КИЕВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени ТАРАСА ШЕВЧЕНКО

На правах рукописи

АСРОРОВ ФАРХОД АНВАРОВИЧ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТОРОИДАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность 01.01.02 — Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев – 1994

Работа выполнена на кафедре [illegible] ных уравнений механико-математического [illegible] университета имени Тараса Шевченко.

Научный руководитель	–	доктор физико-математических наук, профессор Н. А. ПЕРЕСТЮК
Официальные оппоненты	–	доктор физико-математических наук, профессор Д. И. МАРТЫНЮК
		кандидат физико-математических наук, доцент О. В. ВЫШЕНСКАЯ
Ведущая организация	–	Институт математики НАН Украины

Защита состоится "26" 09 1994 г. в 14 часов на заседании специализированного совета К 01.01.14 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Киевском университете им. Тараса Шевченко по адресу, 252127, г. Киев, просп. академика Глушкова, 6, механико-математический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

Автореферат разослан "25" 08 1994 г.

Ученый секретарь специализированного совета — А. А. Курченко.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Математическими моделями многих задач физики, техники, биологии служат нелинейные дифференциальные уравнения, решения которых обладают некоторыми свойствами периодичности.

Одним из важнейших методов исследования таких уравнений есть метод интегральных многообразий.

Истоками теории интегральных многообразий являются труды А. Пуанкаре по качественной теории дифференциальных уравнений, А. М. Ляпунова по теории устойчивости движения и Н. Н. Боголюбова по развитию асимптотических методов нелинейной механики.

Следуя идеям Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова для различных классов уравнений, устанавливалось существование интегральных многообразий, исследовалась их гладкость, устойчивость, поведение траекторий как на многообразии, так и в его окрестности.

Эффективным в этом направлении оказался метод функции Грина, предложенный А. М. Самойленко для исследования инвариантных тороидальных многообразий. Все указанные выше вопросы согласно этому методу сравнительно просто решаются с помощью функции Грина.

Однако исследовались в основном автономные системы, хотя на практике довольно часто возникают системы неавтономных уравнений. Поэтому исследования интегральных множеств неавтономных систем с помощью функции Грина – Самойленко представляют весьма важный как научный, так и практический интерес.

Цель работы. Исследование интегральных множеств нелинейных дифференциальных уравнений. Получение необходимых, а также достаточных условий их существования, исследования их устойчивости и поведения решений в их окрестности.

Методы исследования. В работе используются идеи метода интегральных многообразий, метода малого параметра, метода функции Грина – Самойленко.

Научная новизна работы:

– установлены необходимые условия существования интегральных тороидальных множеств систем неавтономных дифференциальных уравнений;

– построена функция Грина – Самойленко для задачи об интегральных множествах системы дифференциальных уравнений и изучены ее свойства;

– в терминах функции Грина – Самойленко получены достаточные условия существования интегральных множеств систем дифференциальных уравнений;

– исследован вопрос о существовании асимптотически устойчивых интегральных тороидальных множеств систем дифференциальных уравнений;

– исследовано поведение решений системы в окрестности интегрального множества.

Практическая значимость работы. Полученные в диссертации результаты могут быть применены для исследования реальных колебательных процессов, возникающих во многих практических задачах.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на семинарах кафедры интегральных и дифференциальных уравнений механико-математического факультета Киевского университета, на конференциях "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики — вторые боголюбовские чтения" (г. Киев, 1993 г.), "Моделирование и исследование устойчивости систем" (г. Киев, 1993 г.), на Всеукраинской конференции молодых ученых в Киевском университете им. Тараса Шевченко (г. Киев, 1994 г.), а также опубликованы в работах [3–6].

Публикации. По теме диссертации опубликовано пять работ, в которых отражено ее основное содержание.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и содержит 97 страниц машинописного текста. Библиографический список включает 111 наименований литературных источников.

Содержание работы

Во введении приводится краткий обзор работ по теме диссертации, обоснована актуальность проблемы, сформулирована цель исследования, кратко изложены основные научные положения и содержание работы по главам, а также перечислены основные результаты работы.

В первой главе диссертации исследуются необходимые условия существования интегрального тороидального множества для системы уравнений вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = P(t,\varphi)x + f(t,\varphi). \tag{1}$$

В §1 вводится пространство $C(R \times \mathcal{T}_m)$ функций $f(t,\varphi) = (f_1(t,\varphi), \ldots, f_n(t,\varphi))$ – переменных $t \in R$ и $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, принимающих значения в R^n, равномерно при $t \in R$ непрерывных, ограниченных, периодических по каждой из переменных φ_α $(\alpha = 1, \ldots, m)$ с периодом 2π и таких, что существует конечное среднее значение

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_t^{t+T} \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_0^{2\pi} \ldots \int\limits_0^{2\pi} f(s,\varphi)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_m\, ds = \bar{f}$$

равномерно относительно $t \in R$.

Это пространство превращается в полное нормированное введением нормы

$$\|f\|_0 = \sup_{t\in R} \max_{\varphi\in\mathcal{T}_m} \|f(t,\varphi)\|,$$

где

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |f_i|^2$$

— евклидова норма $f(t,\varphi)$ в пространстве R^n.

Далее, с помощью тригонометрических по φ полиномов $P(t,\varphi)$ из $C(R \times \mathcal{T}_m)$, аналогично [87], строится цепочка гильбертовых пространств

$$H(R \times \mathcal{T}_m) = H^0(R \times \mathcal{T}_m) \supset H^1(R \times \mathcal{T}_m) \supset \ldots$$

$$\ldots \supset H^r(R \times \mathcal{T}_m) \supset \ldots \supset H^\infty(R \times \mathcal{T}_m),$$

где $H^\infty(R \times \mathcal{T}_m) = \bigcap_{r=0}^{\infty} H^r(R \times \mathcal{T}_m)$.

Определение 1. *Множество точек (t, φ, x), определенное уравнением*

$$x = u(t,\varphi), \qquad t \in R, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m, \tag{2}$$

будем называть интегральным множеством системы (1), если для любого решения $\varphi_t(\tau,\varphi)$ первого уравнения $x = u(t, \varphi_t(\tau,\varphi))$ является решением системы

$$\frac{dx}{dt} = P(t, \varphi_t(\tau,\varphi))x + f(t, \varphi_t(\tau,\varphi)).$$

При условии непрерывной дифференцируемости $u(t,\varphi)$ вопросы существования интегральных множеств системы (1) связаны с разрешимостью следующего уравнения в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} a(t,\varphi) = P(t,\varphi)u + f(t,\varphi), \tag{3}$$

где $P(t,\varphi) = -b(t,\varphi)$.

В §§ 2, 3 приведены необходимые условия существования интегрального тороидального множества в терминах разрешимости уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} a(t,\varphi) = P(t,\varphi)u + f(t,\varphi).$$

Для этой цели рассмотрена однородная система уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = P(t,\varphi)x \tag{4}$$

и по ней построен оператор $L: \ H^1(R \times \mathcal{T}_m) \to H(R \times \mathcal{T}_m)$, положив

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu(t,\varphi)\frac{\partial u}{\partial \varphi_\nu} + b(t,\varphi)u,$$

2-4-4071

где $(a_1(t,\varphi), \dots, a_m(t,\varphi)) = a(t,\varphi)$, $b(t,\varphi) = -P(t,\varphi)$.

Для оператора L введен формально-сопряженный оператор $L^* : H^1(R \times T_m) \to H(R \times T_m)$, определяемый выражением

$$L^*u = -\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu(t,\varphi)\frac{\partial u}{\partial \varphi_\nu}\right) + (b^*(t,\varphi) - \mu(t,\varphi)E)u,$$

где $b^*(t,\varphi)$ — сопряженная к $b(t,\varphi)$ матрица, а

$$\mu(t,\varphi) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{\partial a_\nu}{\partial \varphi_\nu} = \operatorname{spur} \frac{\partial a(t,\varphi)}{\partial \varphi}.$$

По оператору L^*, аналогично оператору L, построена сопряженная к (4) система уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = -a(t,\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = [P^*(t,\varphi) + \mu(t,\varphi)]x. \tag{5}$$

В §2 доказана следующая лемма.

Лемма 3. *Для любых функций u, $v \in C'(R \times T_m)$ справедливо равенство*

$$(Lu,\ v)_0 = (u,\ L^*v)_0.$$

Используя ее, получено следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть система уравнений (1) имеет интегральное множество*

$$x = u(t,\varphi), \qquad t \in R, \quad \varphi \in T_m. \tag{6}$$

Тогда $u \in C'(R \times T_m)$ и $Lu(t,\varphi) = f(t,\varphi)$.

Следствием приведенных выше лемм является следующая теорема.

Теорема 1.2. *Для того чтобы система уравнений (1) имела интегральное множество, необходимо, чтобы выполнялось равенство*

$$(f, v)_0 = 0 \tag{7}$$

для любых функций v, определяющих интегральное множество $x = v(t, \varphi)$, $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, сопряженной системы уравнений (5).

Полученные в §2 результаты используются для доказательства необходимых условий существования интегральных множеств линейной системы с произвольной неоднородностью.

Имеет место следующая теорема §3.

Теорема 1.3. *Для того чтобы система уравнений (1) имела интегральное множество для произвольной функции $f \in C(R\times\mathcal{T}_m)$, необходимо, чтобы однородная система уравнений (4) не имела невырожденных интегральных множеств, а сопряженная система уравнений (5) не имела отличных от тривиального $x = 0$, $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, интегральных множеств.*

В §4 рассмотрены достаточные условия существования интегральных множеств линейных расширений неавтономных уравнений вида (1) с использованием функции Грина – Самойленко.

Рассматривается система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(t,\ \varphi_t(\tau, \varphi))x, \tag{8}$$

где $\varphi_t(\tau, \varphi)$ — решение, принимающее при $t = \tau$ значение φ, и по ней строится функция Грина – Самойленко $G(t, s, \varphi)$ следующего вида:

$$G(t,s,\varphi) = \begin{cases} \Omega_s^t(t,\varphi)C(s,\varphi_s(t,\varphi)), & s \le t, \\ -\Omega_s^t(t,\varphi)[E - C(s,\varphi_s(t,\varphi))], & s > t, \end{cases} \tag{9}$$

удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|G(t,s,\varphi)\|\, ds \le k < \infty \tag{10}$$

при всех $t \in R$ и $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Здесь $\Omega_s^t(t,\varphi)$ — матрицант системы уравнений (8).

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в системе уравнений (1) функции $a(t,\varphi)$, $f(t,\varphi)$ и $P(t,\varphi)$ непрерывные по $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, ограниченные при всех $t \in R$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, 2π-периодические по φ_ν, $\nu = 1,\dots,m$, а также функция $a(t,\varphi)$ удовлетворяет условию Липшица по φ равномерно относительно $t \in R$. Пусть также для системы (4) существует функция Грина – Самойленко $G(t,s,\varphi)$, удовлетворяющая неравенству (10). Тогда система уравнений (1) имеет интегральное множество*

$$x = u(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s,\varphi) f(s,\varphi_s(t,\varphi))\, ds, \qquad t \in R, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m,$$

причем

$$\sup_{t\in R} \max_{\varphi\in \mathcal{T}_m} \|u(t,\varphi)\| \le K \sup_{t\in R} \max_{\varphi\in \mathcal{T}_m} \|f(t,\varphi)\|.$$

С использованием теоремы 1 приведены условия асимптотической устойчивости интегрального множества системы (1). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Предположим, что система уравнений (1) удовлетворяет условиям теоремы 1. Пусть также матрицант системы (4) $\Omega_s^t(\tau,\varphi)$ удовлетворяет неравенству*

$$\|\Omega_s^t(\tau,\varphi)\| \le Ke^{-\gamma(t-s)}, \qquad \text{для} \quad t \ge s \in R.$$

Тогда система уравнений (4) имеет интегральное множество

$$x = u(t,\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{t} G(t,s,\varphi) f(s,\varphi_s(t,\varphi))\, ds, \qquad t \in R, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m,$$

и это множество является асимптотически устойчивым.

Во второй главе изложенные в главе 1 результаты существования интегральных множеств для линейных расширений используются для исследования интегральных множеств нелинейных систем уравнений вида

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi,x), \qquad \frac{dx}{dt} = F(t,\varphi,x), \tag{11}$$

правая часть которой определена и непрерывна по t, φ, x в области

$$\|x\| \le d, \qquad t \in R, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m, \tag{12}$$

и является периодической по φ_ν $(\nu = 1, \dots, m)$ с периодом 2π.

В §1 приведен один из процессов линеаризации, позволяющий отыскивать интегральную поверхность (6) системы (11). Для этого выделено из второго уравнения системы (11) "линейные" члены, записав эту систему уравнений в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi,x), \qquad \frac{dx}{dt} = P(t,\varphi,x) + f(t,\varphi), \tag{13}$$

$$f(t,\varphi) = F(t,\varphi,0),$$

$$P(t,\varphi,x) = \int\limits_0^1 \frac{\partial F(t,\varphi,\tau,x)}{\partial(\tau x)}\,d\tau.$$

Реализация приведенного процесса линеаризации требует выяснения условий, при которых система уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi) + a_1(t,\varphi),$$

$$\frac{dx}{dt} = (P(t,\varphi) + P_1(t,\varphi))x + f(t,\varphi) \tag{14}$$

имеет интегральное множество

$$x = u(t,\varphi), \qquad t \in R, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{15}$$

Определение 1. *Функцию Грина – Самойленко $G(t,s,\varphi)$ системы (4) будем называть грубой, если найдется постоянная $\delta > 0$ такая, что система уравнений*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi) + a_1(t,\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = P(t,\varphi)x \tag{16}$$

всякий раз, когда $a_1 \in C^1(R \times \mathcal{T}_m)$ и

$$|a_1|_1 \le \delta, \tag{17}$$

имеет функцию Грина – Самойленко $\bar{G}(t,s,\varphi)$, для которой

$$|\bar{G}(t,s,\varphi)f(t,\ \varphi_t(\tau,\varphi))|_1 \le Ke^{-\gamma|t-s|}|f|_1, \tag{18}$$

где f — произвольная функция из $C^1(R \times \mathcal{T}_m)$, $\varphi_t(\tau,\varphi)$ — решение первого из уравнений (16), K и γ — положительные постоянные, не зависящие от t, φ, δ и f.

Существование интегрального множества для грубой функции Грина – Самойленко обосновывает следующая лемма.

Лемма 1.2. *Пусть система уравнений (4) имеет грубую функцию Грина – Самойленко $G(t,s,\varphi)$. Тогда можно указать такое $\rho = \rho(\delta) > 0$, $\rho(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, что для любых $a_1 \in C^1(R \times \mathcal{T}_m)$, $P_1 \in C^1(R \times \mathcal{T}_m)$, удовлетворяющих условию*

$$|a_1|_1 + |P_1|_1 \le \rho, \tag{19}$$

и произвольной функции $f \in C^1(R \times \mathcal{T}_m)$ система уравнений (14) имеет интегральное множество (15), удовлетворяющее условию

$$|u|_1 \le K_1 |f|_1, \tag{20}$$

где K_1 — положительная постоянная, не зависящая от ρ и f.

В § 2 доказанные в § 1 леммы используются для установления существования интегрального множества системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(t,\varphi,x,\varepsilon), \\ \frac{dx}{dt} &= P(t,\varphi,x,\varepsilon)x + f(t,\varphi,\varepsilon), \end{aligned} \tag{21}$$

где $a(t,\varphi,x,\varepsilon)$, $P(t,\varphi,x,\varepsilon)$, $f(t,\varphi,\varepsilon)$ — периодические по φ_ν, $\nu = 1,\dots,m$, периода 2π функции, определенные и непрерывные по всем переменным $t, \varphi, x, \varepsilon$ в области

$$\|x\| \leq d, \qquad t \in R, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$$

и такие, что

$$f(t, \varphi, 0) = 0, \qquad t \in R, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m. \tag{22}$$

Условие (22) гарантирует существование тривиального интегрального множества

$$x = 0, \quad t \in R, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m \tag{23}$$

системы (22) при $\varepsilon = 0$.

Запишем уравнение в вариациях, соответствующее множеству (23). Оно имеет вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = a_0(t, \varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = P_0(t, \varphi)x, \tag{24}$$

где обозначено

$$a_0(t, \varphi) = a(t, \varphi, 0, 0), \qquad P_0(t, \varphi) = P(t, \varphi, 0, 0).$$

Имеет место следующий основной результат § 2.

Теорема 1. *Пусть функции a, P, f имеют непрерывные по φ, x, ε из области (12) частные производные. Предположим, что система (24) имеет грубую функцию Грина – Самойленко. Тогда можно указать достаточно малое ε_0 такое, что для любого $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ система уравнений (21) имеет интегральное множество*

$$x = u(t, \varphi, \varepsilon), \qquad t \in R, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m$$

с функций u, принадлежащей пространству $C^0(R \times T_m)$ и удовлетворяющей неравенству

$$|u|_{0,\mathrm{Lip}} \leq K|f|_1, \qquad (25)$$

где K — положительная постоянная, не зависящая от ε.

В заключительном параграфе приведены достаточные условия экспоненциальной устойчивости интегрального множества исследуемой системы (1.2).

Пользуясь возможностью, автор выражает сердечную благодарность научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Н. А. Перестюку за постановку задачи, постоянную поддержку и внимание к работе, а также за полезное обсуждение результатов.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. *Асроров Ф. А.* Существование интегральных множеств дифференциальных уравнений. – К., 1993. – 11 с. – Деп. в ГНТБ Украины; 02.07.93, N 1337-Ук93.
2. *Асроров Ф. А.* Пространства функций $C(R\times T_m)$ и $H(R\times T_m)$. Необходимые условия существования интегрального множества линейной системы с произвольной неоднородностью. – К., 1994. –13 с. – Деп. в ГНТБ Украины; 06.04.94, N 639-Ук94.
3. *Асроров Ф. А.* Необходимые условия существования интегрального множества линейной системы с произвольной неоднородностью. – К., 1994. – 11 с. – Деп. в ГНТБ Украины; 21.06.94, N 1216-Ук94.

4. *Асроров Ф. А., Перестюк Н. А.* Функция Грина – Самойленко и существование интегральных множеств линейных расширений неавтономных уравнений // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, N 8. – С. 1067–1071.

5. *Перестюк Н. А., Асроров Ф. А.* Функция Грина – Самойленко задачи об интегральных множествах линейного расширения дифференциальных уравнений // Конференция "Моделирование и исследование устойчивости систем". Тез. докл. – Киев: Киев. ун-т, 1993. – С. 17–18.

Подп. к печ. 16.09.94 Формат 60×84[1]/16.
Бумага тип. № 3 . Способ печати офсетный. Условн. печ. л. 0,93
Условн. кр.-отт. 104 . Уч.-изд. л. 10 .
Тираж 100 . Зак. № 4-4071.

Фирма «ВИПОЛ»
252151, г. Киев, ул. Волынская, 60.