)),\ \xi_\varepsilon(0)=x_0,\ t\in[0,T/\varepsilon),$$

відносно усередненого.

В §2.2 досліджується ймовірність знаходження в криволінійних межах флуктуацій розв'язку стохастичного гіперболічного рівняння відносно усередненого рівняння. Знайдена оцінка швидкості збіжності до граничного розподілу.

В §2.3 результати перших двох параграфів першої глави застосовані до дослідження поведінки в криволінійних межах випадкових процесів і полів з незалежними приростами, що залежать від малого параметра та описують флуктуації в стохастичному принципі усереднення. Наведемо один з результатів цього параграфу.

Нехай випадкове поле $X_\varepsilon(s,t)$ є розв'язком рівняння

$$X_\varepsilon(s,t) = \alpha(s) + \beta(t) + \varepsilon \int_0^s\int_0^t a(u,v,X_\varepsilon(u,v))\,du\,dv +$$

$$+\varepsilon \int_0^s\int_0^t b(u,v)\,w(du,dv) + \varepsilon \int_0^s\int_0^t\int_{\Theta} f(u,v,\theta)\,\tilde{\nu}(du,dv,d\theta),$$

$$X_\varepsilon(s,0) = \alpha(s),\ X_\varepsilon(0,t) = \beta(t),\ \alpha(0) = \beta(0) = 0,\ 0 \le s \le \frac{S}{\sqrt{\varepsilon}},\ 0 \le t \le \frac{T}{\sqrt{\varepsilon}},$$

де функція $a(s,t,z)$ така, що $|a(s,t,z)| \le K_1(1+|z|)$, $a(s,t,z)$ та її похідні до другого порядку включно задовільняють умову Ліпшиця по z ;

$$\lim_{\substack{S\to\infty\\ T\to\infty}} \frac{1}{ST} \int_a^{a+S}\int_b^{b+T} a(u,v,z)\,du\,dv = a_0(z)$$

рівномірно по a , b , z .

Нехай $X_0(s,t)$ - розв'язок детермінованого диференціального рівняння гіперболічного типу

$$\frac{\partial^2 X_0(s,t)}{\partial s\,\partial t} = a_0(X_0(s,t)),\ X_0(s,0) = \alpha(s),\ X_0(0,t) = \beta(t).$$

Будемо також припускати, що при $\varepsilon \to 0$

$$\sup_{(s,t)\in D} \left| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^s\int_0^t [a(\frac{u}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{v}{\sqrt{\varepsilon}}, X_0(u,v)) - a_0(X_0(u,v))]\,du\,dv \right| \to 0,$$

$$\sup_{(s,t)\in D} \left| \int_0^s\int_0^t [\frac{\partial}{\partial z} a(\frac{u}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{v}{\sqrt{\varepsilon}}, X_0(u,v)) - G(X_0(u,v))]\,du\,dv \right| \to 0,$$

$$\left| \frac{1}{N^2} \int_a^{a+N}\int_b^{b+N} (\frac{\partial}{\partial z} a(u,v,z) - G(z))\,du\,dv \right| \le \frac{K_2}{N^{1+r}},$$

$r>0$, стала K_2 не залежить від a, b, N; $f_i(s,t)$, $i=\overline{1,2}$ – невипадкові функції такі, що

$$\int_0^S\int_0^T \left| \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (G(X_0(u,v)) f_i(u,v) - \frac{\partial^2 f_i(u,v)}{\partial u \partial v}) \right| du\,dv \le A_{i1},$$

$$\int_0^S \left| \frac{\partial}{\partial u} (G(X_0(u,T)) f_i(u,T) - \frac{\partial^2 f_i(u,v)}{\partial u \partial v} \Big|_{v=T}) \right| du \le A_{i2},$$

$$\int_0^T \left| \frac{\partial}{\partial v} (G(X_0(S,v)) f_i(S,v) - \frac{\partial^2 f_i(u,v)}{\partial u \partial v} \Big|_{u=S}) \right| dv \le A_{i3},$$

$$\left| G(X_0(S,T)) f_i(S,T) - \frac{\partial^2 f_i(u,v)}{\partial u \partial v} \Big|_{\substack{u=S\\ v=T}} \right| \le A_{i4},$$

де A_{ik}, $k=\overline{1,4}$ – константи.

Позначимо

$$Y_\varepsilon(s,t) = \frac{X_\varepsilon(\frac{s}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}) - X_0(s,t)}{\sqrt{\varepsilon}}$$

$$\xi_\varepsilon(s,t)=\int_0^s\int_0^t G(X_0(u,v))\,\xi_\varepsilon(u,v)\,du\,dv+$$

$$+\sqrt{\varepsilon}\int_0^{\frac{s}{\sqrt{\varepsilon}}}\int_0^{\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}}\Big(B^2(u,v)+\int_\Theta f^2(u,v,\theta)\,\pi(d\theta)\Big)^{1/2}\,w(du,dv).$$

Тоді при $\varepsilon\to 0$

$$|P\{f_1(s,t)<Y_\varepsilon(s,t)<f_2(s,t),\ (s,t)\in D\}-$$

$$-P\{f_1(s,t)<\xi_\varepsilon(s,t)<f_2(s,t),\ (s,t)\in D\}|\le\rho(\varepsilon)\to 0.$$

Знаходженню оцінки швидкості збіжності процесів усереднення в стохастичних системах, підданих слабко залежним випадковим діянням, до певного гаусівського процесу в криволінійних межах присвячений §2.4.

В третій главі дисертації одержані оцінки для ймовірності знаходження в криволінійних межах дифузійних процесів і полів з малою дифузією і процесів, підданих швидкоколивним випадковим діянням. Глава складається з трьох параграфів.

Одержаний в §3.I результат стверджує: випадковий дифузійний процес $\xi_\varepsilon(t)$, що є розв'язком СДР з малою дифузією, з відомою ймовірністю, близькою до одиниці, знаходиться в випадковій криволінійній смузі, межі якої описуються деякими невипадковими функціями, складеними з певним гауссівським процесом $\xi_1(t)$.

Центральним результатом §3.I є теорема 3.I. В R^1 розглядається випадковий процес $\xi_\varepsilon(t)$, що є єдиним розв'язком СДР

$$d\xi_\varepsilon(t) = a(t,\xi_\varepsilon(t))\,dt + \sqrt{\varepsilon}\,dw(t),\quad \xi_\varepsilon(0) = x,\quad t\in[0,T],$$

$\varepsilon > 0$ - малий параметр.

Відомо, що для $\xi_\varepsilon(t)$ має місце розклад

$$\xi_\varepsilon(t) = \xi_0(t) + \sqrt{\varepsilon}\,\xi_1(t) + \varepsilon R_2(\varepsilon, t),$$

де $\xi_0(t)$ і $\xi_1(t)$ відповідно розв'язки рівнянь

$$d\xi_0(t) = a(t,\xi_0(t))\,dt,\quad \xi_0(0) = x,$$

$$d\xi_1(t) = a'_x(t,\xi_0(t))\,\xi_1(t)\,dt + dw(t),\quad \xi_1(0) = 0,$$

тут $a'_x(t,\xi_0(t)) = a'_x(t,x)\big|_{x=\xi_0(t)}$.

Теорема 3.1. Нехай

1) $|a'_x(t,x)| \le \lambda_1$, $|a''_{xx}(t,x)| \le \lambda_2$ для всіх $x\in R^1$,

2) функція $f(t)$ така, що $f(0)=0$, $f'(t)>0$, $f''(t)>0$.

Тоді

$$P\{-f(t)\varepsilon^{1-\alpha} + \xi_0(t) + \sqrt{\varepsilon}\,\xi_1(t) < \xi_\varepsilon(t) <$$

$$< f(t)\varepsilon^{1-\alpha} + \xi_0(t) + \sqrt{\varepsilon}\,\xi_1(t),\ 0\le t\le T\} \ge$$

$$\ge 1 - \frac{2\varepsilon^{\alpha/2}}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{1}{\lambda_2}\int_0^T f'(t)\,e^{-2\lambda_1 T + 2\int_0^t a'_x(\tau,\xi_0(\tau))\,d\tau}\,dt\Big)^{1/2} \times$$

$$\times \exp\{-2\lambda_2/(\varepsilon^{\alpha}\int_0^T f'(t)\,e^{-2\lambda_1 T + 2\int_0^t a'_x(\tau,\xi_0(\tau))\,d\tau}\,dt)\},\quad 0<\alpha<1.$$

Цей результат застосований для одержання оцінки ймовірності знаходження в криволінійних межах процесу, що описує рівень запасів в сховищах.

В §3.2 знайдена оцінка ймовірності знаходження залишкового члена $R_{\varepsilon}(x,y)$ розкладу дифузійного поля з малою дифузією в зростаючих криволінійних межах.

В §3.3 досліджена поведінка в криволінійних межах процесів, підданих швидкоколивним випадковим діянням.

Основні результати надруклвано в роботах:

I. Воробьева И.Л. О вероятности нахождения решения стохастического дифференциального уравнения в криволинейных границах. Межвузовский научный сборник Марковские случайные процессы и их применения. 1988, изд-во Саратовского ун-та, с. I4-24.

2. Бондарев Б.В., Шурко И.Л. Диффузионная аппроксимация по вероятности случайных процессов с независимыми приращениями. ДАН УССР, сер.А, I988, №9, с. 3-5.

3. Шурко И.Л. О вероятности нахождения некоторых случайных процессов в подвижных криволинейных границах. Тезисы докладов V. Международной Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике, Вильнюс, 26 июня - I июля I988 г., т.4, с. 379-380.

4. Бондарев Б.В., Воробьева И.Л. Об усреднении в криволинейных границах стохастических гиперболических систем. Украинский математический журнал. I989, 4I, №6, с. 828-83I.

5. Бондарев Б.В., Шурко И.Л. О вероятности нахождения диффузионного процесса с малой диффузией в случайных подвижных границах. Кибернетика. I989, №3, с. I20-I2I.

6. Бондарев Б.В., Шурко И.Л. Диффузионная аппроксимация по вероятности случайных полей с независимыми приращениями. ДАН УССР, сер.А, 1990, №6, с. 7-9.

7. Шурко И.Л. Оценка скорости сходимости в принципе инвариантности для некоторых стационарных процессов. Тезисы докладов вузовской научной конференции профессорско-преподавательского состава по итогам научно-исследовательской работы: естественные науки, Донецк, ДонГУ, апрель 1993г., с. I8.

Підп. до друку 15.06.94.Формат 60 84/16.Папір друк.
Офс.друк.Ум.друк.арк.1,16.Ум.фарб.-відб.1,16.
Обл.-вид.арк.0,85.Тираж 100 пр.Зам.5.Ротапринт
ІПММ АН України,340114,Донецьк,вул.Р.Люксембург,
74.

7. Бурда Е.Э. Оценка комплексной погрешности и критерии устойчивости для некоторых стохастических процессов. Тезисы докладов заключительной научной конференции профессорско-преподавательского состава по итогам научно-исследовательской работы за 1989 год. Донецк, ДонГУ, апрель 1990г., с. 16.

Підп. до друку 15.06.94.Формат 60 84/16.Папір друк.
Офс.друк.Ум.друк.арк.1,16.Ум.фарб.-відб.1,16.
Облік.вид.арк.0,85.Тираж 100 пр.Зам.5.Ротапрінт
ІПММ АН України.340144,Донецьк,вул.Р.Люксембург,
74.

Ав 30.676