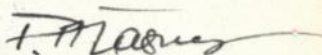


МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ  
ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ім. І.Франка

На правах рукопису

Таций Роман Мар'янович



ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ  
ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МІРАМИ

(01.01.02 — диференціальні рівняння)

Автореферат дисертації  
на здобуття наукового ступеня  
доктора фізико-математичних наук

Львів - 1994

АВ 30.772

Робота виконана в Державному університеті "Львівська політехніка"

ЛННБ України ім.В.Стефаника



00777722 (W)

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор Мартинюк Дмитро Іванович (Київ)

доктор фізико-математичних наук, професор Радино Яків Валентинович (Мінськ)

доктор фізико-математичних наук, професор Слюсарчук Василь Юхимович (Рівне)

Провідна установа – Інститут математики НАН України (Київ)

Захист відбудеться "15" 09 1994 р. о 15 год. 30 хв. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 04.04.01 при Львівському державному університеті ім. Івана Франка за адресою: 290001, м. Львів, вул. Університетська 1, ауд. 377.

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці Львівського держуніверситету (м. Львів, вул. Драгоманова, 5).

Автореферат розісланий "20" 07 1994 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради

Микитюк Я.В.

ЛННБ ім. В. Стефаника  
АН України

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Диференціальні рівняння з мірами виникли при створенні більш досконалих математичних моделей фізичних явищ, де природним чином поєднуються поняття дискретності і неперервності (дискретно-неперервні моделі). Характерною особливістю таких рівнянь є той факт, що в праві частини їх входять доданки, які містять добутки узагальнених функцій на розривні. Ці добутки не завжди існують в сенсі класичної теорії узагальнених функцій, в зв'язку з чим різні підходи до означення розв'язку можуть приводити до різних результатів.

Розглянемо, наприклад, задачу Коші

$$Y'(x) = C'(x) \cdot Y(x) + F'(x), \quad (1)$$

$$Y(x_0) = Y_0, \quad x_0 \in I, \quad (2)$$

де  $C(x) \in \mathcal{L}(I^{n \times n})$ ,  $F(x) \in \mathcal{L}(I^{n \times 1})$ ,  $C(x), F(x) \in BV_{loc}(I)$ , а диференціювання в (1) розуміється в узагальненому сенсі. Якщо  $C(x)$  і  $F(x) \in AC(I)$ , то задача (1), (2) еквівалентна інтегральному рівнянню

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x dC(t) \cdot Y(t) + F(x) - F(x_0) \quad (3)$$

з інтегралом Лебега. Ця еквівалентність зберігається також і в тому випадку, коли  $C(x) \in BV_{loc}^c(I)$ ,  $F(x) \in BV_{loc}(I)$ , причому тепер в (3) — класичний інтеграл Рімана-Стільтьєса.

В загальному випадку розриви матриці-функції  $C(x)$  обов'язково породжують розриви розв'язку  $Y(x)$  в одних і тих самих точках, в зв'язку з чим добуток матриці-міри  $C'(x)$  на функцію обмеженої варіації  $Y(x)$ , взагалі кажучи, неоднозначний. Відомо, що означення розв'язку задачі (1), (2) в такій ситуації реалізувалося в наступних трьох основних напрямках.

Перший підхід пов'язаний із спробами формалізації задачі (1), (2) в рамках теорії узагальнених функцій: спочатку на основі секвенціального підходу вводилося означення добутку міри на функцію обмеженої варіації, а потім на цій основі давалося означення розв'язку задачі (1), (2).

Другий підхід ґрунтується на тому, що під розв'язком вихідної задачі Коші розуміється розв'язок інтегрального рівняння (3), де інтеграл трактується в сенсі Лебега-Стільтьєса, Перрона-Стільтьєса, як неklasичний інтеграл Рімана-Стільтьєса, тощо. У всіх цих випадках, очевидно, стрибки розв'язку залежать від значень функції  $C(x)$  в точках розриву.

Третій підхід запропонований А.Ю.Левіним і базується на ідеї апроксимації елементів матриці-функції  $C(x) \in BV_{loc}(I)$  послідовністю гладких функцій.

В 40 - 50 роках в роботах І.С.Каца, М.Г.Крейна і Ф.Р.Гантмахера детально вивчаються крайові задачі (задачі на власні значення) для звичайних диференціальних рівнянь другого і четвертого порядків, що описують коливання струни і балки з дискретно-неперервним розподілом маси. Ці дослідження проводилися без застосування теорії узагальнених функцій, яка на той час ще не була створена. Проте, користуючись сучасною термінологією, ці рівняння можна записати у вигляді  $y'' + \lambda \cdot M'(x)y = 0$  і  $y^{(4)} - \lambda \cdot M'(x)y = 0$ , де  $M(x)$  - функція обмеженої варіації,  $M'(x)$  - її узагальнена похідна (міра), що дає основу роботи названих авторів в рамках першого і другого підходів вважати піонерськими.

Важливий внесок в розвиток теорії систем звичайних диференціальних рівнянь з узагальненими функціями в коефіцієнтах і правих частинах, а також пов'язаних з ними інтегральних систем, зроблено в роботах Ф.Аткінсона, Я.В.Радино, С.Т.Заваліщина, О.М.Сесекіна, Ю.В. Покорного, Є.А.Барбашина, А.Ф.Філіппова, Д.Веселера, Я.Курцвейля, Я.Лігези, С.Пандіта, С.Швабіка і інших авторів.

Слід відзначити, що в зв'язку з вивченням поведінки динамічних систем з імпульсною структурою успішно застосовується теорія диференціальних рівнянь з імпульсною дією, підвалини якої було закладено ще в 60-х роках. Ця теорія побудована і розвивається в роботах А.М.Самойленка, М.О.Перестюка, Д.Г.Мартинюка, В.Ю.Слюсарчука та багатьох інших представників і послідовників київської математичної школи.

**Мета роботи.** Виділення і вивчення класів систем звичайних диференціальних рівнянь з мірами, розв'язки яких не залежать від означення добутку міри на функцію обмеженої варіації: загальних питань, елементів якісної і спектральної теорій, наближених методів побудови розв'язків.

**Наукова новизна.** В дисертаційній роботі започатковано і розвинуто науковий напрямок в теорії узагальнених диференціальних рівнянь, що пов'язаний з новим коректним означенням розв'язку. В ній розв'язані наступні конкретні задачі, що визначають наукову новизну роботи.

Встановлено ефективні критерії однозначної визначеності (коректності) розв'язку в сенсі теорії узагальнених функцій лінійних і квазілінійних диференціальних систем з мірами, що явно виражаються через їх коефіцієнти і праві частини.

Розроблено основи теорії лінійних (зокрема, гамільтонових і періодичних), і квазілінійних диференціальних систем з мірами і еквівалентних їм інтегральних систем.

На основі розвитку концепції квазіпохідних та вивчення струк-

тури відповідного еволюційного оператора побудована лінійна теорія скалярних і матричних квазідиференціальних рівнянь з коефіцієнтами-мірами і правими частинами, узагальненими похідними вищих порядків від функцій локально обмеженої варіації.

Показано, що при вивченні елементів теорії стійкості таких систем може бути природним чином застосована класична схема першого методу Ляпунова.

Поширено результати Ф.Аткінсона по дослідженню крайових задач для диференціальних рівнянь із сумовними за Лебегом коефіцієнтами на узагальнені диференціальні рівняння з мірами. Це дало можливість для широкого класу реальних дискретно-неперервних систем отримати основні положення спектральної теорії: теореми про розширення в ряди за власними функціями, структуру та властивості аналога функції Гріна.

Запропоновано і апробовано наближені методи розв'язування дискретно-неперервних крайових задач, що ґрунтуються на апроксимації коефіцієнтів відповідних диференціальних рівнянь та на зведенні до еквівалентних систем завантажених інтегро-квазідиференціальних рівнянь типу Вольтерра-Стільтьєса.

**Методика дослідження.** В роботі використовуються методи теорії звичайних диференціальних рівнянь, теорії функцій комплексної змінної, теорії крайових задач, теорії інтеграла, теорії узагальнених функцій.

**Вірогідність результатів.** Всі результати дисертації сформульовані у вигляді теорем, лем та наслідків і повністю доведені.

**Теоретична і практична цінність.** Робота має теоретичне значення. Конструктивний характер результатів дозволяє застосовувати їх в прикладних задачах при дослідженні коливань і стійкості систем з дискретно-неперервним розподілом параметрів, в узагальнених задачах теплопровідності, в задачах оптимального управління імпульсними системами тощо. Деякі результати, ідеї і методи даної роботи вже використані в кандидатських дисертаціях (Стасюк М.Ф., 1989; Пахолок Б.Б., 1990; Кісілевич В.В., 1992).

**Апробація роботи.** Основні результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на: 1-й, 2-й, 3-й Всесоюзних конференціях "Новые подходы к решению дифференциальных уравнений", - 1987 р., 1989 р., 1991 р. - м. Дрогобич; Республіканських конференціях "Разрывные динамические системы", - 1989 р., м. Київ, - 1990 р., м. Івано-Франківськ, - 1991 р., м. Ужгород; IV Уральській регіональній конференції "Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения", - 1989р., м. Уфа; Всеросійській школі-семінарі "Современные методы в теории краевых задач", - 1992 р., м. Воронеж; Всеросійській школі "Теория функций. Дифференциальные уравнения в математическом моделировании", - 1993 р., м. Воронеж; щорічних конференціях професорсько-викладацького складу

Львівської політехніки, 1980 - 1994 р.р.; Львівському об'єднаному миському семінарі з теорії диференціальних рівнянь, 1985 - 1994 р.р.; семінарі з теорії диференціальних рівнянь Чернівецького державного університету, 1990 р., м. Чернівці; семінарах з теорії диференціальних рівнянь Інституту математики АН України, 1991 р., 1994 р., м. Київ; семінарі кафедри функціонального аналізу Білоруського державного університету, 1993 р., м. Мінськ; Всеукраїнській науковій конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" - 1994 р., м. Дрогобич; засіданні Львівського математичного товариства, 1994 р., м. Львів.

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1 - 27]. Спільні роботи, крім [15], написані з учнями дисертанта.

**Структура і обсяг роботи.** Дисертація складається із вступу, шести розділів, висновків і списку літератури, що містить 181 найменування. Обсяг роботи — 269 сторінок машинописного тексту.

### ЗМІСТ РОБОТИ

В роботі прийняті наступні позначення і означення.

1.  $I$  — відкритий інтервал дійсної осі  $R$ .
2.  $\mathcal{L}(I^{l \times k})$  — простір  $l \times k$  матриць-функцій, що визначені на  $I$ .
3.  $|A|$  — норма матриці  $A \in \mathcal{L}(I^{l \times k})$  визначається як сума модулів всіх її елементів  $a_{ij}$ :

$$|A| = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k |a_{ij}|.$$

4.  $C^k(I)$  — простір  $k$ -разів неперервно диференційовних на  $I$  функцій.
5.  $AC(I)$  — простір локально абсолютно неперервних на  $I$  функцій.
6.  $L(I)$  — простір сумовних за Лебегом на  $I$  функцій.
7.  $L_2(I)$  — простір квадратично сумовних на  $I$  функцій.
8.  $BV[a; b]$  — простір функцій обмеженої на компакт  $[a; b]$  варіації.
9.  $BV^+[a; b]$  — простір неперервних справа функцій обмеженої на  $[a; b]$  варіації.
10.  $BV_{loc}(I)$  — простір функцій локально обмеженої на  $I$  варіації.
11.  $BV_{loc}^c(I)$  — простір неперервних функцій локально обмеженої на  $I$  варіації.
12.  $BV_{loc}^+(I)$  — простір неперервних справа функцій локально обмеженої на  $I$  варіації.
13.  $D_f$  — простір фінітних на  $I$  функцій.

14.  $D_j^0$  — простір неперервних фінітних на  $\dot{I}$  функцій.  
 15.  $f * g$  — згортка узагальнених функцій  $f(x)$  і  $g(x)$ .  
 16.  $V_a^b A(x)$  — повна варіація матриці-функції  $A(x) \in \mathcal{L}(\dot{I}^{l \times k})$  на  $[a; b]$ , що визначається як сума повних варіацій всіх її елементів  $a_{ij}(x)$ :

$$V_a^b A(x) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^k V_a^b a_{ij}(x).$$

У випадку напівнескінченного інтервала вважається, що  $A(x)$  має обмежену варіацію на  $[a; \infty)$ , якщо  $A(x)$  має обмежену варіацію на довільному компактні  $[a; b] \subset [a; \infty)$  і повні варіації  $V_a^b A(x)$  обмежені в їх сукупності, тобто

$$V_a^\infty A(x) = \sup_{b \geq a} V_a^b A(x) < \infty.$$

17.  $\Delta f(x) = f(x+0) - f(x-0)$  стрибок функції  $f(x) \in BV_{loc}(\dot{I})$  в точці  $x \in \dot{I}$ .  
 18.  $\Omega BV_{loc}^+(\dot{I})$  клас неперервних справа  $\omega$ -періодичних функцій локально обмеженої на  $\dot{I}$  варіації.

У вступі обґрунтовується актуальність теми дослідження, визначається мета роботи, подається огляд робіт, що ідейно близькі до теми дисертації, зроблено короткий аналіз отриманих результатів.

## **Розділ 1. НЕКЛАСИЧНИЙ ІНТЕГРАЛ РІМАНА-СТІЛЬТЬЄСА І МАТРИЧНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ**

Розділ присвячено вивченню властивостей неklasичного інтеграла Рімана-Стільтьєса та пов'язаних з ним лінійних матричних інтегральних рівнянь.

§1 носить допоміжний характер. В ньому обговорюється питання про добуток міри на функцію локально обмеженої варіації. Нехай матриці-функції  $f(x), g(x) \in BV_{loc}(\dot{I})$ ,  $\delta_n$  — деяка  $\delta$ -послідовність,  $\varphi(x) \in D_j$ . Тоді, згідно із секвенціальним підходом, добуток  $g'(x) \cdot f(x)$  визначається як слабка границя  $g'(x) \cdot f(x) \stackrel{\text{df}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} ((g'(x) * \delta_n) \cdot (f(x) * \delta_n), \varphi)$ . В загальному випадку (без додаткових умов на функції  $f$  і  $g$ ) цей добуток не існує, тобто залежить від вибору послідовності  $\delta_n$ .

**Лема 1.2.** Якщо  $f(x), g(x) \in BV_{loc}(\dot{I})$ , то добуток  $g' \cdot f$  існує на  $\dot{I}$  тоді й тільки тоді, коли

$$\Delta g(x) \cdot \Delta f(x) = 0 \quad \forall x \in \dot{I} \quad (4)$$

**Означення 1.2.** Якщо використовується умова (4), то добуток  $g' \cdot f$  називатимемо коректним.

В §2 дано означення неklasичного матричного інтеграла Рімана-Стільтьєса

$$\int_a^b dg(x) \cdot f(x) \stackrel{\text{df}}{=} \int_a^b dg_c(x) \cdot f(x) + \sum_{a \leq x \leq b} \Delta g(x) \cdot f(x-0) \quad (5)$$

і вивчаються його властивості.

**Теорема 2.2.** Якщо  $J(x)$ ,  $g(x) \in BV_{loc}^+(I)$ , то  $h(x) = \int_a^x dg(t) \cdot f(t) \in BV_{loc}^+(I) \quad \forall x \in I$  неперервна в точках неперервності  $g(x)$ . Якщо  $x_0$  точка розриву  $g(x)$ , то  $\Delta h(x_0) = \Delta g(x_0) \cdot f(x_0 - 0)$ .

**Теорема 2.5.** Має місце формула інтегрування частинами

$$\int_a^b dg(x) \cdot f(x) + \int_a^b g(x) \cdot df(x) = (g(x) \cdot f(x))|_a^b - \sum_{a \leq x \leq b} \Delta g(x) \cdot \Delta f(x). \quad (6)$$

В §3 вивчається інтегральне рівняння

$$Y(x) = Y(a) + \int_a^x dC(t) \cdot Y(t), \quad a, x \in I. \quad (7)$$

де  $Y \in \mathcal{L}(I^{n \times 1})$ ,  $C \in \mathcal{L}(I^{n \times n})$ , причому  $C(x) \in BV_{loc}^+(I)$ . Це інтегральне рівняння має єдиний розв'язок  $Y(x)$  в класі  $BV_{loc}^+(I)$ , причому  $\Delta Y(x) = \Delta C(x) \cdot Y(x-0)$ . Тут досліджуються властивості еволюційного оператора рівняння (7), тобто матриці-функції  $B(x, s)$ , що по змінній  $x$  задовольняє рівняння (7) і умову  $B(s, s) = E$  ( $E$  — одинична  $n \times n$  матриця):

- 1)  $\forall x' \leq x'' \in [a; b] \subset I \quad B(x'', x') \cdot B(x', x'') = E$ ;
- 2)  $\forall x' \leq x'' \leq x''' \in [a; b] \subset I \quad B(x''', x'') \cdot B(x'', x') = B(x''', x')$ ;
- 3) Розв'язок рівняння (7) зображається у вигляді

$$Y(x) = B(x, a) \cdot Y(a). \quad (8)$$

Неоднорідне рівняння

$$Y(x) = \int_a^x dC(t) \cdot Y(t) + U(x), \quad U(a) = Y(a) \quad (9)$$

вивчається в §4.

**Теорема 4.1.** Розв'язок неоднорідного рівняння (9) має вигляд

$$Y(x) = B(x, a) \cdot Y(a) + \int_a^x B(x, t) \cdot dU(t) - \sum_{a \leq y \leq x} B(x, y) \cdot \Delta C(y) \cdot \Delta U(y). \quad (10)$$

В §5 вводиться поняття спряженого до (7) рівняння, тобто такого, яке задовольняє по змінній  $s$  еволюційний оператор  $B(x, s)$ :

$$B(x, s) = E + \int_s^x B(x, t) dC(t) - \sum_{s \leq y \leq x} B(x, s - 0) [E + \Delta C(y)]^{-1} [\Delta C(y)]^2 \quad (11)$$

Тут слід зауважити, що в (11) сума зникає, якщо  $[\Delta C(x)]^2 = 0$  в кожній точці розриву матриці-функції  $C(x)$  і тоді рівняння (11) набуває "класичного" вигляду.

## Розділ 2. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ СИСТЕМИ З МІРАМИ

З точки зору введення поняття розв'язку та вивчення загальних властивостей лінійних диференціальних систем з мірами цей розділ є центральним.

В §6 розглядається однорідна диференціальна система

$$Y'(x) = C'(x) \cdot Y(x) \quad (12)$$

$$Y(x_0) = Y_0, \quad x_0 \in I, \quad (13)$$

де  $C(x) \in BV_{loc}^+(I)$ .

**Означення 6.1.** Будемо говорити, що вектор-функція  $Y(x)$  належить до допустимого класу ( $Y(x) \in D_k$ ), якщо: 1)  $Y(x) \in BV_{loc}^+(I)$  і 2)  $\Delta C(x) \cdot \Delta Y(x) = 0 \quad \forall x \in I$ .

**Означення 6.2.** Під розв'язком рівняння (12) розуміємо вектор-функцію  $Y(x) \in D_k$ , що задовольняє його в узагальненому сенсі.

**Теорема 6.1.** В класі функцій  $Y(x) \in D_k$  початкова задача (12), (13) та інтегральне рівняння

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x dC(t) \cdot Y(t) \quad (14)$$

еквівалентні.

**Теорема 6.2.** Для існування розв'язку  $Y(x) \in D_k$  інтегрального рівняння (14) необхідно і досить виконання умови

$$[\Delta C(x)]^2 = 0 \quad \forall x \in I \quad (15)$$

**Означення 6.3.** При виконанні умови (15) лінійну однорідну диференціальну систему (12) будемо називати коректною.

Надалі в роботі розглядаються виключно коректні системи.

З теорем 6.1, 6.2 випливають наступні наслідки.

**Наслідок 1.** При виконанні умови (15) існує єдиний розв'язок  $Y(x) \in D_k$  початкової задачі (12), (13).

**Наслідок 2.** Стрибок довільного розв'язку  $Y(x)$  рівняння (12) виражається формулою

$$\Delta Y(x) = \Delta C(x) \cdot Y(x) \quad (16)$$

**Наслідок 3.** Множина всіх розв'язків рівняння (12) утворює  $n$ -вимірний векторний простір, база якого є фундаментальною системою розв'язків цього рівняння.

**Наслідок 4.** Існує еволюційний оператор  $B(x, s)$ , що є розв'язком початкової задачі

$$B'(x, s) = C'(x) \cdot B(x, s), \quad B(s, s) = E. \quad (17)$$

При цьому розв'язок задачі (12), (13) зображається у вигляді

$$Y(x) = B(x, x_0) \cdot Y_0. \quad (18)$$

Властивості еволюційного оператора і неоднорідне рівняння вивчаються в §7.

1.  $B(x, s) \cdot B(s, x) = E$ ;
2.  $B(x, s) \in BV_{loc}^+(I)$  як по  $x$ , так і по  $s$ ;
3.  $B(x, s) = [E + \Delta C(x)] \cdot B(x - 0, s)$ ;
4.  $B(x, s) = B(x, s - 0) \cdot [E - \Delta C(s)]$ .

Крім цього, має місце аналог формули Лівілія-Остроградського-Якобі:

$$\det B(x, x_0) = \prod_n \det [E + \Delta C(x_s)] \cdot \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \int_{x_0}^x dr_{ii}^c(t) \right\}. \quad (20)$$

де  $x_s \in \dot{I}$  — точки розриву матриці-функції  $C(x)$ ,  $r_{ii}^c(x)$  — діагональні елементи неперервної складової цієї матриці.

**Лема 7.1.**  $B^*(x, s)$  по змінній  $s \in$  розв'язком спряженої узагальненої диференціальної системи

$$Z' = -[C^*(s)]' \cdot Z. \quad (21)$$

**Наслідок.** Еволюційний оператор  $\Psi(x, s)$  спряженої диференціальної системи (21) задовольняє тотожність

$$\Psi(x, s) = [B^{-1}(x, s)]^*. \quad (22)$$

Далі в цьому параграфі розглядається задача (1), (2), де  $C(x)$ ,  $F(x) \in BV_{loc}^+(I)$ , а умова коректності (15) відповідної однорідної системи вважається виконаною. Розв'язок задачі (1), (2) природним чином шукається в класі  $D_k$ , але умова (15) сама по собі ще не гарантує його існування.

**Лема 7.2.** В класі функцій  $Y(x) \in D_k$  початкова задача (1), (2) і інтегральне рівняння (3) еквівалентні.

**Теорема 7.1.** При виконанні умови (15) для існування розв'язку  $Y(x) \in D_k$  інтегрального рівняння (3) необхідно і досить виконання умови

$$\Delta C(x) \cdot \Delta F(x) = 0 \quad \forall x \in \dot{I}. \quad (23)$$

**Наслідок.** При виконанні системи умов

$$[\Delta C(x)]^2 = 0, \quad \Delta C(x) \cdot \Delta F(x) = 0 \quad \forall x \in \dot{I} \quad (24)$$

початкова задача (1), (2) має єдиний розв'язок  $Y(x) \in D_k$ , що зображається у формі Коші

$$Y(x) = B(x, x_0) \cdot Y_0 + \int_{x_0}^x B(x, s) dF(s), \quad (25)$$

де  $B(x, s)$  — еволюційний оператор відповідної однорідної системи.

Очевидно, що при виконанні системи умов (24) диференціальну систему (1) теж доцільно називати коректною.

В §8 викладено основні положення теорії лінійної однорідної і неоднорідної коректних періодичних систем з мірами. Спочатку розглядається однорідна система

$$Y'(x) = C'(x) \cdot Y(x), \quad (26)$$

де  $Y(x), C(x) \in \mathcal{L}(\dot{I}^{n \times n})$ ,  $C(x) \in \Omega BV_{loc}^+(\dot{I})$ ; тобто  $C(x + \omega) = C(x)$ ,  $[0, \omega] \subset \dot{I}$ , причому  $[\Delta C(x)]^2 = 0 \forall x \in \dot{I}$ .

**Лема 8.1.** Довільна інтегральна матриця  $\Phi(x)$  системи (26) володіє властивостями:

- 1)  $\Phi(x + \omega) = \Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(x_0) \cdot \Phi(x_0 + \omega)$ ,  $x_0 \in [0, \omega]$ ;
- 2) якщо, зокрема,  $\Phi(x) \equiv B(x, 0)$ , де  $B(x, s)$  — еволюційний оператор рівняння (26), то  $\Phi(x + \omega) = \Phi(x) \cdot \Phi(\omega)$ .

**Означення 8.1.** Матриця  $B(\omega, 0)$  називається матрицею монодромії системи (26), а її власні значення  $\rho_i$  — мультиплікаторами.

**Теорема 8.2.** Для довільного мультиплікатора  $\rho$  існує нетривіальний розв'язок  $Y(x)$  системи (26) такий, що

$$Y(x + \omega) = \rho \cdot Y(x), \quad (27)$$

і навпаки, якщо для деякого нетривіального розв'язку цієї системи  $Y(x)$  має місце рівність (27), то  $\rho$  — мультиплікатор цієї системи.

**Наслідок.** Система (26) має  $\omega$ -періодичний розв'язок тоді й тільки тоді, коли хоча б один з її мультиплікаторів дорівнює одиниці.

Тут доводиться також аналог теореми Ляпунова про звідність до автономної системи.

**Теорема 8.3.** Існує взаємно-однозначна відповідність, що задається формулою  $Y(x) = P(x) \cdot Z(x)$  між розв'язком системи (26) і розв'язком автономної системи

$$Z'(x) = Q \cdot Z(x),$$

де  $e^{Q\omega} = B(\omega, 0)$ ,  $P(x) = B(x, 0) \cdot e^{-Qx}$ .

Для неоднорідної періодичної системи

$$Y'(x) = C'(x) \cdot Y(x) + F'(x), \quad (28)$$

де  $F(x) \in \Omega BV_{loc}^+(\dot{I})$  і  $\Delta C(x) \cdot \Delta F(x) = 0 \forall x \in \dot{I}$ , встановлена

**Теорема 8.4.** Якщо відповідна однорідна система (26) не має нетривіальних  $\omega$ -періодичних розв'язків (всі мультиплікатори  $\rho_i \neq 1$ ), то неоднорідна система (28) має єдиний  $\omega$ -періодичний розв'язок.

Резонансний випадок описує

**Теорема 8.5.** Нехай однорідна система

$$Y'(x) = C'(x) \cdot Y(x), \quad (29)$$

де  $Y(x) \in \mathcal{L}(\dot{I}^{n \times 1})$ ,  $C(x) \in \mathcal{L}(\dot{I}^{n \times n})$ ,  $C(x) \in \Omega BV_{loc}^+(\dot{I})$ ,  $[\Delta C(x)]^2 = 0 \forall x \in \dot{I}$ , має  $k$  лінійно незалежних  $\omega$ -періодичних розв'язків  $Y_i(x)$ ,  $i = \overline{1, k}$ ,  $k \leq n$ . Тоді

1) спряжена система

$$Z'(x) = -(C^*(x))' \cdot Z(x)$$

також має  $k$  лінійно незалежних розв'язків;

2) неоднорідна система

$$Y'(x) = C'(x) \cdot Y(x) + F'(x)$$

має  $\omega$ -періодичний розв'язок тоді й тільки тоді, коли виконуються умови ортогональності

$$\int_0^{\omega} Z_i^*(x) \cdot dF(x) = 0, \quad i = \overline{1, k}.$$

Відомо, що існування  $\omega$ -періодичних розв'язків лінійної диференціальної періодичної системи пов'язане з наявністю її обмежених розв'язків. Наступне твердження є поширенням теореми Массера на узагальнені диференціальні періодичні системи.

**Теорема 8.6.** Якщо лінійна неоднорідна  $\omega$ -періодична система (28) має обмежений розв'язок  $Y(x)$  ( $x \geq 0$ ), то для цієї системи існує  $\omega$ -періодичний розв'язок.

**Наслідок.** Якщо узагальнена коректна лінійна неоднорідна  $\omega$ -періодична система (28) не має  $\omega$ -періодичних розв'язків, то всі розв'язки цієї системи необмежені  $\forall x \in [0, \infty)$ .

Під узагальненою гамільтоновою системою, що розглядається в §9, розуміється диференціальна система

$$Y'(x) = I \cdot C'(x) \cdot Y(x) \quad (30)$$

з дійсною симетричною матрицею  $C(x) \in BV_{loc}^+(I)$ , де  $I$  — симплектична одиниця, а  $Y(x) \in \mathcal{L}(I^{2n \times 2n})$  і виконується умова коректності  $\Delta C(x) \cdot I \cdot \Delta C(x) = 0 \forall x \in I$ .

**Лема 9.1.** Для довільних розв'язків  $Y(x)$  і  $Z(x)$  рівняння (30) їх симплектичний добуток — сталий:  $Y^*(x) \cdot I \cdot Z(x) = P$ , де  $P$  — стала  $(2n \times 2n)$  матриця.

Крім того, має місце узагальнення теореми Ляпунова-Пуанкаре.

**Теорема 9.1.** Якщо  $C(x) \in \Omega BV_{loc}^+(I)$ ,  $B(x, s)$  — еволюційний оператор системи (30), то характеристичне рівняння  $\det[\lambda E - B(\omega, 0)] = 0$  зворотнє.

Слід зауважити, що зовнішня подібність лінійних диференціальних систем з мірами до аналогічних систем Каратеодорі є наслідком

виконання умов коректності, що дає можливість зберігати диференціальний формалізм.

### Розділ 3. КОНЦЕПЦІЯ КВАЗІПОХІДНИХ І УЗАГАЛЬНЕНІ КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

В цьому розділі показано, що концепція квазіпохідних природним чином вписується в теорію звичайних диференціальних рівнянь, в зв'язку з чим без обмеження загальності всі звичайні диференціальні вирази і відповідні їм диференціальні рівняння надалі називатимемо квазідиференціальними (КДВ і КДР відповідно).

В §10 розглянуто конкретні приклади КДР, звідки випливає неможливість постановки для всіх класів звичайних диференціальних рівнянь стандартної задачі Коші (в термінах розв'язку і звичайних похідних), а також дано деякі основні означення.

Нехай  $I_n[y]$  — КДВ  $n$ -го порядку і

$$I_n[y] = 0 \quad (31)$$

— відповідне КДР, що за допомогою вектора  $Y(x) = \text{colon}(y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$  зводиться до коректної диференціальної системи

$$Y'(x) = C'(x) \cdot Y(x), \quad [\Delta C(x)]^2 = 0 \quad \forall x \in I. \quad (32)$$

**Означення 10.1.** Функції  $y^{(i)}(x)$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  ( $y^{(0)} \stackrel{\text{df}}{=} y$ ) називатимемо квазіпохідними КДВ  $I_n[y]$ .

**Означення 10.2.** КДР (31) називатимемо коректним, якщо коректна відповідна йому система.

Наведені в цьому параграфі приклади показують, що невдалий підхід до вибору квазіпохідних може привести до некоректної системи і навпаки.

**Означення 10.3.** Під розв'язком КДР (31) будемо розуміти першу координату  $y(x)$  вектора  $Y(x)$  системи (32), що задовольняє його в узагальненому сенсі.

Розглянемо тепер спряжену до (32) систему

$$Z'(x) = -(C^*(x))' \cdot Z(x) \quad (33)$$

і позначимо  $Z(x) = \text{colon}(z^{(n-1)}(x), z^{(n-2)}(x), \dots, z^{(1)}(x), z(x))$ .

**Означення 10.4.** КДР

$$I_n^*[z] = 0, \quad (34)$$

якому в зв'язку із системою (33) зодовольняє остання координата  $z(x)$ , вектора  $Z(x)$ , називатимемо спряженим до КДР (31). При цьому функції  $z^{(i)}(x)$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  ( $z^{(0)}(x) \stackrel{\text{df}}{=} z$ ) називатимемо квазіпохідними КДВ  $L_n^*[z]$ .

Надалі  $y^{[j]}$  і  $z^{(i)}$  також називаються квазіпохідними в сенсі вихідного і спряженого КДР відповідно.

Початкова задача (задача Коші) для достатньо широкого класу КДР з мірами вивчається в §11. Розглядається КДВ

$$L_{mn}[y] \equiv \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} (a_{ij} y^{(n-i)})^{(m-j)}, \quad m, n = 1, 2, \dots, \quad (35)$$

де 1)  $a_{00}^{-1}(x)$  — локально обмежена і вимірна на  $\dot{I}$  функція; 2)  $a_{i0}(x)$ ,  $a_{0j}(x) \in L_2(\dot{I})$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ; 3)  $a_{ij}(x) = b'_{ij}(x)$ ,  $b_{ij}(x) \in BV_{loc}^+(\dot{I})$   $\forall i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$  — взагалі кажучи, комплекснозначні функції дійсної змінної  $x$ .

Структура КДВ (35) диктує доцільність введення наступних квазіпохідних.

**Означення 11.1.** Квазіпохідними функції  $\overline{y}(x)$ , що відповідають КДВ  $L_{mn}[y]$ , називають функції  $y^{[k]}(x)$ ,  $k = \overline{0, n+m}$ , що визначаються формулами:

$$y^{[k]} = y^{(k)}, \quad k = \overline{0, n-1}; \quad y^{[n]} = \sum_{i=0}^n a_{i0} y^{(n-i)}; \quad (36)$$

$$y^{[n+k]} = -(y^{[n+k-1]})' + \sum_{i=0}^n a_{ik} y^{(n-i)}, \quad k = \overline{1, m}.$$

При цьому  $L_{mn}[y] \equiv y^{[n+m]}$ .

**Теорема 11.1.** Існує єдиний розв'язок  $y(x)$  початкової задачі

$$L_{mn}[y] = 0, \quad y^{[i]}(x_0) = y_0^{[i]}, \quad i = \overline{0, n+m-1}, \quad x_0 \in \dot{I} \quad (37)$$

такий, що  $y^{[k]}(x) \in AC(\dot{I})$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ , а  $y^{[n+\nu]}(x) \in BV_{loc}^+(\dot{I})$   $\forall \nu = \overline{0, m-1}$  і в точках  $x_s \in \dot{I}$  розривів функцій  $b_{ij}(x)$  мають стрибки, що визначаються формулами

$$\Delta y^{[n+\nu]}(x_s) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta b_{n-i, \nu+1}(x_s) \cdot y^{[i]}(x_s), \quad \nu = \overline{0, m-1} \quad (38)$$

Ідея доведення цієї і подібних теорем ґрунтується на зведенні до відповідної коректної диференціальної системи першого порядку. Слід підкреслити ту властивість коректних КДР з мірами, що стрибки квазіпохідних однозначно диктуються структурою їх коефіцієнтів і це виражається формулами (38). Ці формули можна трактувати також як умови спряження при практичній побудові розв'язків задачі (37).

В §12 вивчаються властивості спряженого КДР.

**Означення 12.1.** Спряженим до КДР  $L_{mn}[y] = 0$  називається КДР

$$L_{mn}^*[y] \equiv \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} (a_{ij}^* y^{(m-j)})^{(n-i)} = 0. \quad (39)$$

**Означення 12.2.** Квазіпохідними виразу  $L_{mn}^*[y]$  (квазіпохідними в сенсі спряженого рівняння (39)) називають функції  $y^{(i)}(x)$ ,  $i = \overline{0, n+m}$ , що визначаються формулами:

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= y^{(k)}, \quad k = \overline{0, m-1}; & y^{(m)} &= - \sum_{j=0}^m a_{0j}^* y^{(m-j)}; \\ y^{(m+k)} &= -(y^{(m+k-1)})' - \sum_{j=0}^m a_{kj}^* y^{(m-j)}, & k &= \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (40)$$

При цьому, очевидно,  $y^{(m+n)} \equiv L_{mn}^*[y]$ .

**Теорема 12.1.** Існує єдиний розв'язок  $y(x)$  початкової задачі

$$L_{mn}^*[y] = 0, \quad y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}, \quad i = \overline{0, n+m-1}, \quad x_0 \in I \quad (41)$$

такий, що  $y^{(k)}(x) \in AC(I)$ ,  $k = \overline{0, m-1}$ , а  $y^{(m+\nu)}(x) \in BV_{loc}^+(I) \forall \nu = \overline{0, n-1}$  і в точках  $x_s \in I$  розривів функцій  $b_{ij}^*(x)$  мають стрибки, що виражаються формулами

$$\Delta y^{(m+\nu)}(x_s) = - \sum_{j=0}^{m-1} \Delta b_{\nu+1, m-j}^*(x_s) \cdot y^{(j)}(x_s), \quad \nu = \overline{0, n-1} \quad (42)$$

Лінійна (елементарна) теорія однорідних КДР з мірами будується в §13.

Нехай функції  $y_i(x)$ ,  $z_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m+n}$  є розв'язками КДР  $L_{mn}[y] = 0$  і  $L_{mn}^*[z] = 0$  відповідно. Складемо матриці функцій  $W(x) = \{y_i^{[j]}(x)\}$  і  $V(x) = \{z_i^{[j]}(x)\}$ ,  $i = \overline{1, m+n}$ ,  $j = \overline{0, m+n-1}$ . Визначники

$\det W(x)$  і  $\det V(x)$  називатимемо квазівронскіанами розв'язків  $y_i(x)$  і  $z_i(x)$ ,  $i = 1, m + n$ . Мають місце наступні аналоги формули Ліувілля-Остроградського.

**Теорема 13.1.** Для довільної точки  $x_0 \in I$  квазівронскіани  $\det W(x)$  і  $\det V(x)$  відповідно дорівнюють

$$\det W(x) = \det W(x_0) \cdot \exp \left\{ \int_{x_0}^x [a_{01}(t) - a_{10}(t)] a_{00}^{-1}(t) dt \right\},$$

$$\det V(x) = \det V(x_0) \cdot \exp \left\{ \int_{x_0}^x [a_{10}^*(t) - a_{01}^*(t)] (a_{00}^*(t))^{-1} dt \right\}. \quad (43)$$

Далі вводиться, як і в класичному випадку, поняття фундаментальної системи розв'язків і встановлюється структура загального розв'язку відповідних КДР.

Важливу роль в подальших дослідженнях грає структура еволюційного оператора, що відповідає даному КДР, яка для скалярних рівнянь встановлена в §14.

Нехай (31) — деяке КДР і (32) — відповідна йому коректна система. Для системи (32) існує еволюційний оператор, тобто матриця-функція  $B(x, s)$ , що по змінній  $x$  задовольняє цю систему і початкову умову  $B(s, s) = E$ ,  $s \in I$ .

**Означення 14.1.** Матрицю-функцію  $B(x, s)$  називатимемо еволюційним оператором, що відповідає КДР (31).

**Означення 14.2.** Функцією Коші КДР (31) називатимемо функцію двох змінних  $K(x, s)$ , що по змінній  $x$  є розв'язком цього рівняння і в точці  $x = s \in I$  задовольняє початкові умови:  $K^{[i]}(s, s) = 0$   $\forall i = 0, n - 2$ ,  $K^{[n-1]}(s, s) = 1$ .

**Означення 14.3.** Нехай  $f(x, s)$  — достатньо гладка комплекснозначна функція дійсних змінних  $x$  і  $s$ , що визначена на  $I \times I$ . Вираз  $f^{(j)[i]}(x, s)$  називатимемо змішаною квазіпохідною порядку  $(i + j)$ , якщо спочатку береться  $i$ -та квазіпохідна по  $x$  в сенсі вихідного КДР (31), а потім  $j$ -та квазіпохідна в сенсі спряженого КДР (34).

**Теорема 14.1.** Якщо  $K(x, s)$  — функція Коші КДР (31), то  $K^{[i][j]}(x, s) = K^{(j)[i]}(x, s)$ , тобто в цьому випадку результат не залежить від порядку змішаного квазидиференціювання.

**Теорема 14.2.** Еволюційний оператор  $B(x, s)$ , що відповідає КДР (31) має таку структуру

$$B(x, s) = \{q_{ij}(x, s)\}, \text{ де } q_{ij}(x, s) \equiv K^{[i-1][n-j]}(x, s), \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (44)$$

**Наслідок 1.** Функції  $K^{(i)}(x, s)$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ , утворюють нормальну в точці  $x = s$  фундаментальну систему розв'язків КДР (31).

**Наслідок 2.** Якщо  $D(x, s)$  — еволюційний оператор, що відповідає спряженому КДР (34), то

$$D(x, s) = \{p_{ij}(x, s)\}, \text{ де } p_{ij}(x, s) \equiv K^{*(n-i)[j-1]}(s, x), \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (45)$$

Останній результат дозволяє встановити тісний зв'язок між розв'язками вихідного і спряженого КДР.

**Означення 14.4.** Функцією Коші спряженого КДР (34) називатимемо функцію двох змінних  $R(x, s)$ , що по змінній  $x$  задовольняє це рівняння і початкові умови

$$R^{(i)}(s, s) = 0 \quad \forall i = \overline{0, n-2}; \quad R^{(n-1)}(s, s) = 1.$$

**Наслідок 3.** Функція  $K^*(s, x) \equiv R(x, s)$  та її послідовні квазіпохідні по  $s$   $R^{[i]}(x, s)$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  в сенсі вихідного КДР (31) утворюють нормальну в точці  $x = s$  фундаментальну систему розв'язків спряженого КДР (34).

Слід відзначити, що отримані в цьому параграфі результати не вимагають конкретного вигляду КДР, а є наслідком деяких загальних положень концепції квазіпохідних.

В §15 вивчається неоднорідне КДР

$$L_{mn}[y] \equiv \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} (a_{ij} y^{(n-i)})^{m-j} = \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^{i+1} f_i^{(i+1)}(x), \quad (46)$$

де  $f_i(x) \in BV_{loc}^+(\dot{I})$ , а умови на коефіцієнти  $a_{ij}(x)$  сформульовано вище.

**Теорема 15.1.** Якщо  $\nu \leq m-1$ , то КДР (46) коректне, тобто зводиться до коректної диференціальної системи першого порядку.

**Теорема 15.2.** Нехай  $g_i(x) \in BV_{loc}^+(\dot{I})$ . КДР

$$L_{mn}^*[y] = \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^{i+1} g_i^{(i+1)}(x)$$

коректне, якщо  $\nu \leq n-1$ .

В зв'язку з наявністю правої частини квазіпохідні  $y^{[i]}(x)$  для КДР (46) вводяться наступним чином:

$$\begin{aligned} y^{[k]} &= y^{(k)}, \quad k = \overline{0, n-1}; & y^{[n]} &= \sum_{i=0}^n a_{i0} y^{(n-i)}; \\ y^{[n+k]} &= (f_{m-k} - y^{[n+k-1]})' + \sum_{i=0}^n a_{ik} y^{(n-i)}, & k &= \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (47)$$

Початкову задачу для КДР (46) слід ставити в термінах квазіпохідних (47):

$$y^{[i]}(x_0) = y_0^{[i]}, \quad x_0 \in \dot{I}, \quad i = \overline{0, m+n-1}. \quad (48)$$

**Теорема 15.3.** Нехай  $K(x, s)$  — функція Коші однорідного КДР  $L_{mn}[y] = 0$ . Існує єдиний розв'язок задачі (46), (48), що зображається у вигляді

$$y(x) = \sum_{i=0}^{m+n-1} K^{(i)}(x, x_0) y_0^{[m+n-i-1]} + \sum_{i=0}^{\nu} \int_{x_0}^x K^{(i)}(x, s) df_i(s) \quad (49)$$

і такий, що  $y^{[k]}(x) \in AC(\dot{I})$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ , а  $y^{[n+k]}(x) \in BV_{loc}^+(\dot{I})$ ,  $k = \overline{0, m-1}$  і в точках розривів  $x_s$  функцій  $b_{ij}(x)$  і  $f_i(x)$  мають стрибки, що визначаються формулами

$$\Delta y^{[n+k-1]}(x_s) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta b_{n-i, k}(x_s) \cdot y^{[i]}(x_s) + \Delta f_{m-k}(x_s). \quad (50)$$

Важливим з прикладної точки зору є неоднорідне КДР

$$L_{mn}[y] = (-1)^{\nu+1} \delta^{(\nu)}(x - x_0), \quad \nu \leq m-1, \quad (51)$$

де  $\delta^{(\nu)}(x - x_0)$  —  $\nu$ -та узагальнена похідна від  $\delta$ -функції Дірака з носієм в точці  $x_0 \in \dot{I}$ .

**Теорема 15.4.** Розв'язок рівняння (51), що задовольняє нульові початкові умови, має вигляд  $y(x) = K^{(\nu)}(x, x_0) \eta(x - x_0)$ , де  $\eta(x - x_0)$  — зміщена функція Хевісайда.

Аналогічно в §16 вивчається звичайне диференціальне рівняння

$$L_n[y] \equiv y^{(n)} - \sum_{i=1}^n a_i(x) \cdot y^{(n-i)} = 0, \quad (52)$$

де  $a_i(x) = b_i'(x)$ ,  $b_1(x) \in BV_{loc}^c(\dot{I})$ ,  $b_i(x) \in BV_{loc}^+(\dot{I}) \forall i = \overline{2, n}$ . Очевидно, що в даному випадку  $y^{[k]} = y^{(k)}$ ,  $\forall k = \overline{0, n-1}$ , тобто роль квазіпохідних грають звичайні похідні. Як і в класичному випадку, для рівняння (52) при початкових умовах

$$y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}, \quad i = \overline{0, n-1}$$

однозначно розв'язальна задача Коші.

**Теорема 16.2.** Задача Коші (52), (53) має єдиний розв'язок  $y(x)$ , причому  $y^{(i)}(x) \in AC(\dot{I}) \forall i = \overline{0, n-2}$ , а  $y^{(n-1)}(x) \in BV_{loc}^+(\dot{I})$  і в точках розривів  $x_s$  функцій  $b_i(x)$  має стрибки, що визначаються формулою

$$\Delta y^{(n-1)}(x_s) = \sum_{i=0}^{n-2} \Delta b_{n-i}(x_s) \cdot y^{(i)}(x_s). \quad (54)$$

Спряжене до (52) рівняння має вигляд

$$L_n^*[y] \equiv (-1)^n y^{(n)} - \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} (a_i^*(x) \cdot y)^{(n-i)} = 0, \quad (55)$$

причому квазіпохідні  $y^{(i)}(x)$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  визначаються формулами

$$y^{(i)} = -a_i^* y - (y^{(i-1)})', \quad i = \overline{1, n}, \quad y^{(0)} \stackrel{\text{df}}{=} y. \quad (56)$$

Якщо тепер до (55) додати початкові умови

$$y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}, \quad x_0 \in \dot{I} \quad i = \overline{0, n-1} \quad (57)$$

то має місце аналог теореми 12.1.

**Теорема 16.3.** Початкова задача (56), (57) має єдиний розв'язок  $y(x) \in BV_{loc}^c(\dot{I})$ , а  $y^{(i)}(x) \in BV_{loc}^+(\dot{I}) \forall i = \overline{0, n-1}$  і в точках розривів  $x_s$  функцій  $b_i(x)$  мають стрибки, що визначаються формулами

$$\Delta y^{(i)}(x_s) = -\Delta b_{i+1}(x_s) \cdot y(x_s), \quad i = \overline{1, n-1} \quad (58)$$

Якщо  $b_1(x) \in AC(\dot{I})$ , то й  $y(x) \in AC(\dot{I})$ .

**Теорема 16.4.** Еволюційний оператор  $B(x, s)$ , що відповідає диференціальному рівнянню (52), має таку структуру:

$$B(x, s) = \{K^{(i-1)(n-j)}(x, s)\}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (59)$$

Тут  $K(x, s)$  — функція Коші, що визначається в класичному розумінні, а  $y^{(i)}$  — квазіпохідні (56).

**Наслідок 1.** Функція Коші і її послідовні квазіпохідні до  $(n-1)$ -го порядку включно в сенсі спряженого рівняння (55) утворюють нормальну в точці  $x = s$  фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (52).

**Наслідок 2.** Еволюційний оператор  $\Psi(x, s)$ , що відповідає спряженому рівнянню (55), має вигляд

$$\Psi(x, s) = \{K^{*(n-i)(j-1)}(x, s)\}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (60)$$

**Наслідок 3.** Функції  $K_s^{*(i)}(x, s)$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ , утворюють нормальну в точці  $x = s$  фундаментальну систему розв'язків спряженого рівняння (55).

Для неоднорідного рівняння

$$L_n[y] = f'(x), \quad f(x) \in BV_{loc}^+(I) \quad (61)$$

справедлива

**Теорема 16.5.** Існує єдиний розв'язок задачі Коші (61), (53), що зображається у вигляді

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_0^{(i)} K^{*(n-i-1)}(x, x_0) + \int_{x_0}^x K(x, s) df(s) \quad (62)$$

і такий, що  $y^{(i)}(x) \in AC(I)$ ,  $i = \overline{0, n-2}$ , а  $y^{(n-1)}(x) \in BV_{loc}^+(I)$  і в точках розривів  $x_s$  функцій  $b_i(x)$ ,  $f(x)$  має стрибки, що визначаються формулою

$$\Delta y^{(n-1)}(x_s) = \sum_{i=0}^{n-2} \Delta b_{n-i}(x_s) \cdot y^{(i)}(x_s) + \Delta f(x_s). \quad (63)$$

Аналогічно вивчається також неоднорідне рівняння, що відповідає (55).

В §17 запропоновано засіб, за допомогою якого КДР з коефіцієнтами — узагальненими похідними вище першого порядку від функцій з класу  $BV_{loc}^+(I)$  — вдається звести до КДР з мірами.

В рамках концепції квазіпохідних в §§18-21 за вже відомою схемою будується лінійна теорія узагальнених векторних і матричних КДР.

В прикладних задачах часто зустрічаються звичайні диференціальні рівняння з невідомою вектор-функцією і матричними коефіцієнтами. В роботі вивчається векторне КДР

$$L_{mn}[y] \equiv \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} (A_{ij} \cdot \bar{Y}^{(n-i)})^{(m-j)} = 0, \quad m, n = 1, 2, \dots, \quad (64)$$

де  $\tilde{Y}(x) \in \mathcal{L}(\tilde{I}^{l \times 1})$ ,  $A_{ij}(x) \in \mathcal{L}(\tilde{I}^{l \times l})$ . Вважається, що  $A_{ij}(x)$  — комплекснозначні матриці-функції дійсної змінної  $x$ , що визначені на  $\tilde{I}$ , причому  $A_{00}^{-1}$  — локально вимірна і обмежена на  $\tilde{I}$ ,  $A_{i0}(x)$ ,  $A_{0j}(x) \in L_2(\tilde{I}) \forall i = \overline{1, n}$ ,  $A_{ij}(x) = B'_{ij}(x) \forall i, j \geq 1$ ,  $B_{ij}(x) \in BV_{loc}^+(\tilde{I})$ .

Поруч з (64) розглядається матричне (операторне) КДР

$$L_{mn}[Y] = 0, \quad (65)$$

де тепер  $Y(x) \in \mathcal{L}(\tilde{I}^{l \times l})$ . КДР (65) називається асоційованим до КДР (64). Лінійну теорію асоційованого рівняння будувати простіше, оскільки вона в великій мірі аналогічна відповідній теорії для скалярних КДР. Якщо матриця-функція  $Y(x)$  — розв'язок (65),  $\tilde{C}$  — сталий вектор, то поклавши  $\tilde{Y}(x) = Y(x) \cdot \tilde{C}$ , отримуємо розв'язок КДР (64). Ця обставина диктує наступний план: базуючись на схемі, що викладена для скалярних КДР в §§10 - 17, побудувати спочатку аналог лінійної теорії для асоційованих рівнянь, а потім застосувати отримані результати для векторних КДР. Тут відзначено деякі основні моменти цього плану.

**Означення 18.1.** Квазіпохідними матриці-функції  $Y(x)$ , що відповідають КДВ  $L_{mn}[Y]$ , називаються матриці-функції  $Y^{[k]}(x)$ ,  $k = \overline{0, m+n}$ , що отримують з формул (36) шляхом заміни  $y \rightarrow Y$ .

**Означення 18.2.** Спряженим до КДР (64) називається КДР

$$L_{mn}^* \square \equiv \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} (A_{ij}^* \cdot \tilde{Y}^{(m-j)})^{(n-i)} = 0, \quad (66)$$

де  $A_{ij}^*(x)$  — ермітово спряжені до  $A_{ij}(x)$  матриці-функції.

**Означення 18.3.** Квазіпохідними матриці-функції  $Y(x)$ , що відповідають спряженому КДР (66), називаються матриці-функції  $Y^{[k]}(x)$ ,  $k = \overline{0, m+n-1}$ , що отримуються з формул (40) шляхом заміни  $y \rightarrow Y$ .

Як і в скалярному випадку, початкові задачі для матричних КДР слід ставити в термінах квазіпохідних вихідного або спряженого рівнянь:

$$L_{mn}[Y] = 0, \quad Y^{[k]}(x_0) = Y_0^{[k]}, \quad x_0 \in \tilde{I}, \quad k = \overline{0, m+n-1}, \quad (67)$$

$$L_{mn}^* \square = 0, \quad Y^{[k]}(x_0) = Y_0^{[k]}, \quad x_0 \in \tilde{I}, \quad k = \overline{0, m+n-1}, \quad (68)$$

Наступні твердження — очевидні узагальнення теорем 11.1 і 12.1.

**Теорема 18.1.** Існує єдиний розв'язок задачі (67) такий, що  $Y^{[k]}(x) \in AC(\tilde{I}) \forall k = \overline{0, n-1}$ , а  $Y^{[n+\nu]}(x) \in BV_{loc}^+(\tilde{I}) \forall \nu = \overline{0, m-1}$  і в

точках  $x_s \in \dot{I}$  розривів матриць-функцій  $B_{ij}(x)$  мають стрибки, що визначаються формулами

$$\Delta Y^{[n+\nu]}(x_s) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta B_{n-i, \nu+1}(x_s) \cdot Y^{[i]}(x_s), \quad \nu = \overline{0, m-1} \quad (69)$$

**Теорема 18.2.** Існує єдиний розв'язок  $Y(x)$  задачі (68) такий, що  $Y^{[k]}(x) \in AC(\dot{I}) \forall k = \overline{0, m-1}$ , а  $Y^{(m+\nu)}(x) \in BV_{loc}^+(I) \forall \nu = \overline{0, n-1}$  і в точках  $x_s \in \dot{I}$  розривів функцій  $B_{ij}^*(x)$  мають стрибки, що визначаються формулами

$$\Delta Y^{(m+\nu)}(x_s) = \sum_{i=0}^{m-1} \Delta B_{m-i, \nu+1}^*(x_s) \cdot Y^{[i]}(x_s), \quad \nu = \overline{0, n-1} \quad (70)$$

**Теорема 20.1.** Якщо матриця-функція  $P(x, s) \in \mathcal{L}(\dot{I}^{l \times l})$  по змінній  $x$  є розв'язком матричного КДР (65) таким, що  $P^{[i]}(s, s) = 0 \forall i = \overline{0, m+n-2}$ ,  $P^{[m+n-1]}(s, s) = E$ ,  $s \in \dot{I}$ , то еволюційний оператор  $\Phi(x, s)$ , що відповідає цьому рівнянню, є матрицею блочної структури і має вигляд

$$\Phi(x, s) = \{P^{[i-1]^* \{m+n-j\}^*}(x, s)\}, \quad i, j = \overline{1, m+n}, \quad (71)$$

де вираз  $P^{[q]^* \{r\}^*}$  означає, що над матрицею  $P(x, s)$  виконуються наступні операції (справа наліво): ермітове спряження, квазідиференціювання по  $s$  в сенсі КДР (66), знову спряження і квазідиференціювання по  $x$  в сенсі КДР (65).

**Наслідок 1.** Матриці-функції  $P^{*\{j\}^*}(x, s)$ ,  $j = \overline{0, m+n-1}$ , утворюють нормальну в точці  $x = s \in \dot{I}$  фундаментальну систему розв'язків КДР (65).

**Наслідок 2.** Матриці-функції  $P^{*\{i\}^*}(s, x)$ ,  $i = \overline{0, m+n-1}$ , де квазі-подвійні в сенсі КДР (65) беруться по змінній  $s$ , утворюють нормальну в точці  $x = s \in \dot{I}$  фундаментальну систему розв'язків КДР (66).

Векторним аналогом скалярного КДР (46) є неоднорідне рівняння

$$L_{mn}[\bar{Y}] = \sum_{b=0}^{m-1} (-1)^{i+1} \bar{F}_i^{(i+1)}(x), \quad (72)$$

де  $\bar{Y}(x)$ ,  $\bar{F}(x) \in \mathcal{L}(\dot{I}^{l \times 1})$ , причому  $\bar{F}(x) \in BV_{loc}^+(I)$ .

**Означення 21.1.** Квазіпохідними  $\bar{Y}^{[k]}(x)$ , що відповідають векторному КДР (72), називаються вектор-функції  $\bar{Y}^{[k]}(x)$ ,  $k = 0, m+n-1$ , що визначаються з формул (47) шляхом заміни  $y \rightarrow Y$ ,  $f_i \rightarrow \bar{F}_i$ .

**Теорема 21.1.** Нехай КДР (72) розглядається при початкових умовах

$$\bar{Y}^{[k]}(x_0) = \bar{Y}_0^{[k]}, \quad k = \overline{0, m+n-1}, \quad x_0 \in \dot{I}. \quad (73)$$

Тоді

- 1) КДР (72) коректне;
- 2) існує єдиний розв'язок  $\bar{Y}(x)$  задачі (72), (73), що зображається у вигляді

$$\bar{Y}(x) = \sum_{i=0}^{m+n-1} P^{*(i)*}(x, x_0) \cdot \bar{Y}_0^{[m+n-i-1]} + \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_0}^x P^{*(i)*}(x, s) \cdot d\bar{F}_i(s). \quad (74)$$

**Наслідок 1.** Якщо  $\bar{Y}_0^{[k]}$ ,  $k = \overline{0, m+n-1}$  — довільні сталі вектори з  $\mathcal{L}(I^{l \times 1})$ , то формула (74) дає загальний розв'язок векторного КДР (72).

**Наслідок 2.** Формула

$$\bar{Y}(x) = \sum_{i=0}^{m+n-1} P^{*(i)*}(x, x_0) \cdot \bar{Y}_0^{[m+n-i-1]} \quad (75)$$

при довільних сталих векторах  $\bar{Y}_0^{[k]}$ ,  $k = \overline{0, m+n-1}$ , дає загальний розв'язок однорідного КДР (64).

**Наслідок 3.** Формула

$$\bar{Y}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_0}^x P^{*(i)*}(x, s) \cdot d\bar{F}_i(s). \quad (76)$$

дає частинний розв'язок неоднорідного КДР (72) при нульових початкових умовах.

#### Розділ 4. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ УЗАГАЛЬНЕНИХ СИСТЕМ

Оскільки розв'язки коректних диференціальних систем — функції з класу  $BV_{loc}^+(\dot{I})$ , що приймають конкретні значення в кожній точці, то в цьому розділі мається на увазі стійкість за Ляпуновим. При

цьому інтервал  $I$  тут вважається напівнескінченим ( $I = [0, \infty)$ ), а незалежна змінна асоціюється з часом і позначається буквою  $t$ . Поряд з лінійними тут розглядаються квазілінійні диференціальні системи з мірами: встановлюються умови їх коректності, ставиться і доводиться теорема існування і єдиності розв'язку початкової задачі, теорема про неперервну залежність від початкових умов і правих частин, досліджується питання про стійкість за першим наближенням.

В якійсь теорії звичайних диференціальних рівнянь, як відомо, важливу роль відіграє фундаментальна лема Гронуолла-Беллмана. Один з варіантів її узагальнення наведено в §22.

**Теорема 22.2.** Нехай  $\rho(t), \sigma(t) \in BV_{loc}^+(I)$  і  $\rho(t) \geq 0$  на  $[a; b] \subset I$ . Якщо  $\forall t \in [a; b]$  виконується нерівність

$$\rho(t) \leq c_0 + c_1 \cdot \int_a^t \rho(\tau) |d\sigma(\tau)|, \quad (77)$$

де сталі  $c_0 > 0, c_1 > 0$ , то

$$\rho(t) \leq c_0 \cdot \exp\{c_1 \cdot V_a^t \sigma(\tau)\}, \quad (78)$$

В §§23 - 25 вивчаються деякі питання стійкості узагальнених лінійних систем. Як видно з попереднього, лінійна теорія узагальнених КДР нерозривно пов'язана з теорією відповідних їм коректних систем першого порядку. Ця обставина виправдовує наступне означення.

**Теорема 23.1.** КДР  $L_{mn}[X(t)] = 0$  називається стійким (нестійким), якщо стійка (нестійка) відповідна йому система

$$X'(t) = B'(t) \cdot X(t), \quad B(t) \in BV_{loc}^+(I). \quad (79)$$

**Теорема 23.2.** Якщо  $\Phi(t, t_0)$  — еволюційний оператор системи (79), то ця система тоді й тільки тоді: 1) стійка, якщо  $\Phi(t, t_0)$  обмежений при  $t \geq t_0$ ; 2) асимптотично стійка, якщо  $\Phi(t, t_0) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ; 3) нестійка, якщо  $\Phi(t, t_0) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**Теорема 23.3.** Довільна інтегральна матриця  $\Phi(t)$  системи (79) задовольняє двосторонню оцінку

$$|\Phi(t_0)| \cdot \exp\{-V_{t_0}^t B(\tau)\} \leq |\Phi(t)| \leq |\Phi(t_0)| \cdot \exp\{V_{t_0}^t B(\tau)\}. \quad (80)$$

**Теорема 23.4.** Нехай система

$$Y'(t) = C \cdot Y(t), \quad (81)$$

де стала матриця  $C \in \mathcal{L}(I^{k \times k})$ , стійка. Якщо  $V_0^\infty B(t) < \infty$ , то збурена система

$$\mathcal{X}'(t) = [C + B'(t)] \cdot \mathcal{X}(t) \quad (82)$$

теж стійка.

**Теорема 23.5.** Нехай система (81) асимптотично стійка. Тоді збурена система (82) теж асимптотично стійка, якщо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V_{t_0}' B(\tau)}{t - t_0} = 0. \quad (83)$$

**Теорема 23.6.** Характеристичний показник довільного розв'язку  $\mathcal{X}(t)$  системи (79) задовольняє подвійну нерівність

$$-\alpha \leq \chi[\mathcal{X}] \leq \beta, \text{ де } \alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} \cdot V_{t_0}' B(\tau) \right), \beta = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{t} \cdot V_{t_0}' B(\tau) \right).$$

Нехай тепер система (79)  $\omega$ -періодична, тобто  $B(t) \in \Omega BV_{loc}^+(\dot{I})$ ,  $= B(t)$ ,  $\omega > 0$  — період.

**Теорема 24.1.** Лінійна узагальнена періодична система (79) тоді й тільки тоді: 1) стійка, якщо всі її мультиплікатори  $\rho_i$  задовольняють умову  $|\rho_i| \leq 1$ , причому тим  $\rho_i$ , для яких  $|\rho_i| = 1$ , відповідають прості елементарні дільники, якщо їх розглядати як власні значення відповідної матриці монодромії; 2) асимптотично стійка, якщо  $\forall \rho_i |\rho_i| < 1$ .

Далі розглядається періодична гамільтонова система

$$\mathcal{X}'(t) = I B'(t) \cdot \mathcal{X}(t), \quad (84)$$

де  $I$  — симплектична одиниця, а симетрична матриця  $B(t) \in \Omega BV_{loc}^+(\dot{I})$ . З теореми 24.1 випливає, що періодична гамільтонова система не може бути асимптотично стійкою, але має місце

**Теорема 24.2.** Лінійна гамільтонова система (84) з  $\omega$ -періодичною матрицею  $B(t)$  стійка тоді й тільки тоді, коли всі її мультиплікатори  $\rho_i$  розташовані на одиничному колі  $|\rho_i| = 1$  і мають прості елементарні дільники.

Встановлено також умови, при яких КДР з дійсними коефіцієнтами зводиться до гамільтонової системи.

**Теорема 24.3.** Характеристичне рівняння, що відповідає КДР  $L_{mn}[X(t)] = 0$  з  $\omega$ -періодичними коефіцієнтами зворотне тоді й тільки тоді, коли  $A_{ij}(t) = A_{ji}^*(t) \forall i, j = \overline{0, n}$ .

Розглядається приклад скалярного узагальненого рівняння Мат'є, який показує, що наявність в коефіцієнтах рівняння дискретної складової може суттєво впливати на характер стійкості.

В класичній літературі добре відома інтегральна ознака стійкості Ляпунова для звичайного диференціального рівняння  $x''(t) + p(t)x = 0$  з невід'ємним  $\omega$ -періодичним кусково-неперервним коефіцієнтом  $p(t)$ . В §25 отримано узагальнення цього результату для КДР

$$(a_0 x')' + a_1 x = 0, \quad (85)$$

де  $a_1(t) = b'(t)$ ,  $a_0(t + \omega) = a_0(t)$ ,  $b(t + \omega) = b(t)$ , причому  $a_0^{-1}(t)$  вимірна, обмежена і додатна на  $[0, \omega]$ , а  $b(t)$  не спадає на цьому проміжку.

**Теорема 25.1.** Якщо виконується умова

$$0 < \int_0^{\omega} a_0^{-1}(s) ds \cdot [b(\omega) - b(0)] \leq 4, \quad (86)$$

то всі розв'язки  $x(t)$  КДР (85) разом з квазіпохідними  $x^{[1]}(t) \equiv a_0(t) \cdot x'(t)$  обмежені на  $\dot{I}$ .

В §26 вивчається квазілінійна система

$$X'(t) + \varphi(t, X) = C'(t) \cdot X(t) + F'(t), \quad (87)$$

де  $C(t), F(t) \in BV_{loc}^+(I)$ , а  $\varphi(t, X)$  — функція, що визначена в деякій області  $\dot{D}$  простору  $R_1 \times C^n$  із значеннями в  $n$ -вимірному комплексному просторі  $C^n$ .

**Означення 26.1.** Клас функцій  $X(t) \in BV_{loc}^+(I)$  називається допустимим, якщо  $\forall t \in I$  виконується умова  $\Delta C(t) \cdot \Delta X(t) = 0$  (клас  $D_k$ ).

**Означення 26.2.** Нехай  $\dot{I}' = (\alpha; \beta) \subset \dot{I}$  і нехай виконуються наступні умови: 1)  $(t, X(t)) \in D$  майже всюди; 2) функція  $\varphi(t, X(t)) \in L(\dot{I}')$ .

Під розв'язком рівняння (87) розуміється вектор-функція  $X(t) \in D_k$ , що задовольняє його в узагальненому сенсі.

Як і в лінійному випадку таке означення розв'язку дозволяє говорити про значення  $X(t)$  в конкретній точці:

$$X(t_0) = X_0, \quad t_0 \in \dot{I}'. \quad (88)$$

Задача (87), (88) і інтегральне рівняння

$$X(t) = X_0 - \int_{t_0}^t \varphi(\tau, X(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^t dC(\tau) \cdot X(\tau) + F(t) - F(t_0) \quad (89)$$

еквівалентні, якщо допустити існування його розв'язку серед функцій з  $D_k$ .

**Теорема 26.1.** Інтегральне рівняння (89) має розв'язок  $X(t) \in D_k$ , якщо для тих самих значень  $t$  виконується система рівностей

$$[\Delta C(t)]^2 = 0, \quad \Delta C(t) \cdot \Delta F(t) = 0. \quad (90)$$

Через  $BV^+(I, X_0, b)$  позначимо підпростір  $BV_{loc}^+(I)$  функцій  $p(t)$  на компактній  $I = [t_0 - a, t_0 + a] \subset \mathbb{R}$ , що задовольняють умову  $\sup |p(t) - X_0| \leq b$ ,  $b > 0$ .

**Теорема 26.2.** Нехай функція  $\varphi(t, X)$  неперервна в  $D$  по сукупності змінних  $(t, X)$  і задовольняє на довільній компактній підмножині з  $D$  умову Лібшиця по  $X$  у вигляді  $|\varphi(t, X_1) - \varphi(t, X_2)| \leq r(t) \cdot |X_1 - X_2|$ , де  $r(t) > 0$  і неперервна. Тоді  $\forall a > 0$ , для якого  $\forall I$ ,  $\forall p(t) \in BV^+(I, X_0, b)$

$$\int_{t_0-a}^{t_0+a} |\varphi(t, p(t))| dt + \int_{t_0-a}^{t_0+a} |dC(t)| \cdot |p(t)| + V_{t_0-a}^{t_0+a} F(t) \leq b$$

і

$$V_{t_0-a}^{t_0+a} C(t) + \int_{t_0-a}^{t_0+a} r(t) dt < 1$$

на інтервалі  $(t_0 - a', t_0 + a')$ ,  $a' < a$ , існує єдиний розв'язок початкової задачі (87), (88).

Поруч із системою (87), (88) розглядається початкова задача

$$Y'(t) + \varphi(t, Y) + \varphi_1(t, Y) = C'(t) \cdot Y(t) + C_1(t) \cdot Y(t) + F'(t) + F_1'(t).$$

$$Y(t_0) = Y_0.$$

**Теорема 26.3.** (про неперервну залежність розв'язків від початкових умов і правих частин). Нехай на проміжку  $[t_0, t_0 + a]$  функція  $\varphi(t, X)$  неперервна по сукупності аргументів  $(t, X)$  і задовольняє при  $X \in D$  умову Лібшиця по  $X$  рівномірно по  $t$   $|\varphi(t, X') - \varphi(t, X'')| \leq L \cdot |X' - X''|$ , і нехай також  $|\varphi(t, Y)| \leq \eta$ ,  $\sup_{t_0 \leq t \leq t_0+a} |Y(t)| = \mu$ ,  $|F_1(t) - F(t)| \leq \gamma$ ,  $V_{t_0}^{t_0+a} C_1(t) = \varepsilon$ ,  $|X_0 - Y_0| < \delta$ . Тоді

$$|X(t) - Y(t)| \leq [\delta + \mu \cdot \varepsilon + \eta \cdot (t - t_0) + 2\eta] \cdot \exp\{V_{t_0}^t C(\tau) + L \cdot (t - t_0)\}.$$

В §27 доводиться теорема про стійкість за першим наближенням для коректного рівняння

$$X'(t) = [C(t) + C_1(t)]' \cdot X(t) + \varphi(t, X). \quad (91)$$

де  $C(t), C_1(t) \in BV_{loc}^+(I)$ , причому при деякому  $v > 0$  має місце оцінка  $V_{t_0}^+ C_1(\tau) \leq V(t - t_0)$ , а вектор-функція  $\varphi(t, X)$  в області  $D: |X| \leq H, 0 \leq t < \infty$  задовольняє умову  $|\varphi(t, X)| \leq L \cdot |X|$ . Через  $\Phi(t, \tau)$  позначимо еволюційний оператор рівняння

$$X'(t) = C'(t) \cdot X(t) \quad (92)$$

і припустимо, що справедлива оцінка

$$|\Phi(t, \tau)| \leq \beta \cdot e^{-\alpha(t-\tau)},$$

де  $\alpha, \beta > 0$  і не залежать від  $\tau$ .

**Теорема 27.1.** Якщо виконуються вказані вище умови і якщо, крім цього, сталі  $v, \alpha, \beta, L$  зв'язані співвідношенням  $\lambda = \alpha - \beta \cdot (L + v) > 0$ , то справедлива оцінка

$$|X(t)| \leq \beta \cdot |X_0| \cdot \exp\{[\alpha + \beta \cdot (L + v)] \cdot (t - t_0)\}, \quad (93)$$

тобто нульовий розв'язок рівняння (91) експоненціально стійкий.

## Розділ 5. ДИСКРЕТНО НЕПЕРЕРВНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

Результати Ф.Аткінсона по дослідженню крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь із сумовними за Лебегом коефіцієнтами в цьому розділі поширюються на диференціальні системи з мірама і узагальнені КДР.

В §28 розглядається узагальнена однорідна диференціальна система

$$J \cdot Y' = [\lambda A'(x) + B'(x)]Y, \quad a \leq x \leq b, \quad (94)$$

де  $J, A, B$  — квадратні матриці, причому  $J$  — стала матриця,  $Y$  —  $k$ -вимірний вектор,  $\lambda$  — параметр. Вважається, що  $A(x)$  і  $B(x)$  — комплекснозначні матриці-функції дійсної змінної  $x$ ,  $A(x), B(x) \in BV^+[a; b]$ , а диференціювання в (94) розуміється в узагальненому сенсі. Крім того, вимагається, щоб  $J^* = -J, J^* \cdot J = E, A^* = A, B^* = B$ , де  $E$  — одинична матриця. На матриці  $A$  і  $B$ , очевидно, необхідно накласти умови коректності, які в даному випадку набувають вигляду  $\{J^{-1}[\lambda \Delta A(x) + \Delta B(x)]\}^2 = 0 \quad \forall x \in [a; b]$ , звідки, після прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях  $\lambda$ , отримується система умов

$$\begin{aligned} \Delta A(x) \cdot J \cdot \Delta B(x) &= 0, \quad \Delta B(x) \cdot J \cdot \Delta B(x) = 0, \\ \Delta A(x) \cdot J \cdot \Delta B(x) + \Delta B(x) \cdot J \cdot \Delta A(x) &= 0 \quad \forall x \in [a; b]. \end{aligned} \quad (95)$$

Вимагається також, щоб для довільного нетривіального розв'язку  $Y(x)$  системи (94) виконувалася умова  $\int_a^b Y^*(x) \cdot dA(x) \cdot Y(x) > 0$ .

В §29 робиться постановка крайової задачі. Нехай сталі квадратні матриці  $M$  і  $N$  такі, що

$$M^* \cdot J \cdot M = N^* \cdot J \cdot N, \quad (96)$$

причому з рівності  $M \cdot v = N \cdot v = 0$  ( $v$  — деякий сталий вектор) випливає  $v \equiv 0$ . Ставиться задача: знайти розв'язок рівняння (94), що для деякого  $v \neq 0$  задовольняє крайові умови

$$Y(a) = M \cdot v, \quad Y(b) = N \cdot v. \quad (97)$$

Для дослідження цієї задачі тут встановлюються деякі загальні факти.

**Теорема 29.1.** Еволюційний оператор диференціальної системи (94) є цілою аналітичною функцією параметра  $\lambda$ , порядок росту якої не перевищує одиниці.

**Теорема 29.2.** Власні значення  $\lambda_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  задачі (94), (97) всі дійсні і їх множина не має скінченної граничної точки, при цьому  $\forall \varepsilon > 0$

$$\sum_{\lambda_k \neq 0} |\lambda_k|^{-1-\varepsilon} < \infty.$$

Співвідношення ортогональності для власних функцій  $Y_n(x, \lambda_n)$

$$\int_a^b Y^*(x, \lambda_m) \cdot dA(x) \cdot Y(x, \lambda_n) = \delta_{mn}, \quad (98)$$

де  $\delta_{mn}$  — символ Кронекера, встановлюються (в тому числі і для кратних власних значень) в §30. Тут також отримано наступний критерій, корисний для подальших досліджень.

**Теорема 30.1.** Нехай матриці-функції  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$ ,  $C_3(x) \in BV^+[a; b]$  і такі, що їх можна формально перемножати. Для того, щоб

матричний інтеграл  $\int_a^b C_1(x) \cdot dC_2(x) \cdot C_3(x)$  був класичним інтегралом Рімана-Стільтьєса, необхідно і досить виконання системи умов  $\Delta C_1(x) \cdot \Delta C_2(x) = 0$ ,  $\Delta C_2(x) \cdot \Delta C_3(x) = 0 \forall x \in [a; b]$ .

В §31 вивчаються умови розв'язальності крайової задачі для неоднорідного рівняння

$$J \cdot Y' = [\lambda A'(x) + B'(x)]Y + F'(x) \quad (99)$$

з крайовими умовами (97). Тут  $F(x) \in BV^+[a; b]$ ,  $[\lambda \Delta A(x) + \Delta B(x)] \cdot \Delta F(x) = 0 \forall x \in [a; b]$ .

**Теорема 31.1.** Якщо  $\lambda$  не є власним значенням задачі (94), (97), то неодиорідна задача (99), (97) має єдиний розв'язок

$$Y(x) = \int_0^b K(x, t, \lambda) dF(t), \quad (100)$$

де ядро  $K(x, t, \lambda)$  має вигляд

$$K(x, t, \lambda) = \begin{cases} \mathcal{Y}(x, a, \lambda) M [\mathcal{Y}(b, a, \lambda) M - N]^{-1} \mathcal{Y}(b, t, \lambda) J, & x < t; \\ \mathcal{Y}(x, a, \lambda) M [\mathcal{Y}(b, a, \lambda) M - N]^{-1} \mathcal{Y}(b, t, \lambda) J - \\ - \mathcal{Y}(x, t, \lambda) J, & x > t. \end{cases} \quad (101)$$

Далі вводиться в розгляд характеристична функція  $F_{M, N} = \frac{1}{2} \{2M[\mathcal{Y}(b, a, \lambda) M - N]^{-1} \mathcal{Y}(b, a, \lambda) J - J\}$ , за допомогою якої при дійсному  $\lambda$  формула (101) набуває вигляду

$$K(x, t, \lambda) = \begin{cases} \mathcal{Y}(x, a, \lambda) [F_{M, N}(\lambda) + \frac{1}{2} J] \mathcal{Y}^*(t, a, \lambda), & x < t; \\ \mathcal{Y}(x, a, \lambda) [F_{M, N}(\lambda) - \frac{1}{2} J] \mathcal{Y}^*(t, a, \lambda), & x > t. \end{cases} \quad (102)$$

Ці формули показують, що особливості функцій  $K(x, t, \lambda)$  і  $F_{M, N}(\lambda)$  знаходяться в одних і тих самих точках дійсної осі і мають однаковий характер, в зв'язку з чим в цьому параграфі вивчаються деякі аналітичні властивості  $F_{M, N}(\lambda)$ . Зокрема, має місце

**Теорема 31.2.** Матриця-функція  $F_{M, N}(\lambda)$  ермітова при всіх дійсних  $\lambda$ , за винятком полюсів, а при комплексних  $\lambda$  задовольняє нерівність  $Im F_{M, N}(\lambda) \geq 0$  при  $Im \lambda \geq 0$ .

Звідси випливає, що  $F_{M, N}(\lambda)$  може мати лише прості полюси, які є власними значеннями задачі (94), (97).

В §32 вивчається важливе питання про розвинення в ряд деякої вектор-функції обмеженої варіації  $\varphi(x)$  за власними вектор-функціями  $Y_n(x)$

$$\varphi(x) \sim \sum_n c_n Y_n(x), \quad (103)$$

де коефіцієнти  $c_n$  визначаються формулами

$$c_n = \int_a^b Y_n^*(x) \cdot dA(x) \cdot \varphi(x). \quad (104)$$

Центральне місце при цьому займає

**Теорема 32.2.** Нехай вектор-функція  $\chi \in BV^+[a; b]$ , а вектор-функція  $\varphi(x)$  задовольняє диференціальне рівняння

$$\varphi' = B'(x)\varphi + A'(x)\chi \quad (105)$$

і граничні умови  $\varphi(a) = M\varepsilon$ ,  $\varphi(b) = N\varepsilon$  при деякому векторі  $\varepsilon$ .  $\forall \lambda > 0$ , позначимо  $\varphi_\lambda(x) = \varphi(x) - \sum_{|\lambda_r| < \lambda} c_r Y_r(x)$ , де коефіцієнти  $c_r$  визначаються формулами (104). Тоді

$$\int_a^b \varphi_\lambda^*(x) \cdot dA(x) \cdot \varphi_\lambda(x) \leq \lambda^{-2} \int_a^b \chi^*(x) \cdot dA(x) \cdot \chi(x). \quad (106)$$

Характер збіжності розвинення за власними функціями вивчається в §33.

**Теорема 33.2.** В припущеннях теореми 32.2 ряд в правій частині (103) збігається абсолютно і рівномірно на  $[a; b]$ .

Тут збіжність вважається як абсолютна і рівномірна збіжність  $k$  рядів, що утворені елементами вектора  $c_n Y_n(x)$ .

В §34 розглядається скалярне КДР довільного парного порядку з дійсними коефіцієнтами і (комплексним) параметром  $\lambda$ .

$$L_{2n}[y] \equiv \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} (b_{ij} y^{(n-i)})^{(n-j)} - \\ j - \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} (a_{ij} y^{(n-i)})^{(n-j)} = 0. \quad (107)$$

де 1)  $b_{00}^{-1}(x)$  — вимірна і обмежена на  $[a; b]$  функція; 2)  $\forall i, j = \overline{1, n}$   $b_{ij}(x) = \beta'_{ij}(x)$ ,  $a_{ij}(x) = \alpha'_{ij}(x)$ ,  $\beta_{ij}(x)$ ,  $\alpha_{ij}(x) \in BV^+[a; b]$ ; 3)  $\forall i, j \in \overline{1, n}$   $b_{i0}(x) \sim b_{0j}(x) \in L_2[a; b]$ ; 4)  $b_{ij}(x) = b_{ji}(x)$ ,  $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \forall i, j$ . Очевидно, що  $L_{2n}[y]$  — частинний випадок КДВ  $L_{m,n}[y]$ . КДР (107) розглядається разом з крайовими умовами

$$y^{[i]}(a) = y^{[i]}(b) = 0, \quad i = \overline{0, m-1}. \quad (108)$$

**Теорема 34.1.** При виконанні наведених вище умов на коефіцієнти  $b_{ij}(x)$  і  $a_{ij}(x)$  задача (107), (108) зводиться до задачі типу (94), (97).

На основі цього результату ряд властивостей задачі на власні значення (107), (108) отримуються тепер як наслідки з відповідних теорем попередніх параграфів.

**Наслідок 1.** Еволюційний оператор  $U(x, \alpha, \lambda)$ , що відповідає КДР (107), є цілою аналітичною функцією параметра  $\lambda$ , порядок росту якої не перевищує одиниці.

**Наслідок 2.** Власні значення  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  задачі (107), (108) всі дійсні і їх множина не має скінченної граничної точки, при цьому  $\forall \varepsilon > 0 \sum_{\lambda_k \neq 0} |\lambda_k|^{-1-\varepsilon} < \infty$ .

**Теорема 34.2.** Нормовані власні функції задачі (107), (108) задовольняють співвідношення ортогональності

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^b y_i^{[k]} \cdot y_j^{[m]} \cdot d\alpha_{n-m, n-k} = \delta_{ij}. \quad (109)$$

Узагальнена неоднорідна задача і структура функції Гріна вивчаються в §§35, 36, де розглядається неоднорідне КДР

$$L_{2n}[y] = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} F_i^{(i)}(x) \quad (110)$$

з крайовими умовами (108), де  $F_i(x) \in BV^+[a; b]$ .

**Теорема 35.2.** Якщо  $\lambda$  не є власним значенням задачі (107), (108), то неоднорідна задача (109), (108) має єдиний розв'язок  $y(x)$  такий, що  $y^{[i]}(x) \in AC[a; b] \forall i = \overline{0, n-1}$ , а  $y^{(n+i)}(x) \in BV^+[a; b] \ i = \overline{0, n-1}$ , причому

$$\Delta y^{[n+i-1]}(x_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta \gamma_{n-j, i}(x_n) y^{[j]}(x_n - 0) + \Delta F_{n-i}(x_n), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\gamma_{n-j, i}(x) = \beta_{n-j, i}(x) - \lambda \alpha_{n-j, i}(x);$$

цей розв'язок можна подати у вигляді

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \int_a^b \frac{\partial^i G(x, \xi, \lambda)}{\partial \xi^i} dF_i(\xi). \quad (111)$$

**Означення 35.1.** Функція  $G(x, \xi, \lambda)$  називається функцією Гріна задачі (110), (108).

**Теорема 36.1.** Мають місце наступні властивості:

- 1) функція Гріна  $G(x, \xi, \lambda)$  на кожному з інтервалів  $(a, \xi)$ ,  $(\xi, b)$  по змінній  $x$  задовольняє КДР (107);
- 2)  $G(x, \xi, \lambda)$  в точках  $a$  і  $b$  задовольняє крайові умови (108);
- 3)  $G(x, \xi, \lambda)$  є неперервною функцією двох змінних  $x, \xi$  і абсолютно неперервною по кожній з них при фіксованій іншій;
- 4) при  $x = \xi$   $G(x, \xi, \lambda)$  задовольняє умови стрибка

$$G^{[k]}(\xi + 0, \xi, \lambda) - G^{[k]}(\xi - 0, \xi, \lambda) = 0, \quad k = \overline{0, n-1};$$

$$G^{[n+m-1]}(\xi + 0, \xi, \lambda) - G^{[n+m-1]}(\xi - 0, \xi, \lambda) = P(\Delta\beta_{ij}, \Delta\alpha_{ij}),$$

$$m = \overline{1, n-1};$$

$$G^{[2n-1]}(\xi + 0, \xi, \lambda) - G^{[2n-1]}(\xi - 0, \xi, \lambda) = 1 + Q(\Delta\beta_{ij}, \Delta\alpha_{ij}),$$

де  $P(\Delta\beta_{ij}, \Delta\alpha_{ij}) = Q(\Delta\beta_{ij}, \Delta\alpha_{ij}) = 0$  при  $\Delta\alpha_{ij} = \Delta\beta_{ij} = 0$ ;

- 5)  $G(x, \xi, \lambda) = G(\xi, x, \lambda)$  при  $Im(\lambda) = 0$ .

В §37 формулюється і доводиться теорема про розв'язання за власними функціями.

**Теорема 37.1.** Нехай функції  $p^{(k)}(x)$ ,  $k = \overline{1, n}$  абсолютно неперервні на  $[a; b]$  і функція  $v(x)$  задовольняє неоднорідне КДР

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} (b_{ij} v^{(n-i)})^{(n-j)} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} (a_{ij} p^{(n-i)})^{(n-j)},$$

а також крайові умови  $v^{[i]}(a) = v^{[i]}(b) = 0$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ ;  $\forall \Lambda > 0$  позначимо  $v_{\Lambda}^{[i]}(x) = v^{[i]}(x) - \sum_{|\lambda_i| \leq \Lambda} c_r y_r^{[i]}(x)$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ , де коефіцієнти

$c_r$  задаються формулами

$$c_r = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^b v^{[i]} y_r^{[j]} d\alpha_{n-j, n-i}.$$

Тоді ряд Фур'є

$$v(x) \sim \sum_r c_r y_r(x), \quad (112)$$

а також ряди, що отримані його почленним диференціюванням до  $(n-1)$ -го порядку включно, наближають функцію  $v(x)$  в тому сенсі, що

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^b \psi_{\Lambda}^{[i]} \psi_{\Lambda}^{[j]} d\alpha_{n-j, n-i} \leq \Lambda^{-2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_a^b p^{(n-j-1)} p^{(n-i-1)} d\alpha_{n-i, n-j}.$$

(113)

Очевидно, що із співвідношення (113) випливає певне узагальнення поняття збіжності в середньоквадратичному.

**Теорема 37.2.** В умовах теореми 37.1 ряд в правій частині (112), а також ряди, що отримані його почленним диференціюванням до  $(n-1)$ -го порядку включно, збігаються на  $[a, b]$  абсолютно і рівномірно по  $x$ .

Аналогічні результати мають місце не лише для конкретних крайових умов, що розглядаються в §34. Допустимими крайовими умовами слід вважати такі, для яких при зведенні задачі для КДР до відповідної системи першого порядку існують матриці  $M$  і  $N$  такі, що володіють властивістю  $M^*JM = N^*JN$  для деякої косоермітової матриці  $J$ . Цьому питанню присвячено §38, де розглядається декілька варіантів крайових задач для КДР четвертого порядку, що моделюють коливання балки з дискретно-неперервним розподілом параметрів при різних умовах закріплення її кінців.

## Розділ 6. НАБЛИЖЕНІ СПОСОБИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Теореми типу Хеллі про граничний перехід під знаком скалярного інтеграла Рімана-Стільтьеса застосовуються в задачах апроксимації і, зокрема, при наближеному розв'язуванні інтегральних і диференціальних рівнянь. Аналогічні результати для матричного випадку отримано в §§39, 40.

**Теорема 39.1.** Нехай виконуються такі умови: 1) повні варіації матриць-функцій  $C_n(x)$  рівномірно обмежені по  $n$  на  $[a, b]$ , тобто  $V_a^b C_n(x) < V = \text{const}$ ; 2)  $C_n(x) \rightarrow C(x)$  рівномірно по  $x$  на  $[a, b]$ . Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b dC_n(x) \cdot Y(x) = \int_a^b dC(x) \cdot Y(x).$$

Розглянемо диференціальні системи

$$Y'(x) = C'(x) \cdot Y(x), \quad Y(x_0) = Y_0; \quad (114)$$

$$Y'_n(x) = C'_n(x) \cdot Y_n(x), \quad Y_n(x_0) = Y_0, \quad (115)$$

причому (115) отримано із (114) шляхом деякої апроксимації елементів матриць-функції обмеженої варіації  $C(x) \in BV^+[a, b]$  послідовністю  $C_n(x)$ :  $C_n(x) \rightarrow C(x)$ . Можна сподіватися, що розв'язок  $Y_n(x)$  задачі (115) в певному сенсі буде наближати розв'язок  $Y(x)$  вихідної задачі (114).

**Теорема 40.1.** В умовах теореми 39.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |Y_n(x) - Y(x)| = 0 \text{ рівномірно на } [a, b].$$

Тут розглянуто також деякі практично важливі апроксимації.

При наближеній побудові еволюційного оператора відповідної диференціальної системи в §41 отримано наступний результат якісного характеру.

**Теорема 41.1.** Якщо  $A(x)$  — східчаста матриця-функція із скінченним числом разривів в точках  $x_1, x_2, \dots, x_m \in [a, b]$ , то задача на власні значення  $JY' = B'Y + \lambda A'Y$ ,  $Y(a) = Mv$ ,  $Y(b) = Nv$  при виконанні вказаних в §§28, 29 умов на матриці  $A$ ,  $B$ ,  $M$  і  $N$  має скінченне число власних значень і відповідних їм власних векторів.

В §§42, 43 наведено приклади наближеного розв'язування задач на власні значення для диференціальних рівнянь другого і четвертого порядків відповідно. Отримані при цьому числові результати показують, що апробація запропонованих способів апроксимації коефіцієнтів виявилася цілком задовільною.

В §44 запропоновано спосіб зведення матричного КДР довільного порядку до еквівалентної системи завантажених інтегро-квазидиференціальних рівнянь типу Вольтерра-Стільтьєса.

Розглядається КДР

$$\tilde{L}_{mn}[Y(x)] = \dot{L}_{mn}[Y(x)] + \lambda \bar{L}_{mn}[Y(x)] = 0 \quad (116)$$

де  $\lambda$  — параметр, причому порядок КДВ  $\dot{L}_{mn}[Y]$  строго більший від порядку КДВ  $\bar{L}_{mn}[Y]$ . Нехай  $K(x, s)$  — функція Коші КДР  $\dot{L}_{mn}[Y] = 0$ .

**Теорема 44.1.** Квазіпохідна  $Y^{[k]}(x)$ ,  $k = \overline{0, m+n-1}$ , довільного розв'язку КДР (116) є розв'язком інтегро-квазидиференціального рівняння

$$Y^{[k]}(x) = \sum_{i=0}^{m+n-1} K^{[k]*\{m+n-i-1\}*}(x, x_0) \cdot C_i + \lambda \int_{x_0}^x \left\{ \sum_{j=i}^m K^{[k]*\{m-j\}*}(x, s) \left[ \sum_{p=0}^{n-1} d\tilde{A}_{n-p,j}(s) Y^{[p]}(s) \right] \right\}, \quad (117)$$

( $C_i$  — довільні сталі матриці).

**Наслідок.** Розв'язки  $Y_k(x)$  системи інтегро-квазидиференціальних рівнянь

$$Y_k(x) = K^{*\{m+n-k-1\}*}(x, x_0) + \lambda \int_{x_0}^x \left\{ \sum_{j=i}^m K^{*\{m-j\}*}(x, s) \left[ \sum_{p=0}^{n-1} d\tilde{A}_{n-p,j}(s) Y^{[p]}(s) \right] \right\}, \quad (118)$$

$k = 0, m + n - 1$ , утворюють нормальну в точці  $x_0 \in I$  фундаментальну систему розв'язків КДР (116).

Ці результати дають можливість застосовувати до коректних КДР метод послідовних наближень. Цей спосіб був фактично використаний при узагальненні інтегральної ознаки Ляпунова.

У **висновках** коротко сформульовані основні результати дисертації, а також вказано можливі їх застосування.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1. Закладено основи теорії лінійних і квазілінійних диференціальних систем з мірами, що пов'язано з новим коректним означенням їх розв'язків, а також встановлено ефективні критерії коректності.

2. Побудована лінійна теорія скалярних і матричних КДР з коефіцієнтами-мірами і правими частинами — узагальненими похідними вищих порядків від функцій локально обмеженої варіації. Одночасно розвинута концепція квазіпохідних.

3. Вивчено елементи теорії стійкості названих систем і показано, що при цьому природним чином застосовна класична схема першого методу Ляпунова.

4. Поширено результати Ф.Аткінсона, що стосуються дослідження крайових задач для диференціальних систем із сумовними за Лебегом коефіцієнтами, на дискретно-неперервні крайові задачі для диференціальних систем з мірами.

5. Розроблено і апробовано наближені способи розв'язування дискретно-неперервних крайових задач, що ґрунтуються на апроксимації коефіцієнтів відповідних диференціальних рівнянь та на зведенні їх до еквівалентних систем завантажених інтегро-квазидиференціальних рівнянь типу Вольєрра-Стільтьєса.

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Тацій Р.М. До побудови характеристичних рядів багатопараметричних континуальних систем // ДАН УРСР. - Сер. А. - 1976. - N<sup>2</sup>9. - С. 819-821.
2. Тацій Р.М. О порядке роста характеристического ряда // Матем. мет. и физ.-мех. поля. - 1981. - N<sup>2</sup>13. - С. 38-48.
3. Тацій Р.М. О сочетании методов Ритца и характеристических рядов в самосопряженных полностью определенных задачах многочисленного класса // Матем. мет. и физ.-мех. поля. - 1981. - N<sup>2</sup>14. - С. 16-19.
4. Тацій Р.М. Один способ построения общего решения квазидифференциального уравнения 2-го порядка. - Львов, 1982. - 4 с. - Др. в ВИНТИ, N<sup>2</sup>574.
5. Стасюк М.Ф., Тацій Р.М. До дослідження коливань і стійкості систем з кусково-змінним розподілом параметрів // Доп. АН

- УРСР. - Сер. А. - 1982. - №5. - С. 43-47.
6. Тацій Р.М. Построение решений квазидифференциальных уравнений с кусочно-переменными коэффициентами // Дифференц. уравн. и их приложения. К., 1984. - 75 с. - Деп. в УкрНИИТИ, №1927.
  7. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Кисилевич В.В. Общие квазидифференциальные уравнения с мерами. - К., 1985. - 34 с. - Деп. в УкрНИИТИ, №2701.
  8. Тацій Р.М. Критерий однозначной определенности линейной дифференциальной системы с мерами. - Львов, 1987. - 10 с. - Деп. в УкрНИИТИ, №1947.
  9. Пахолко Б.Б., Тацій Р.М. Линейные квазидифференциальные уравнения в пространстве вектор-функций. - Львов, 1987. - 21 с. - Деп. в УкрНИИТИ, №1943.
  10. Кисилевич В.В., Тацій Р.М. Рекуррентные схемы для квазидифференциальных уравнений с мерами // 1 Всесоюз. конф. "Новые подходы к решению дифференциальных уравнений": Тез. докл. - М., 1987. - С. 59 - 60.
  11. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Пахолко Б.Б. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с обобщенными функциями в коэффициентах. - Львов, 1988. - 20 с. - Деп. в УкрНИИТИ, №2793.
  12. Тацій Р.М., Пахолко Б.Б. Про структуру фундаментальної матриці квазидиференціального рівняння // Доп. АН УРСР. - Сер. А. - 1989. - №4. - С. 25-28.
  13. Тацій Р.М. Квазидифференциальные уравнения с обобщенными коэффициентами // 4 Уральская региональная конф. "Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения": Тез. докл. - Уфа, - 1989. - С. 146.
  14. Стасюк М.Ф., Тацій Р.М. Однозначно определенные неоднородные дифференциальные уравнения с мерами // 1 Республ. конф. "Разрывные динамические системы": Тез. докл. - Киев, 1989. - С. 53.
  15. Тацій Р.М., Іщук В.В., Кісілевич В.В. Про апроксимацію розв'язків диференціальних рівнянь з мірами // Вісн. Київ. ун-ту: Математика і механіка. - Київ: Либідь, 1990. - №32. - С. 128-131.
  16. Стасюк М.Ф., Тацій Р.М. Про одну систему завантажених інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтера // Вісн. Львів. політехн. ін-ту: Диференц. рівн. та їх застосування. - Львів: видавництво при ЛДУ, 1990. - №242, С. 91-92.
  17. Тацій Р.М. Дифференциальные уравнения с обобщенными коэффициентами и дискретно-непрерывные краевые задачи // 3

- Всесоюз. конф. " Новые подходы к решению дифференциальных уравнений": Тез. докл. - М., - 1991. - С. 135.
18. Тацій Р.М., Пахолок Б.Б. Про порядок узагальнених функцій в правих частинах квазидиференціальних рівнянь // Доп. АН УРСР. - Сер. А. - 1991. N<sup>2</sup>1. - С. 16-19.
  19. Кисилевич В.В., Тацій Р.М. О разложении по собственным векторам обобщенной дифференциальной системы // 3 Республ. конф. "Разрывные динамические системы": Тез. докл. - Киев, 1991. - С. 26 - 27.
  20. Стасюк М.Ф., Тацій Р.М. Диференціальні рівняння з коефіцієнтами — узагальненими функціями вищих порядків // Вісн. Львів. політехн. ін-ту: Диференц. рівн. та їх застосування. - Львів: Світ. 1991. - N<sup>2</sup>251, С. 111-113.
  21. Тацій Р.М., Кисилевич В.В. Краевая задача для обобщенной дифференциальной системы. - Львов, 1992. - 37 с. - Деп. в УкрИНТЭИ, N<sup>2</sup>1047.
  22. Тацій Р.М., Кисилевич В.В. Свойства функции Грина обобщенного квазидифференциального уравнения // Шк. "Современные методы в теории краевых задач": Тез. докл. - М., 1992. - С. 87-88.
  23. Тацій Р.М. О разрешимости краевой задачи для обобщенной дифференциальной системы // Шк. "Теория функций. Дифференциальные уравнения в математическом моделировании": Тез. докл. - Воронеж, 1993. - С. 127.
  24. Тацій Р.М., Стасюк М.Ф. Об одной интерпретации матричного неклассического интеграла Римана-Стильтьеса. - Львов, 1993. - 28 с. - Деп. в ГНТБ Украины, N<sup>2</sup>1041.
  25. Тацій Р.М. Линейные дифференциальные системы с мерами. - Львов, 1993. - 18 с. - Деп. в ГНТБ Украины, N<sup>2</sup>1053.
  26. Роман Тацій. Про стійкість за першим наближенням узагальненої диференціальної системи // Всеукраїнська наукова конф. "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь": Тез. доп. - Київ, 1994. - С. 164.
  27. Тацій Р.М. Узагальнені квазидиференціальні рівняння // Препр. / АН України ІППММ. - 1994. - N<sup>2</sup>2-94. - С. 1-54.

Підп. до друку 16.06.94. Формат 60x84<sup>1</sup>/16  
Папір друк. № 2. Офс. друк. Умовн. друк. арк. 2,5  
Умовн. фарб.-відб. 2,5. Умовн. видав. арк. 2,37  
Тираж 100 прим. Зам. 410. Безплатно

ДУЛП 290646 Львів-ІЗ, Ст.Бандери, І2

Дільниця оперативного друку ДУЛП  
Львів, вул. Городоцька, 266

458916

AB 30.772