НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ГІРИК Олена Анатоліївна

ВЕКТОРНІ ПОЛЯ
НА ДВОВИМІРНИХ МНОГОВИДАХ

01.01.02 - диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1994

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі т[illegible] методів аналізу Інституту математики НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико - математичних наук,
професор ШАРКО В.В.

Офіційні опоненти: доктор фізико - математичних наук,
професор МАРТИНЮК Д.І.

кандидат фізико - математичних наук,
п.н.с. КОЛЯДА С.Ф.

Провідна установа: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України

Захист відбудеться "25" жовт 1994 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.02 при Інституті математики НАН України за адресою
252601, Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту

Автореферат розіслано "23" верес 1994 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
д-р фіз.-мат. наук Луч... А.Ю.Лучко

АВ-30.790

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В дисертаційній роботі розглядаються диференціальні рівняння (векторні поля) з ізольованими особливими точками на компактних двовимірних многовидах.

В 1885 р. Пуанкаре довів, що сума індексів особливих точок такого векторного поля на двовимірному многовиді дорівнює ейлеровій характеристиці цього многовиду. Для n-вимірних многовидів цей факт (теорема Пуанкаре-Хопфа) був повністю доведений Хопфом [4] у 1926 р., слідом за частковими результатами Брауера та Адамара. Теорема вірна і для многовидів з краєм, якщо векторне поле в кожній точці краю направлене зовні. Було також встановлено існування векторного поля без особливих точок, якщо ейлерова характеристика многовиду дорівнює 0. Векторні поля з заданими наборами особливостей в багатовимірному випадку вивчалися в роботі О.О.Пришляка [2].

Однією з основних задач теорії динамічних систем є описання структури траєкторій векторного поля на многовиді. Для цього можна обмежитись вивченням деякої множини в просторі векторних полів. Важливо, щоб ця підмножина була відкритою та щільною, а векторні поля цієї множини були структурно стійкими та мали достатньо просту структуру траєкторій. Для компактних двовимірних многовидів виділено такий клас векторних полів, його елементи мають назву векторних полів Морса-Смейла. Цей результат отримано Пейксото.

Природним чином виникає проблема класифікації векторних полів Морса-Смейла на двовимірних многовидах. Ця задача була повністю вирішена для сфери Є.Ф.Леонтович та А.Г.Майером [1]. М.Пейксото [7] застосовував для розв'язання цієї проблеми графи з відміченими вершинами, що задовольняють деякі умови. К.Мейер [6] та В.В.Шарко [4] використовували функції Ляпунова. Х.Вонг [8] вивчав поля Морса-Смейла на двовимірних многовидах за допомогою C^*-алгебр.

Конструкції, подібні до введених в третьому розділі (кола з відміченими точками), були застосовані для вивчення векторних полів Морса-Смейла в роботі Флейтаса [5], але повне доведення теореми класифікації для двовимірного випадку відсутнє. Питання класифікації векторних полів Морса-Смейла, зокрема, мінімальних, а також підрахунок їх числа в залежності від роду многовиду залишалися відкритими.

Таким чином, становить інтерес:

1) побудова диференціальних рівнянь, які мають задані набори індексів, що задовольняють умови теореми Пуанкаре-Хопфа, тобто доведення теореми, оберненої до теореми Пуанкаре-Хопфа;

2) класифікація мінімальних полів Морса-Смейла;

3) оцінка числа мінімальних векторних полів Морса-Смейла в залежності від роду многовиду.

Мета роботи. Головна мета дисертації полягає в розробці методів побудови векторних полів з заданими наборами індексів ізольованих особливих точок та оцінки числа мінімальних векторних полів Морса-Смейла.

Методика досліджень грунтується на загальних методах топологічної теорії диференційних рівнянь, диференціальної топології та теорії Морса.

Наукова новизна. В роботі для замкнених многовидів та многовидів з краєм побудовано градієнтні, локально градієнтні та довільні векторні поля з ізольованими особливими точками, які реалізують задані набори індексів, що задовольняють умови теореми Пуанкаре-Хопфа.

Знайдена класифікація мінімальних векторних полів Морса-Смейла.

Отримано оцінку числа мінімальних векторних полів Морса-Смейла в залежності від роду многовиду та підраховано кількість таких полів на многовиді роду 2 (кренделі).

Практична та теоретична цінність. Одержані результати можуть бути використані в теорії динамічних систем, а також у суміжних галузях теорії диференціальних рівнянь та топології.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на семінарі з теорії гамільтонових систем на кафедрі диференціальної геометрії та топології Московського держ. університету (керівник академік РАН А.Т.Фоменко), на науково-дослідницьких семінарах відділу топологічних методів аналізу Інституту математики НАН України (керівник проф. В.В.Шарко), на IX Міжнародній конференції з топології та її застосувань (Київ, 12-16 жовтня 1992 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1-4].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з вступу, трьох розділів, розбитих на 13 параграфів та списку літератури, який налічує 53 найменування. Об'єм роботи 101 сторінка машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У *вступі* обгрунтовується актуальність теми дисертації, дано огляд найбільш близьких до цієї теми результатів, коротко викладено зміст дисертації, а також перераховано основні результати, які виносяться на захист.

Перший розділ - довідковий. В ньому наводяться означення понять, що використовуються, а також необхідні факти з літератури, які сформульовані без доведення.

Якщо на многовиді задано векторне поле, то з кожною ізольованою критичною точкою можна пов'язати числовий інваріант, що носить назву індекс векторного поля. Взагалі кажучи, цей інваріант може приймати довільне ціле значення, а для поля градієнта - не більше 1.

Широко відома теорема Пуанкаре-Хопфа стверджує, що сума індексів на многовиді дорівнює ейлеровій характеристиці многовиду:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \chi(M),$$

тобто дорівнює топологічному інваріанту многовиду, що не залежить від векторного поля.

Зафіксуємо на многовиді скінченне число точок і припишемо кожній з них число. Виникає питання - чи можна побудувати векторне поле (зокрема, градієнтне), яке має сингулярності тільки у відмічених точках, а індекс векторного поля в цих точках дорівнює приписаним числам? В зв'язку з цим дамо наступні означення.

Означення 1.2.1. Набір (a_i) називається припустимим для M^2, якщо

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \chi(M^2).$$

Означення 1.2.2. Набір (a_i) називається реалізовним для M^2, якщо на M^2 існує векторне поле X, яке має в точності k особливих точок x_i, причому

$$\operatorname{ind} (X, x_i) = a_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Теорема Пуанкаре - Хопфа означає, що будь-який реалізовний набір є припустимим.

У *другому розділі* розглядаються звичайні диференціальні рівняння (векторні поля) з ізольованими особливими точками. В п. 2.1 доведено існування векторних полів з особливими точками будь-якого індексу. Підраховано індекс векторного поля в залежності від вигляду поля в околі особливої точки.

В п. 2.2 розглядається реалізовність наборів полем градієнта. Доведено теореми.

Теорема 2.2.1. На двовимірній сфері S^2 будь-який припустимий набір (a_i) такий, що

$$a_i \leqslant 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

реализований за допомогою поля градієнта диференційовної функції.

Теорема 2.2.2 На двовимірному гладкому зв'язному компактному многовиді без краю M^2 з ейлеровою характеристикою $\chi_0 \leqslant 1$ будь-який припустимий набір (a_i) такий, що

1) всі елементи набору не перевершують одиниці:

$$a_i \leqslant 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant k;$$

2) існують хоча б два елементи, що дорівнюють одиниці:

$$\exists\, i,j, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant k, \quad a_i = a_j = 1,$$

реалізується за допомогою поля градієнта диференційовної функції.

Для доведення на многовиді задається функція за допомогою ліній рівня.

Якщо ейлерова характеристика многовиду M^2 $\chi_0 \leq 0$, то серед припустимих наборів

$$a_i, \quad a_i \leq 1, \; 1 \leq i \leq k,$$

можуть бути такі, що всі $a_i \leq 0$, $1 \leq i \leq k$, або існує тільки один додатний елемент $a_j = 1$. В цьому випадку набір не можна реалізувати полем градієнта диференційовної функції f, але такі набори можна реалізувати полем, що є локально градієнтним. Має місце теорема.

Теорема 2.3.1. На двовимірному гладкому зв'язному компактному орієнтовному многовиді без краю M^2_g $(g \geq 1)$ з ейлеровою характеристикою $\chi_0 = 2-2g \leq 0$ будь-який припустимий набір (a_i) такий, що

$$a_i \leq 1, \quad 1 \leq i \leq k,$$

реалізовний за допомогою локально градієнтного векторного поля.

В п. 2.4 розглядається реалізовність наборів за допомогою довільних векторних полів. Має місце наступна теорема.

Теорема 2.4.1. На двовимірній сфері S^2 будь-який припустимий набір

$$(a_i), \quad 1 \leq i \leq k$$

є реалізовним.

Векторне поле, що реалізує заданий припустимий набір, задається на сфері системою траєкторій.

Користуючись цим результатом та використовуючи математичну індукцію по роду многовиду, реалізуємо припустимі набори на довільному двовимірному многовиді.

Теорема 2.4.2. На довільному двовимірному диференційовному зв'язному компактному многовиді без краю M^2 будь-який припустимий набір (a_l), $1 \leq l \leq k$, є реалізовним.

В п. 2.5 аналогічні результати отримано для двовимірного диференційовного зв'язного компактного многовиду M^2 з краєм $\partial M^2 = N$ та з ейлеровою характеристикою $\chi(M^2) = \chi_0$. Край такого многовиду складається з n компонент зв'язності, тобто дифеоморфний об'єднанню n кіл. Заклеїмо кожну компоненту краю S^1_l двовимірним диском

$$D^2_l, \quad \partial D^2_l = S^1_l, \quad 1 \leq l \leq n.$$

Отримаємо двовимірний многовид без краю M^2_1 з ейлеровою характеристикою $\chi(M^2_1) = \chi_0 + n$. Використовуючи теореми про реалізацію для многовидів без краю, доводимо наступні теореми.

Теорема 2.5.1. На двовимірному диференційовному зв'язному компактному многовиді M^2 з краєм будь-який припустимий набір (a_l) такий, що:

1) $a_i \leqslant 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant k$;

2) існує $j, \quad 1 \leqslant j \leqslant k, \quad a_j = 1$;

реалізується полем градієнта гладкої функції.

Теорема 2.5.2. На двовимірному диференційовному зв'язному компактному многовиді M^2 з краєм будь-який припустимий набір (a_i) такий, що $a_i \leqslant 1, \quad 1 \leqslant i \leqslant k$, реалізується за допомогою локально градієнтного векторного поля, якщо $\chi_0 + n \leqslant 0$.

Теорема 2.5.3. На двовимірному диференційовному зв'язному компактному многовиді M^2 з краєм будь-який припустимий набір (a_i) є реалізовним.

В *третьому розділі* розглядаються мінімальні векторні поля Морса-Смейла без замкнених траєкторій, тобто такі поля Морса-Смейла, які мають одне джерело та один сток.

З кожним таким полем, заданим на многовиді роду k, можна пов'язати слово спеціального вигляду. Це слово довжиною $4k$, складене з $2k$ пар букв, таке, що для кожної пари букв a_i, a_i знайдеться інша пара, що її розбиває. Тобто вони розташовані в такому порядку:

$$a_i \ldots a_j \ldots a_i \ldots a_j \ldots$$

Позначимо множину таких слів $\mathfrak{L}^k$.

В п. 3.1 встановлено відповідність між множиною мінімальних полів Морса-Смейла на двовимірних орієнтовних многовидах роду k та множиною $\mathfrak{L}^k$ слів спеціального вигляду довжиною $4k$.

В п. 3.2 розглядаються умови, за яких два мінімальних векторних поля Морса-Смейла є топологічно еквівалентними.

Означення 3.2.1. Назвемо 2 слова w_1 та w_2 з множини $\mathfrak{L}^k$ еквівалентними, якщо одне з них можна перевести в інше за допомогою скінченного числа елементарних операцій, до яких відносяться:

1) зсув, тобто читання слова, починаючи з іншої букви:

$$a_i a_j a_k \ldots a_l \sim a_j a_k \ldots a_l a_i;$$

2) інверсія, обернений порядок читання:

$$a_i a_j a_k \ldots a_l \sim a_i a_l \ldots a_k a_j;$$

3) зміна позначень (підстановка алфавіту):

$$a_j a_k a_l \ldots a_m \sim a_{i_j} a_{i_k} \ldots a_{i_l} a_{i_m},$$

де

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{2k} \\ a_{i_1} & a_{i_2} & a_{i_3} & \ldots & a_{i_{2k}} \end{bmatrix},$$

тобто

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 2k \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_{2k} \end{bmatrix}.$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 3.2.1. Два мінімальних векторних поля Морса-Смейла X та Y на двовимірному замкненому орієнтовному многовиді M^2 роду k є топологічно еквівалентними тоді й тільки тоді, коли еквівалентні відповідні до них слова:

$$w_x \sim w_y, \text{ де } w_x \in \mathfrak{L}^k,\ w_y \in \mathfrak{L}^k.$$

В п. 3.3 знайдено оцінку числа мінімальних полів Морса-Смейла в залежності від роду многовиду. Доведено теорему.

Теорема 3.3.1. Для двовимірного многовиду роду k, $k \geqslant 1$, існує не більше ніж

$$N_k = \frac{(4k-1)!}{3!\ 24^{k-1}}$$

нееквівалентних мінімальних систем Морса-Смейла.

Теорема доводиться за допомогою математичної індукції по роду многовиду. Для кожного k, $k \geqslant 1$, підраховується кількість нееквівалентних слів у множині $\mathfrak{L}^k$, що відповідає кількості нееквівалентних полів.

В п. 3.4 розроблено методику точного підрахунку кількості нееквівалентних векторних полів Морса-Смейла. Ця методика застосовується для многовидів роду 2 (кренделів). Доведено наступну теорему.

Теорема 3.4.1. На многовиді роду 2 (на кренделі) існує 6 нееквівалентних мінімальних векторних полів Морса-Смейла.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівникові Володимиру Васильовичу Шарко.

Список цитованої літератури

1. Леонтович Е.А., Майер А.Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории // Докл. АН СССР. - 1937 - 14, № 5 - С. 251-254.

2. Пришляк А.О. Дифференциальные уравнения на многообразиях и парах многообразий. - Киев. - 1993. - 20 с. - - (Препр. / АН Украины. Ин-т математики; 93.37).

3. Шарко В.В. Топологические аспекты динамических систем // Укр. мат. журн. - 1992. - 44, № 1. - С. 136-142.

4. Hopf H. Vektorfilder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten// Math. Ann.- 1926. - 96. - P. 225-250.

5. Fleitas G. Classification of gradient like flows on dimensions two and three// Bol. Soc. Brasil. Mat. - 1975. - 9. - P. 155-183.

6. Meyer K.R. Energy functions for Morse-Smale Systems // Amer. J. Math. - 1968. - 90, № 4. - P. 1031-1040.

7. Peixoto M. On the classification of flows on two-manifolds. In: Dynamical Systems, edited by M.Peixoto. - - Academic Press. - 1973. - P. 389-419.

8. Wang X. The C^*-algebras of Morse-Smale flows on two-manifolds // Ergod. Th. & Dynam. Sys. - 1990. - 10. - - P. 565-597.

Основні результати дисертації надруковані у наступних роботах:

1. Гирик Е.А. О существовании векторных полей с заданным набором особенностей на двумерном замкнутом ориентируемом многообразии// Укр. мат. журн. - 1993 - 46, № 12 - С. 1706-1709.

2. Гирик Е.А. Векторные поля с заданным набором особенностей на двумерных замкнутых ориентированных многообразиях. - Киев. - 1993. - 24 с.- (Препр. / АН Украины. Ин-т математики; 93.26).

3. Гірик О.А. Векторні поля з заданим набором особливостей на двовимірних замкнених неорієнтовних многовидах та многовидах з краєм. - Київ, 1994. - 24 с. -(Препр./ НАН України. Ін-т математики; 94.22).

4. Girik H.A. On the existence of a rational closed 1-form on a smooth closed manifold// Abstracts of International Conference on Topology and its Applications, Kiev, October 12-16, 1992. - P. 78.

Гирик Е.А. Векторные поля на двумерных многообразиях.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, Ин-т математики НАН Украины, Киев, 1994.

Исследуются векторные поля с изолированными особыми точками на двумерных многообразиях. Для компактных замкнутых многообразий и компактных многообразий с краем построены градиентные, локально градиентные и произвольные поля, реализующие заданные наборы индексов, удовлетворяющих условиям теоремы Пуанкаре-Хопфа. Найдена классификация минимальных векторных полей Морса-Смейла. Получена оценка числа минимальных векторных полей Морса-Смейла в зависимости от рода многообразия и подсчитано количество таких полей на многообразии рода 2 (кренделе).

Giryk O.A. Vector fields on two-dimensional manifolds.

Dissertation presented for obtaining the degree of Kandidat of sciences in Phisics and Mathematics on subject 01.01.02 - differential equations, Institute of Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences, Kiev, 1994.

Vector fields on two-dimensional manifolds with isolated singular points are investigated. The gradient, locally gradient and arbitrary vector fields realizing the given set of indices satisfying the Poincare-Hopf theorem are constructed on compact closed manifolds and compact manifolds with boundaries. The classification of minimal Morse-Smale vector fields is obtained. The estimate of number of minimal Morse-Smale vector fields with respect to the genus of a manifold is found. The number of such fields on a manifold of genus 2 is calculated.

Ключові слова:

векторне поле, індекс критичної точки, поле Морса-Смейла, класифікація.

Підп. до друку 20.09.94. Формат 60×84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид. арк. 0,6
Тираж 100 пр. Зам. 212. Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, ДОП, вул. Терещенківська, 3

[illegible]