АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
НАН УКРАИНЫ

На правах рукописи

Вадиаа Али (Сирия)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ О КОЛЕБАНИЯХ МАЯТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

01.01.01 - математический анализ

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание научной степени
кандидата физико-математических наук

Донецк - 1994

Работа выполнена на кафедре мате... Симферопольского государственного уни...

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор КОПАЧЕВСКИЙ Н.Д.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник БАРНЫК М.Л.; кандидат физико-математических наук, доцент МАЛАМУД М.М.

Ведущая организация: Физико-технический институт низких температур НАН Украины (г.Харьков).

Защита состоится "19" октября 1994 г. в 15 час. на заседании специализированного совета Д. 06.01.01 по присуждению научной степени доктора физико-математических наук при Институте прикладной математики и механики НАН Украины по адресу: 340114, г.Донецк-114, ул.Розы Люксембург, 74.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Института прикладной математики и механики НАН Украины.

Автореферат разослан "12" сентября 1994 г.

Ученый секретарь специализированного совета кандидат физико-математических наук — А.И.Карковский

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Изучение задач динамики тел с полостями, частично или полностью заполненными жидкостью, привлекает внимание многих выдающихся ученых, в особенности во второй половине XX века. Такие задачи связаны, в частности, с исследованием космического пространства с помощью ракетной техники. Жидкое топливо в баке космической ракеты совершает как на активном, так и на пассивном участках траектории некоторые колебания, влияющие на совместное движение системы "ракета + бак с жидкостью".

Задача о малых колебаниях тяжелой жидкости в ограниченной области либо маятника с жидкостью интересовала многих выдающихся математиков и механиков (Остроградский, Коши, Пуассон, Стокс, Гельмгольц, Нейман, Рэлей, Тейлор, Ламб, Н.Е.Жуковский, О.А.Ладыженская). Первые результаты по исследованию задач динамики тела с полостью, содержащей жидкость, принадлежат Н.Е.Жуковскому. Последующие исследования проводили Н.Н.Моисеев, В.В.Румянцев, Г.С.Нариманов, Б.И.Рабинович, Л.Н.Сретенский, Д.Е.Охоцимский, С.Г.Крейн, А.А.Петров, И.А.Луковский, М.Я.Барняк, Нго Зуй Кан и другие. Большой цикл работ был посвящен также основной проблеме в этом круге вопросов - исследованию колебаний маятника с полостью, целиком либо частично заполненной идеальной или вязкой жидкостью либо системой из несмешивающихся жидкостей. Здесь можно отметить работы С.Г.Крейна и Н.Н.Моисеева, Г.А.Моисеева, Н.Д.Копачевского (идеальная жидкость), О.Б.Иевлевой, П.С.Краснощекова, С.Г.Крейна и Нго Зуй Кана, М.Я.Барняка и Р.И.Цебрия, Е.Д.Володкович и Н.Д.Копачевского, Ф.Л.Черноусько (вязкая жидкость).

Если жидкость частично заполняет полость и находится в условиях, близких к невесомос..и, то необходимо учитывать действие капиллярных (поверхностных) сил. Исследования задач динамики тела с полостью, содержащей капиллярную жидкость, проводили Н.Н.Моисеев, Ф.Л.Черноусько, Н.Д.Копачевский, М.Я.Барняк, А.Н.Комаренко, И.А.Луковский, С.Г.Крейн, Нго Зуй Кан и другие.

При исследовании начально-краевых задач для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движение и нормальные колебания тела с полостью, содержащей жидкость, важную роль играют методы функционального анализа и, в частности, методы теории дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, а также методы теории оператор-функций. Успешное применение этих методов для задач подобного рода отражено в работах С.Г.Крейна, Н.Д.Копачевского, Нго Зуй Кана и других.

Несмотря на громадные достижения в области динамики тела с полостью, содержащей жидкости, и в определенной мере законченность некоторых полученных здесь математических результатов, остались неисследованными некоторые задачи, которые можно назвать классическими. Качественному исследованию этих нерешенных задач для уравнений в частных производных и посвящена данная диссертация. Автор ограничился изучением лишь плоских (двумерных) проблем. Соответствующие трехмерные задачи исследуются аналогично. С другой стороны, наличие лишь одной дополнительной степени свободы по сравнению со случаем неподвижного сосуда позволяет провести более детальное рассмотрение проблемы.

Цель работы. I. Качественное исследование задачи о малых колебаниях маятника с полостью, заполненной системой из несмешивающихся тяжелых идеальных жидкостей.

2. Исследование задачи о малых движениях и собственных колебаниях маятника с полостью, частично заполненной капиллярной

идеальной жидкостью.

3. Изучение задачи о малых движениях и нормальных колебаниях маятника с полостью, заполненной системой из несмешивающихся вязких жидкостей.

4. Исследование динамики и устойчивости маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью.

Методика исследования. Систематически применяются методы функционального анализа, в частности, методы теории дифференциальных уравнений в иглъбертовом пространстве и методы спектральной теории оператор-функций. На протяжении всей работы существенно используются также методы теории дифференциальных уравнений в частных производных, методы ортогонального проектирования на подпространства гильбертова пространства и другие.

Научная новизна. Результаты диссертации представляют собой качественное исследование новых начально-краевых задач для системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих колебания маятника с полостью, содержащей жидкость. В частности:

I. Разработан операторный подход, связанный с приведением задачи о малых колебаниях плоского маятника с полостью, заполненной системой из несмешивающихся идеальных жидкостей, к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве. Изучены свойства операторных коэффициентов операторного уравнения и на этой основе доказана теорема о корректной разрешимости исходной начально-краевой задачи, выведен закон баланса полной энергии.

2. Изучена задача о собственных колебаниях проблемы п.I. Доказана теорема о дискретности ее спектра, получены условия устойчивости и неустойчивости системы. Разработан вариационный подход для нахождения частот и мод собственных колебаний. Обобщенное

решение эволюционной задачи представлено в виде ряда по собственным функциям спектральной задачи.

3. Разработан операторный подход, связанный с приведением задачи о малых колебаниях плоского маятника с полостью, частично заполненного капиллярной идеальной жидкостью, к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве. Доказана теорема о корректной разрешимости начально-краевой задачи, исследована задача о собственных колебаниях. Доказана теорема о дискретности спектра. Получены условия устойчивости и неустойчивости системы. Разработан вариационный подход для нахождения частот и мод собственных колебаний.

4. Разработан операторный подход, основанный на приведении задачи о малых колебаниях плоского маятника с полостью, заполненной системой из несмешивающихся тяжелых вязких жидкостей, к дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве. Изучены свойства операторных коэффициентов этого уравнения, получены условия статической устойчивости. Доказана теорема о корректной разрешимости начально-краевой задачи.

5. Исследована задача о нормальных колебаниях проблемы п.4. Установлен факт дискретности спектра этой задачи, наличие двух предельных точек для собственных значений, а также другие свойства спектра: расположение в комплексной плоскости, асимптотика ветвей собственных значений, структура спектра при изменении средней кинематической вязкости системы и т.д. Получены условия неустойчивости системы. Доказаны теоремы о базисности систем собственных элементов задачи о нормальных колебаниях.

6. Предложен подход, позволяющий привести задачу о малых колебаниях плоского маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью, к дифференциально-операторному уравнению вто-

рого порядка в гильбертовом пространстве. Изучены свойства операторных коэффициентов этого уравнения. Исследован спектр нормальных колебаний системы. Установлено принципиальное влияние капиллярных сил на структуру спектра задачи. Доказана теорема о полноте системы мод нормальных колебаний, теорема о корректной разрешимости начально-краевой задачи.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты диссертации могут быть использованы в некоторых вопросах теории дифференциально-операторных уравнений, уравнений в частных производных, а также непосредственно на практике, опираясь на полученные здесь вариационные принципы для частот собственных колебаний и на теоремы о неустойчивости, - при инженерном проектировании системы "тело + полость с жидкостью".

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Ш и IУ Крымских осенних математических школах-симпозиумах по спектральным и эволюционным задачам (Ласпи, 1992, 1993), в Институте математики АН Украины на семинаре чл.-корр. АН Украины И.А.Луковского, на научных конференциях преподавателей Симферопольского госуниверситета, в Институте прикладной математики и механики АН Украины (семинар проф. Б.В.Базалия), на семинарах кафедры математического анализа Симферопольского госуниверситета (семинар проф. Н.Д.Копачевского).

Публикации. Результаты выполненных исследований отражены в работах [1-6].

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 205 страницах и состоит из введения, двух глав, дополнений и списка литературы из 84 наименований. При этом введение, дополнения и список литературы составляют 34 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе, состоящей из трех параграфов, изучаются малые движения и собственные колебания плоского маятника с полостью, заполненной одной либо несколькими идеальными жидкостями. В §0 приведены некоторые вспомогательные утверждения, взятые из монографии "Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. - М.: Наука, 1989. - 416 с. , относительно разложения гильбертова пространства вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$ на ортогональные подпространства, естественно связанные с изучаемыми в данной работе векторными полями скоростей, смещений и градиентов давлений. Именно, использованы разложения

$$\vec{L}_2(\Omega)=\vec{J}_0(\Omega)\oplus\vec{G}_{h,S}(\Omega)\oplus\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega), \tag{1}$$

$$\vec{J}_0(\Omega):=\{\vec{u}\in\vec{L}_2(\Omega): \operatorname{div}\vec{u}=0\ (\text{в}\ \Omega),\ u_n:=\vec{u}\cdot\vec{n}=0\ (\text{на}\ \partial\Omega)\},$$

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega):=\{\vec{v}=\nabla\varphi\in\vec{L}_2(\Omega): \Delta\varphi=0\ (\text{в}\ \Omega), \frac{\partial\varphi}{\partial n}=0\ (\text{на}\ S), \int_\Gamma\varphi\,d\Gamma=0\},$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega):=\{\vec{w}=\nabla p\in\vec{L}_2(\Omega): p=0\ (\text{на}\ \Gamma)\}.$$

Здесь $\partial\Omega$ - граница области Ω , заполненной жидкостью, состоящая из твердой стенки сосуда S и свободной поверхности жидкости Γ , $\vec{n}$ - внешняя нормаль.

Если полость Ω заполнена системой из несмешивающихся жидкостей с плотностями $\rho_k\ (\rho_1>\rho_2>\ldots>\rho_{m+1}>0)$, то в работе используется гильбертово пространство $\hat{\vec{L}}_2(\Omega)$ наборов векторных полей $\hat{u}:=\{\vec{u}_k(x)\}_{k=1}^{m+1}$ со скалярным произведением

$$(\hat{u},\hat{v})_{\hat{L}_2(\Omega)}:=\sum_{k=1}^{m+1}\rho_k\int_{\Omega_k}\vec{u}^k(x)\cdot\vec{v}^k(x)\,d\Omega_k. \tag{2}$$

Здесь взамен (I) имеет место ортогональное разложение

$$\vec{\hat{L}}_2(\Omega) = \vec{\hat{J}}_0(\Omega) \oplus \vec{\hat{G}}_{h,S}(\Omega) \oplus \vec{\hat{G}}_{0,\Gamma}(\Omega), \qquad (3)$$

$$\vec{\hat{J}}_0(\Omega) := \overset{m+1}{\underset{k=1}{\oplus}} \vec{J}_0(\Omega_k) = \{\hat{\vec{w}} = \{\vec{w}^k\}_{k=1}^{m+1} \in \vec{\hat{L}}_2(\Omega) : \operatorname{div} \vec{w}^k = 0 \ (\text{в } \Omega_k),$$

$$\vec{w}^k \cdot \vec{n} = 0 \ (\text{на } \partial\Omega_k),\ k = \overline{1, m+1}\},$$

$$\vec{\hat{G}}_{h,S}(\Omega) := \{\hat{\vec{v}} = \{\vec{v}^k(x)\}_{k=1}^{m+1} \in \vec{\hat{L}}_2(\Omega) : \vec{v}^k = \nabla\varphi_k,\ \Delta\varphi_k = 0 \ (\text{в } \Omega_k),\ k = \overline{1, m+1};$$

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_k),\ k = \overline{1, m+1};\ \frac{\partial\varphi_j}{\partial n_j} = \frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial n_j} \ (\text{на } \Gamma_j),\ j = \overline{1, m},$$

$$\int_{\Gamma_j} (\rho_j\varphi_j - \rho_{j+1}\varphi_{j+1})\, d\Gamma_j = 0 \ (j = \overline{1, m}),\ \int_{\Gamma_m} \rho_{m+1}\varphi_{m+1}\, d\Gamma_m = 0\},$$

$$\vec{\hat{G}}_{0,\Gamma}(\Omega) := \{\hat{\vec{u}} = \{\vec{u}^k\}_{k=1}^{m+1} : \vec{u}^k = \nabla p_k \ (\text{в } \Omega_k),\ k = \overline{1, m+1},$$

$$\rho_j\varphi_j - \rho_{j+1}\varphi_{j+1} = 0 \ (\text{на } \Gamma_j),\ j = \overline{1, m};\ \int_{\Gamma_m} \rho_{m+1} p_{m+1}\, d\Gamma_m = 0\},$$

где $\vec{n}_j$ - нормаль к поверхности раздела Γ_j, направленная из j-ой в $(j+1)$-ю жидкость, $\vec{n}$ - внешняя нормаль.

В §I изучаются малые колебания плоского маятника с полостью, заполненной системой из $m+1$ несмешивающихся однородных идеальных жидкостей. Начально-краевая задача о малых движениях такой системы "маятник + жидкости" состоит в нахождении полей относительных смещений $\hat{\vec{w}} = \{\vec{w}^k(t,x)\}_{k=1}^{m+1}$ $(x = (x_2, x_3) \in \Omega_k)$ каждой из жидкостей, давлений $p_k(t,x)$ $(k = \overline{1, m+1})$, вертикальных отклонений $\zeta_j(x_2)$ $(j = \overline{1, m})$ границ раздела жидкостей Γ_j и углового перемещения $\vec{\delta} = \delta_1 \vec{e}_1$ маятника (относительно оси Ox_1) из следующей системы уравнений, граничных и начальных условий:

$$\frac{\partial^2 \vec{w}_k}{\partial t^2} + \frac{d^2\vec{\delta}}{dt^2}\times\vec{r} = -\rho_k^{-1}\nabla p_k + \vec{f},\ \operatorname{div}\vec{w}_k = 0\ (в\ \Omega_k,\ k=\overline{1,m+1}), \tag{4}$$

$$\vec{r} = x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3,\ \vec{w}_k\cdot\vec{n} =: w_{k,n} = 0\ (на\ S_k,\ k=\overline{1,m+1}),\ \zeta_j := \vec{w}_j\cdot\vec{n}_j = \vec{w}_{j+1}\cdot\vec{n}_j = 0$$

$$(на\ \Gamma_j,\ j=\overline{1,m}),\ p_j - p_{j+1} = (\Delta\rho)_j g(\zeta_j + \delta_1 x_2)\ (на\ \Gamma_j,\ j=\overline{1,m}),\ (\Delta\rho)_j := \rho_j - \rho_{j+1} > 0,$$

$$J_1\frac{d^2\vec{\delta}}{dt^2} + \sum_{k=1}^{m+1}\rho_k\int_{\Omega_k}\left(\vec{r}\times\frac{\partial^2\vec{w}_k}{\partial t^2}\right)d\Omega_k + m_0 g\ell\vec{\delta} -$$

$$- g\sum_{j=1}^{m}(\rho_j - \rho_{j+1})\int_{\Gamma_j}(\vec{e}_3\times\vec{r})\zeta_j\,d\Gamma_j = \vec{M}(t),$$

$$\vec{w}_k(0,x) = \vec{w}_k^0(x),\ \frac{\partial\vec{w}_k}{\partial t}(0,x) = \vec{v}_k^0(x)\ (k=\overline{1,m+1}),\ \vec{\delta}(0) = \vec{\delta}^0,\ \vec{\delta}'(0) = \vec{\omega}^0.$$

Здесь $J_1 = (J_1)_T + \sum_{k=1}^{m+1}(J_ж)_k > 0$ - компонента тензора инерции всей системы относительно точки подвеса O маятника, равная сумме компонент тензора инерции $(J_1)_T$ твердого тела и тензоров инерции жидкостей $(J_ж)_k\ (k=\overline{1,m+1})$, $m_0 = m_T + \sum_{k=1}^{m}(m_ж)_k$ - масса всей системы, $(m_ж)_k = \rho_k \operatorname{mes}\Omega_k$, $\vec{M}(t)$ - главный момент относительно O всех внешних сил (кроме гравитационных), действующих на тело с жидкостями, ℓ - расстояние от O до центра масс C системы в состоянии покоя, $g > 0$ - ускорение силы тяжести, $\vec{f} = \vec{f}(t,x)$ - малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное.

В §I для задачи (I) установлены следующие факты.

I°. Выведен закон баланса полной энергии для классического решения задачи (4).

2°. Путем проектирования совокупности уравнений движения на ортогональные подпространства (3) и последующих преобразований задача (4) приведена к задаче Коши

$$A\frac{d^2\xi}{dt^2} + B\xi = x(t),\ \xi(0) = \xi^0,\ \xi'(0) = \xi^1, \tag{5}$$

где $\xi = \xi(t) = (\hat{\xi}; \vec{\delta})^t$ - функция со значениями в вещественном гильбертовом пространстве, $E := \hat{H} \oplus \mathbb{R}$, $\hat{\xi} := \{\xi_j(t,x)\}_{j=1}^m \in \hat{H} := \bigoplus_{k=1}^m L_{2,\Gamma_k}$, $L_{2,\Gamma_k} := L_2(\Gamma_k) \ominus \{1_k\}$, $x(t)$ - заданная функция, а A и B - операторы, действующие в E и имеющие смысл операторов кинетической и потенциальной энергии соответственно.

3°. Оператор A самосопряжен, положителен и компактен в E.

4°. Оператор B самосопряжен и ограничен в E. Для того, чтобы оператор B был положительно определен, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\Delta := m_0 l - \sum_{j=1}^{m} (\Delta\rho)_j (\alpha_{22})_j > 0, \quad (\alpha_{22})_j := \int_{\Gamma_j} |\Theta_j x_2|^2 d\Gamma_j > 0, \tag{6}$$

где Θ_j - ортопроектор на L_{2,Γ_j}. Если $\Delta = 0$, то B имеет одномерное ядро, при $\Delta < 0$ оператор B имеет ровно одно отрицательное и притом простое собственное значение, причем $\operatorname{Ker} B = \{0\}$.

5°. Для спектральной задачи

$$B\xi = \lambda A \xi, \quad \lambda = \omega^2, \quad \xi(t) = \xi \exp(i\omega t), \tag{7}$$

порожденной однородной задачей (5), имеют место следующие свойства:

а) Задача (7) имеет вещественный дискретный спектр с предельной точкой $\lambda = +\infty$.

б) Если выполнено условие (6) (статической устойчивости системы по линейному приближению), то все собственные значения λ положительны.

в) При $\Delta = 0$ задача (7) имеет однократное нулевое собственное значение, а при $\Delta < 0$ - простое отрицательное собственное значение. Последний факт есть обращение теоремы Лагранжа об устойчивости если квадратичная форма потенциальной энергии $(B\xi, \xi)_E$ принимает отрицательные значения, то решения однородной задачи (5) неустойчивы.

6^0. Собственные значения задачи (7) могут быть найдены как последовательные минимумы вариационного отношения

$$(B\xi,\xi)_E/(A\xi,\xi)_E=\{\sum_{k=1}^{m+1}\rho_k\int_{\Omega_k}|\nabla\Phi_k+\delta_1\nabla\varphi_k^0|^2d\Omega_k+ \tag{8}$$
$$+J_1|\delta_1|^2\}/\{g\sum_{j=1}^{m}(\Delta\rho)_j\int_{\Gamma_j}|\zeta_j+\delta_1(\theta_j x_2)|^2d\Gamma_j+g\Delta|\delta_1|^2\},$$

рассматриваемого на множестве функций $\Phi_k(x)$, удовлетворяющих уравнениям и краевым условиям вспомогательной задачи

$$\Delta\Phi_k=0\,(в\ \Omega_k),\ \frac{\partial\Phi_k}{\partial n}=0\ (на\ S_k),\ k=\overline{1,m+1},$$
$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial n_j}=\frac{\partial\Phi_{j+1}}{\partial n_j}=\zeta_j\ (на\ \Gamma_j),\ j=\overline{1,m}, \tag{9}$$
$$\int_{\Gamma_j}(\rho_j\Phi_j-\rho_{j+1}\Phi_{j+1})d\Gamma_j=0\,(j=\overline{1,m}),\ \int_{\Gamma_m}\rho_{m+1}\Phi_{m+1}d\Gamma_m=0,$$

где $\zeta_j(x_2)$- произвольные функции из L_{2,Γ_k}. При этом $\varphi_k^0(x)$ потенциалы Жуковского для областей Ω_k:

$$\Delta\varphi_k^0=0\,(в\ \Omega_k),\ \frac{\partial\varphi_k^0}{\partial n}=(\vec{e}_1\times\vec{r})\cdot\vec{n}\ (на\ \partial\Omega_k),\ k=\overline{1,m+1}, \tag{IO}$$
$$\int_{\Gamma_j}(\rho_j\varphi_j^0-\rho_{j+1}\varphi_{j+1}^0)d\Gamma_j=0\,(j=\overline{1,m}),\ \int_{\Gamma_m}\rho_{m+1}\varphi_{m+1}^0d\Gamma_m=0.$$

Таким образом, отношение (8) зависит от произвольных функций $\zeta_j(x_2)$ $(j=\overline{1,m})$ и константы δ_1; его нужно рассматривать на обобщенных решениях вспомогательных краевых задач (9),(IO).

7^0. Частными случаями задачи (8) является задача о малых колебаниях системы жидкостей в неподвижном сосуде $(\delta_1=0)$, задача о колебаниях маятника с полостью, частично заполненной одной жидкостью $(\rho_2=\ldots=\rho_{m+1}=0)$, а также случай полного заполнения одной жидкостью (задача Жуковского).

8°. На основе вариационной задачи (8)-(I0) может быть развит вариационный метод Ритца для функционала

$$\Psi(\xi) := (B\xi, \xi)_E - \lambda (A\xi, \xi)_E, \tag{II}$$

который для неподвижного сосуда хорошо известен и на его основе проведены многочисленные конкретные расчеты.

9°. Решение эволюционной задачи (5) может быть представлено в виде ряда Фурье по собственным элементам задачи (7), в том числе и в неустойчивом случае, когда минимальное собственное значение $\lambda_{min} \leq 0$.

В §2 рассмотрена задача о малых колебаниях маятника с полостью, частично заполненной одной идеальной жидкостью, причем система находится в условиях, близких к невесомости, когда наряду с гравитационными следует учитывать капиллярные (поверхностные) силы. Здесь в задаче (4) следует положить $\rho_2 = \ldots = \rho_{m+1} = 0$, а на границе $\Gamma_1 = \Gamma$ взамен слагаемого $(\Delta\rho)_j g(\zeta_j + \delta_1 x_2) = \rho_1 g(\zeta_1 + \delta_1 x_2)$ написать слагаемое, отвечающее капиллярному скачку давлений:

$$p = \sigma \mathcal{L}\zeta + \rho g \vec{\delta} \times \vec{r} \cdot \vec{e}_3 \ (\text{на } \Gamma),$$
$$\mathcal{L}\zeta := -\sigma \Delta_\Gamma \zeta - \sigma k_1^2 \zeta + \rho g \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_3}) \zeta, \quad \zeta := (\vec{w} \cdot \vec{n})_\Gamma; \tag{I2}$$

где Δ_Γ - дифференциальный оператор Лапласа-Бельтрами на Γ, $\sigma > 0$ - коэффициент поверхностного натяжения, k_1 - кривизна линии Γ. Кроме того, в концевых точках $\partial\Gamma$ кривой Γ должны выполняться условия сохранения угла смачивания γ при колебаниях:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n_\Gamma} + \varkappa \zeta = 0 \ (\text{на } \partial\Gamma), \quad \varkappa := (k_\Gamma \cos\gamma - k_s)/\sin\gamma. \tag{I3}$$

Исследование соответствующей начально-краевой задачи (4),(I2), (I3) проводится по той же схеме, что и в §I. В частности, для ее решений справедливы свойства 1°- 8° с тем лишь изменением, что оператор потенциальной энергии B является ограниченным снизу оператором с дискретным спектром. В зависимости от величины физических параметров системы он может иметь произвольное конечное число отрицательных собственных значений. Выясняются условия (см. лемму 2.4 диссертации), когда оператор B положительно определен. При выводе соответствующего уравнения вида (5) используется взамен (3) ортогональное разложение (1).

Вторая глава диссертации посвящена изучению задач §1 и §2 на случай, когда взамен идеальных рассматриваются вязкие жидкости. В §3 приводятся краткие сведения об энергетических функциональных пространствах, естественно возникающих в задачах §4, §5 с учетом диссипации энергии в системе с вязкой жидкостью, а также соответствующие вспомогательные краевые задачи.

В §4 рассмотрены малые движения и нормальные колебания маятника с полостью, заполненной системой из несмешивающихся тяжелых вязких жидкостей. Установлено, что взамен начально-краевой задачи математической физики, порожденной указанной проблемой, следует рассматривать задачу Коши вида

$$\tilde{I}\frac{d^2\vec{y}}{dt^2}+\nu\tilde{A}\frac{d\vec{y}}{dt}+\tilde{B}\vec{y}=\vec{x}(t),\quad \vec{y}(0)=\vec{y}^0,\ \vec{y}'(0)=\vec{y}^1, \qquad (14)$$

$$\vec{y}:=(\hat{\vec{w}},\vec{\delta})^t\in\hat{\vec{J}}_{0,S}(\Omega)\oplus\mathbb{C}=\hat{E},\quad \hat{\vec{J}}_{0,S}(\Omega):=\hat{\vec{G}}_{h,S}(\Omega)\oplus\hat{\vec{J}}_0(\Omega),$$

где $\nu>0$ - средняя кинематическая вязкость системы, $\tilde{I}$ (оператор кинетической энергии) - ограниченный и положительно определенный оператор, действующий в $\hat{E}$; оператор $\tilde{A}:=diag(A;0)$ - оператор диссипации, $A\gg 0$ и A^{-1} - компактный оператор; $\tilde{B}$ - оператор потенциальной энергии системы. Оператор $\tilde{B}$

неограничен, самосопряжен и ограничен снизу. Он имеет бесконечномерное ядро. Если выполнено условие (6), то оператор $\widetilde{B}$ неотрицателен и является положительно определенным оператором на множестве из $D(\widetilde{B})$, ортогональном к ядру $\operatorname{Ker}\widetilde{B}$ (лемма 4.I0 диссертации). Если условие (6) не выполнено и $\Delta<0$, то $\widetilde{B}$ имеет ровно одно (с учетом кратности) отрицательное собственное значение.

Исследование задачи (I4), а также соответствующей спектральной задачи

$$(\lambda^2\widetilde{I}-\lambda\nu\widetilde{A}+\widetilde{B})\vec{y}=\vec{0},\ \vec{y}=(\hat{\vec{w}};\vec{\delta})^t\in\hat{E},\ \vec{y}(t)=exp(-\lambda t)\vec{y}, \quad (I5)$$

приводит к следующим выводам.

I^0. Число $\lambda=0$ является бесконечно кратным собственным значением задачи (I5); на мнимой оси вне нуля нет собственных значений. При изменении физических параметров системы собственные значения λ могут переходить из правой полуплоскости в левую лишь через нуль (принцип смены устойчивости).

2^0. Задача (I5) имеет дискретный спектр с предельными точками $\lambda=0$ и $\lambda=\infty$. Если выполнено условие (6) (статической устойчивости по линейному приближению), то все собственные значения λ расположены в правой полуплоскости.

3^0. Ветвь $\{\lambda_n^\infty\}_{n=1}^\infty$ собственных значений с предельной точкой ∞ расположена на полож.тельной полуоси и имеет асимптотическое поведение

$$\lambda_n^\infty=\nu\lambda_n(A)[1+o(1)]\,(n\to\infty). \quad (I6)$$

Ей отвечают в данной гидромеханической системе диссипативные нормальные движения, родственные обычным диссипативным движениям в неподвижном полностью заполненном контейнере.

4^0. Ветвь $\{\lambda_n^0\}_{n=1}^\infty$ с предельной точкой в нуле также расположена на положительной полуоси и имеет асимптотическое поведение

$$\lambda_n^0 = g\nu^{-1}\lambda_n(B)[1+o(1)]\ (n\to\infty), \tag{I7}$$

где оператор B определен формулой (4.85) (см. §4 и лемму 4.I2 диссертации). Этой ветви отвечают пограничные волны, действующие в системе в окрестности границ раздела Γ_j.

5°. При достаточно большой вязкости ν задача (I5) имеет комплексно сопряженную пару собственных значений

$$\lambda^{\pm} = \lambda_0^{\pm}(\nu) = \pm i\omega_0 + o(1)\ (\nu\to\infty), \tag{I8}$$

где $\omega_0 > 0$ - частота колебаний маятника с отвердевшей жидкостью. При произвольной вязкости ν количество невещественных собственных значений λ не более чем конечно (промежуточные волны).

6°. Если условие (6) не выполнено и $\Delta < 0$, то задача (I5) имеет в левой комплексной полуплоскости ровно одно и притом вещественное и простое собственное значение (теорема о неустойчивости).

В данном параграфе установлены также свойства базисности Рисса системы собственных элементов, отвечающих ветвям диссипативных и пограничных волн (п.4.6). В п.4.7 формулируется теорема о корректной разрешимости начально-краевой задачи на основе сведения задачи (I4) к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка с максимальным диссипативным оператором (см. теоремы 4.7,4.8 диссертации).

В §5 изучаются малые движения и нормальные колебания маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью. Не останавливаясь подробно на формулировке результатов, полученных здесь, отметим, что исследование проведено сначала по схеме §4 вплоть до получения эволюционной задачи вида (I4). Однако свойства оператора потенциальной энергии $\widetilde{B}$, учитывающие действие в системе капиллярных сил, позволяют установить, что в соответствующей спектральной задаче (15) спектр дискретен с единственной предельной точкой $\lambda=\infty$. В этом сказывается, как и в проблеме нормальных колебаний капиллярной вязкой жидкости в неподвижном сосуде (см. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. - М.: Наука, 1989. - 416 с., §8.2), принципиальное влияние поверхностных сил на структуру спектра нормальных колебаний. Остальные свойства решений задач (14) и (15) в данной проблеме аналогичны сформулированным выше свойствам 1^0 - 6^0 (с заменой свойства базисности на свойство полноты с конечным дефектом системы собственных и присоединенных элементов, теорема 5.2 диссертации).

Таким образом, в диссертации подробно исследованы плоские задачи о малых движениях маятника с полостью, заполненной одной либо несколькими несмешивающимися идеальными или вязкими жидкостями. При этом применены те методы спектральной теории оператор-функций, которые дали ранее эффективные результаты для соответствующих задач о колебаниях жидкости в неподвижном сосуде.

В конце работы приведены два дополнения, связанные с выводами динамического условия на равновесной поверхности жидкости и закона изменения кинетического момента.

Автор благодарит проф. Н.Д.Копачевского за постановку задач, научное руководство и сотрудничество при получении части результатов.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Вадиаа Али. Малые колебания плоского маятника с полостью, заполненной системой из несмешивающихся идеальных жидкостей / Симфероп. ун-т.- Симферополь, 1993. - 40 с. - Деп. в ГНТБ Украины 28.10.93, № 2113-Ук93.

2. Вадиаа Али. Малые колебания плоского маятника с полостью, заполненной одной идеальной капиллярной жидкостью / Симфероп.ун-т.- Симферополь, 1994. - 21 с.- Деп. в ГНТБ Украины 10.01.94, № 98-Ук94.

3. Вадиаа Али. Малые колебания пространственного маятника с полостью, заполненной системой из несмешивающихся идеальных жидкостей / Симфероп. ун-т. - Симферополь, 1994. - 34 с. - Деп. в ГНТБ Украины 10.01.94, № 100-Ук94.

4. Вадиаа Али. Собственные колебания плоского маятника с полостью, заполненной системой из несмешивающихся вязких жидкостей / Спектр. и эволюц. задачи: Тез. докл. - Вып. 4. - Симферополь: СГУ, 1994. С. 38-41

5. Вадиаа Али, Копачевский Н.Д. Собственные колебания плоского маятника с полостью, заполненной системой из несмешивающихся идеальных жидкостей / Спектр. и эволюц. задачи: Тез. докл. - Вып. 4. - Симферополь: СГУ, 1994. - С. 42-46

6. Вадиаа Али, Копачевский Н.Д. Собственные колебания плоского маятника с полостью, заполненной одной вязкой капиллярной жидкостью / Спектр. и эволюц. задачи: Тез. докл. - Вып. 4. - Симферополь: СГУ, 1994. - С. 47-51

Основные результаты [illegible]

1. Вадиха Али, [illegible] / Симфероп. ун-т. - Симферополь, [illegible] Украины [illegible], № [illegible].
2. Вадиха Али. [illegible] заполненной одной идеальной жидкостью [illegible] / Симфероп. ун-т. - Симферополь, 1994. - 21 с. - Деп. в ГНТБ Украины [illegible], № 90-Ук94.
3. Вадиха Али. Малые колебания пространственного маятника с полостью, заполненной системой из несмешивающихся идеальных жидкостей / Симфероп. ун-т. - Симферополь, 1994. - 34 с. - Деп. в ГНТБ Украины 10.02.94, № 200-Ук94.
4. Вадиха Али. Собственные колебания плоского маятника с полостью, заполненной системой из несмешивающихся идеальных жидкостей / Спектр. и эволюц. задачи: Тез. докл. - Вып. 4. - Симферополь: СГУ, 1994. - С. [illegible].
5. Вадиха Али, Копачевский Н.Д. Собственные колебания и [illegible] маятника с полостью, заполненной системой из несмешивающихся идеальных жидкостей / Спектр. и эволюц. задачи: Тез. докл. - Вып. 4. - Симферополь: СГУ, 1994. - С. [illegible].
6. Вадиха Али, Копачевский Н.Д. Собственные колебания маятника с полостью, заполненной одной вязкой [illegible] жидкостью / Спектр. и эволюц. задачи: Тез. докл. - Вып. 4. - Симферополь: СГУ, 1994. - С. [illegible].

[illegible]