АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

ШАРИПОВ КОСНАЗАР КАРТМАНОВИЧ

ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.01 - математический анализ

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

К И Е В - 1 9 9 4

Работа выполнена в отделе теории [illegible]
математики АН Украины.

Диссертация есть рукопись

Научный руководитель: доктор физико-математических наук ПЕРЕВЕРЗЕВ С.В.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор МАКАРОВ В.Л.

кандидат физико-математических наук ПОЛЯКОВ Р.В.

Ведущая организация: Институт кибернетики им.В.М.Глушкова АН Украины.

Защита состоится "25" октября 1994 г. в 15 часов на заседании специализированного совета Д 016.50.01 при Институте математики АН Украины по адресу :
252601, Киев-4, ГСП, улица Терещенковская, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан "23" сентября 1994 г.

Учёный секретарь
специализированного совета
доктор физико-математических наук ГУСАК Д.В.

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. В последнее десятилетие в связи с потребностями вычислительной математики особое внимание при изучении приближённых методов решения операторных уравнений стало уделяться их оптимизации. Выбор оптимального алгоритма является многокритериальной задачей, среди критериев которой - сложность по времени, по ёмкости (по объёму занимаемой памяти), простота программной реализации, устойчивость и т.п.

В последнее время в теории приближённых методов интенсивное развитие получило направление, связанное с понятием информационной сложности. Это понятие впервые было введено в известной монографии Дж.Трауба и Х.Вожьняковского "Общая теория оптимальных алгоритмов." - М.: Мир, 1983. Оно применяется для обозначения минимального объёма дискретной информации, позволяющего с заданной точностью строить приближённое решение той или иной задачи за минимальное число элементарных операции.

На данном этапе информационная сложность рассматривается в качестве одного из фундаментальных инвариантов теории приближения и численного анализа. Получение достаточно точных оценок этого инварианта для основных типов задач математической физики занимает важнейшее место в теории информационной сложности. Настоящая диссертация находится в русле этой проблематики и посвящена исследованию информационной сложности операторных уравнений, являющихся естественным обобщением некоторых важных типов интегральных уравнений второго рода.

Цель работы заключается в получении точных в степенной шкале оценок информационной сложности для достаточно общих классов операторных уравнений второго рода и в построении алгоритмов, реализующих эти оценки, а также в применении общих результатов для нахождения точных степенных порядков информационной сложности различных классов интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

Методика исследований. Основные результаты диссертации получены с помощью методов современной теории наилучших приближений и функционального анализа. Используются оценки приближения суммами Фурье по различным ортонормированным системам, теоремы о поперечниках компактов, элементы общей теории приближённых методов Л.В.Канторовича.

Научная новизна и практическая значимость. В работе получены следующие основные результаты:

1) установлена общая теорема о нижней и верхней оценках информационной сложности операторных уравнений второго рода, операторы которых и их сопряжённые действуют в различные вложенные подпространства гильбертова пространства;

2) в пространстве функций, суммируемых в квадрате, найден точный степенной порядок информационной сложности уравнений Фредгольма второго рода с ядрами из анизотропных классов функций;

3) в пространстве непрерывных функций найден точный порядок информационной сложности уравнений Фредгольма с ядрами из классов функций, имеющих доминирующую смешанную частную производную;

4) получен ответ на вопрос Г.Вайникко об информационной сложности слабо сингулярных уравнений Пайерлса, возникающих в теории переноса излучения.

Работа носит теоретический характер, при этом результаты диссертации могут быть использованы при решении прикладных задач, связанных с интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями.

Аппробация работы и публикации. Полученные в диссертации результаты докладывались и обсуждались на семинарах отдела теории приближения Института математики АН Украины, на республиканской научной конференции "Экстремальные задачи теории приближения и их приложения" (Киев,1990), на международной научной конференции "Теория приближения и задачи вычислительной математики" (Днепропетровск,1993).

Основные результаты выполненных исследований представлены в публикациях [1-5].

Структура и обьём работы. Диссертация обьёмом 109 страниц машинописного текста состоит из введения, десяти параграфов и списка цитированной литературы из 44 наименований.

Основное содержание работы.

В первом параграфе представлена постановка задачи.

Пусть X и Y - линейные нормированные пространства, а $\mathcal{L}(X,Y)$ - пространство линейных непрерывных операторов H из X в Y с обычной нормой.

Пусть ещё множество $\mathcal{H}\subset\mathcal{L}(X,Y)$ и множество $\Phi\subset Y$ таковы, что операторные уравнения второго рода

$$z = Hz + f \qquad (0.1)$$

однозначно разрешимы в X при любых $H \in \mathcal{H}$ и $f \in \Phi$. Класс таких уравнений будем обозначать $[\mathcal{H},\Phi]$.

Пусть $T = \{ \delta_i \}$ есть набор непрерывных функционалов δ_i, из которых $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ определены на множестве $\mathcal{H}$, а $\delta_{k+1}, \dots, \delta_m$ на множестве $\Phi \subset X$. Каждому уравнению (0.1) из класса $[\mathcal{H},\Phi]$ поставим в соответствие числовой вектор

$$T(H,f) = \Big[\delta_1(H), \dots, \delta_k(H), \delta_{k+1}(f), \dots, \delta_m(f) \Big], \qquad (0.2)$$

который будем называть информацией об уравнении (0.1), а набор функционалов T - способом задания информации. Число функционалов δ_i образующих T, обозначим card(T). Положим

$$\mathcal{T}_M := \{ T: \mathrm{card}(T) \leqslant M \}$$

Под алгоритмом A приближенного решения уравнений из класса $[\mathcal{H},\Phi]$ будем понимать оператор, сопоставляющий информации $T(H,f)$ в качестве приближенного решения уравнения (0.1) элемент $A(T,H,f) \in X$. Мы будем предполагать, что каждый алгоритм A связан с параметрическим семейством элементов F_A, определяемых значениями некоторого количества числовых параметров, т.е.

$$F_A = \left\{ \varphi_{t_1,t \dots,t_n} : \varphi_{t_1,t_2,\dots,t_n} \in X, \ t_i \in \mathbb{R}, \ i=1,2,\dots,n \right\}$$

При этом $A(T,H,f) = \varphi_{t_1,t_2,\dots,t_n}$, где значения t_i, $i=1,2,\dots,n$, зависят от компонентов вектора $T(H,f)$ и для вычисления этих значений требуется выполнить лишь арифметические операции над компонентами $T(H,f)$. Через $\mathcal{A}_N(T)$ обозначим множество алгоритмов A, которые используют информацию $T(H,f)$ и требуют для построения приближённого решения $A(T,H,f) \in F_A$ выполнения не более чем N арифметических операций над компонентами вектора $T(H,f)$. Рассматривая алгоритмы из $\mathcal{A}_N(T)$ естественно предполагать, что $T \in \mathcal{T}_M$, $M \leqslant N$. Как обычно, погрешность $e_X\Big[[\mathcal{H},\Phi],\ A\Big]$ алгоритма A на классе $[\mathcal{H},\Phi]$ в пространстве X определяется соотношением

$$e_X\Big[[\mathcal{H},\Phi],\ A\Big] = \sup_{\substack{z=Hz+f \\ H\in\mathcal{H},\, f\in\Phi}} \Big| z - A(T,H,f) \Big|_X$$

Пусть $\mathcal{T}$ - некоторое множество способов задания информации, а $\mathcal{T}_U$ -множество всевозможных способов задания информации. Тогда положим

$$E_N\Big[[\mathcal{H},\Phi],\ X,\ \mathcal{T}\Big] = \inf_{\substack{T\in\mathcal{T}\cap\mathcal{T}_M \\ M\leq N}} \ \inf_{A\in\mathcal{A}_N(T)} e_X\Big[[\mathcal{H},\Phi],\ A\Big].$$

$$E_N\Big[[\mathcal{H},\Phi],\ X\Big] = E_N\Big[[\mathcal{H},\Phi],\ X,\ \mathcal{T}_U\Big]$$

Величина E_N показывает какую минимальную погрешность можно получить на классе $[\mathcal{H},\Phi]$, выполнив не более чем N элемента. ных. Таким образом, эта величина характеризует информационную сложность уравнений из класса $[\mathcal{H},\Phi]$.

В §2 приведены примеры, иллюстрирующие на практике способы задания информации об уравнениях (0.1) и алгоритмы нахождения приближённых решений уравнений (0.1), а также приведены известные ранее результаты по оптимизации алгоритмов приближённых решений в смысле сложности реализации.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ - некоторая ортонормированная система элементов гильбертова пространства X. Как известно, по методу Галёркина приближённое решение $z_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot e_k$ уравнения (0.1) определяется из уравнения $z_n = P_n H z_n + P_n f$, где P_n ортопроектор из X на подпространство $F_n = span(e_1, e_2, \dots, e_n)$, являющееся линейной оболочкой первых n элементов базиса $\{e_i\}$. При этом неизвестные коэффициенты c_k, находятся из системы линейных уравнений

$$c_k = (f, e_k) + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot (e_k, He_i), \quad i=1,2,\dots,n .$$

где $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение в X.

Таким образом, для реализации метода Галёркина нужно располагать значениями функционалов вида (f, e_k), (e_k, He_i). Способы задания информации, определяемые наборами таких функционалов, будем называть галёркинской информацией.

В §3 приведены некоторые известные факты из функционального анализа и теории аппроксимации, которые используются в дальнейшем. В частности, приведено важное для дальнейшего определение предтабличного поперечника.

Величина

$$A_N\Big[\mathfrak{M},\ X\Big] = \inf_{\varphi:\mathfrak{M}\to\mathbb{R}_N} \ \sup_{x\in\mathfrak{M}} diam\Big[\varphi^{-1}\circ\varphi(x)\Big],$$

где $\mathfrak{M}$ - некоторый компакт в X, а точная нижняя грань берётся по всевозможным отображениям $\mathfrak{M}$ в N-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}_N$, называется предтабличным поперечником.

В четвёртом параграфе даётся определение прямых методов, указываются основные их типы, а также приводятся примеры различных прямых методов.

В §5 доказана общая теорема о точном степенном порядке величины E_N в гильбертовом пространстве.

Пусть X - гильбертово пространство, X^{ν} - вложенное в X нормированное подпространство, для которого в X найдётся ортонормированный базис $\{e_i\}$ такой, что для любого n

$$\left|I-P_n\right|_{X^{\nu}\to X} \leqslant c\cdot n^{-r},$$

где постоянная c не зависит от n, а P_n - ортопроектор на $span(e_1,e_2,\ldots,e_n)$.

Обозначим через $\Psi^{r,s} = \Psi^{r,s}(\alpha_1,\alpha_2,\beta,\gamma)$ класс операторных уравнений (0.1) с операторами

$$H\in\mathcal{H}^{r,s} = \mathcal{H}^{r,s}(\alpha,\beta) = \Big\{ H:\ H\in\mathcal{L}(X\to X^{r}),\ H^{*}\in\mathcal{L}(X\to X^{s}),$$

$$\|H\|_{X\to X^{r}} \leqslant \alpha_1,\ \|H^{*}\|_{X\to X^{s}} \leqslant \alpha_2,\ \|(I-H\ \ )^{-1}\|_{X\to X} \leqslant \beta \Big\}.$$

и свободными членами

$$f \in X^{r}_{\gamma} = \Big\{ f:\ f\in X^{r},\ \ \left|f\right|_{X^{r}} \leqslant \gamma \Big\}.$$

Отметим, что в силу рефлексивности гильбертова пространства X можно считать, что $H^{*}\in\mathcal{L}(X,X)$. Мы же дополнительно требуем, чтобы H^{*} действовал в подпространства $X^{s} \subsetneq X$, т.е. $H^{*}\in\mathcal{L}(X,X^{s})$.

Пусть

$$\Omega_m = \{1\}\times\left[1,2^{2m}\right] \bigcup_{k=1}^{m} \left[2^{k-1},2^{k}\right]\times\left[1,2^{2m-k}\right] \cup$$

$$\cup \left[1,2^{2m}\right]\times\{1\} \bigcup_{k=1}^{m} \left[1,2^{2m-k}\right]\times\left[2^{k-1},2^{k}\right]$$

Рассмотрим галёркинскую информации T_m об уравнениях (0.1) из класса $\Psi^{r,s}$ определяемый набором функционалов

$$T_m(H,f) = \left[(e_i,He_j),(f,e_k);(i,j)\in\Omega_m,\ k=\overline{1,2^{2m}}\right].$$

Поставим теперь в соответствие каждому оператору $H\in\mathcal{H}^{r,s}$ конечномерный оператор

$$H_m = H_m(H) = \sum_{k=1}^{m}\left[P_{2^k}-P_{2^{k-1}}\right]HP_{2^{2m-k}} + P_1HP_{2^{2m}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} P_{2^{2m-k}} H\left(P_{2^k} - P_{2^{k-1}}\right) + P_{2^{2m}} H P_1 - P_{2^m} H P_{2^m}$$

и рассмотрим алгоритм $A_m \in \mathcal{A}_N(T_m)$, $N \asymp m \cdot 2^{2m}$, при котором каждому уравнению (0.1) из класса $\Psi^{r,s}$ в качестве приближенного решения сопоставляется элемент

$$A_m(T_m, H, f) = z_4$$

где z_4 находится из итерационного процесса

$$z_k = z_{k-1} + \left[I - H_m P_{2^n}\right]^{-1} \cdot \left[H_m z_{k-1} - z_{k-1} + P_{2^{2m}} f\right]$$

а z_1 – решение уравнения с конечномерным оператором

$$z_1 = H_m P_{2^n} z_1 + P_{2^{2m}} f, \qquad n = \left[\frac{2m}{3}\right]$$

В дальнейшем соотношение $a_m \ll b_m$ будет означать, что начиная с некоторого m_0, выполняется неравенство $a_m \leqslant c \cdot b_m$, где постоянная c не зависит от m. Кроме того, $a_m \asymp b_m$ означает, что одновременно выполняются соотношения $a_m \ll b_m$ и $b_m \ll a_m$.

Теорема 5.1. ■ Если для предтабличного поперечника $\Delta_N(X_\gamma^r, X)$ имеет место оценка

$$\Delta_N(X_\gamma^r, X) \gg N^{-r},$$

то при $\frac{r}{2} \leqslant s \leqslant r$

$$N^{-r} \ll E_N\left(\Psi^{r,s}, X\right) \ll N^{-r} \cdot \log_2^{r+1} N.$$

При этом оптимальный порядок $E_N(\Psi^{r,s}, X)$ в степенной шкале доставляют галёркинская информация T_m и алгоритм A_m при $m \cdot 2^{2m} \asymp N$. ■

В заключение §5 доказано следствие из этой теоремы.

Пусть $\mathcal{H}$ – произвольное подмножество $\mathcal{H}^{r,s}$. Через $\Psi_{\mathcal{H}}^r$ обозначим класс уравнений (0.1) с операторами $H \in \mathcal{H} \subset \mathcal{H}^{r,s}$ и свободными членами $f \in X_\gamma^r$.

Следствие 5.1. ■ Пусть выполнены условия теоремы 5.1. Для любого $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^{r,s}$

$$N^{-r} \ll E_N\left(\Psi_{\mathcal{H}}^r, X\right) \ll N^{-r} \cdot \log_2^{r+1} N.$$

При этом оптимальный порядок $E_N(\Psi_{\mathcal{H}}^r, X)$ в степенной шкале доставляют алгоритм A_m и галёркинская информация $T_m(H, f)$, $N \asymp m \cdot 2^{2m}$. ■

Результаты §5 опубликованы в работе [5].

В §6 с помощью следствия из теоремы 5.1 найден точный степенной порядок информационной сложности уравнений Фредгольма

$$z(t) = Hz(t) + f(t) = \int_0^1 h(t,\tau)\cdot z(\tau)d\tau + f(t) \qquad (0.2)$$

с ядрами из соболевских классов.

Через $\mathcal{H}_P^{r,s}$ обозначим класс интегральных операторов H из (0.2) для которых $\left\|(I-H)^{-1}\right\|_{L\to L} \leq \beta$, а ядра $h(t,\tau)$ имеют непрерывные частные производные

$$\sum_{0\leq \frac{i}{r}+\frac{j}{s}\leq 1} \left[\int_0^1\int_0^1\left(\frac{\partial^{i+j} h(t,\tau)}{\partial t^i \partial \tau^j}\right)^2 dt d\tau\right]^{\frac{1}{2}} \leq \alpha$$

и рассмотрим класс $\Psi_P^{r,s}$ интегральных уравнений (0.2) со свободными членами f из шара $L^r_{2,\gamma}(0,1)$ радиуса γ в пространстве $L^r_2(0,1)$ функций $f(t)$, у которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на $[0,1]$, а $f^{(r)} \in L_2 = L_2(0,1)$ и операторами $H \in \mathcal{H}_P^{r,s}$.

Теорема 6.1.■ При $\frac{r}{2} \leq s \leq r$ $r,s = 1,2,\ldots$

$$N^{-r} \preceq E_N\left(\Psi_P^{r,s}, L_2(0,1)\right) \preceq N^{-r}\cdot\log_2^{r+1} N.$$

При этом оптимальный порядок в степенной шкале на классе $\Psi_P^{r,s}$ реализует алгоритм A_m и галёркинская информация $T_m(H,f)$, $m\cdot 2^{2m} \asymp N$, построенные на базе ортонормированной системы полиномов Лежандра.■

Замечание.■ Пусть $\mathcal{T}_0$ – множество способов задания информации об уравнениях из класса $\Psi_P^{r,s}$, при которых в качестве функционалов $\delta_i(H)$, $\delta_j(f)$ используются значения ядер $h(t,\tau)$ и свободных членов $f(t)$ в некоторых точках. Отметим, что способы задания информации из $\mathcal{T}_0$ традиционно используются при приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Из результатов К.В.Емельянова и А.И.Ильина следует, что при r=s

$$E_N\left(\Psi_P^{r,s}, L_2(0,1), \mathcal{T}_0\right) \asymp N^{-\frac{r}{2}}$$

Сравнение этого соотношения с теоремой 6.1 показывает, что традиционные способы задания информации об уравнениях Фредгольма второго рода не позволяют строить оптимальные по информационной сложности алгоритмы приближенного решения.■

Результаты §6 опубликованы в работе [5].

В §7 приводится применение теоремы 5.1 к оценке сложности некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений.

Результаты §7 опубликованы в работе [4].

Восьмой параграф посвящён применению теоремы 5.1 для оценки информационной сложности слабо сингулярных уравнений Пайерлса:

$$z(t) = H_b z(t) + f(t) \equiv \int_0^1 E(|t-\tau|)\cdot b(\tau)\cdot z(\tau)d\tau + f(t) \tag{0.3}$$

где

$$E(u) = -c_0 - \ln u + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1}\cdot \frac{u^i}{i\cdot i!}, \quad c_0 \approx 0{,}5772.$$

рассматриваемых в пространстве $L_2(0,1)$.

Пусть $W_2^1(0,1)$ есть пространство Соболева, $W_2^{1/2}(0,1)$ - пространство функций $f\in L_2(0,1)$, для которых

$$\|f\|_{W_2^{1/2}(0,1)} := \|f\|_{L_2^1(0,1)} + \sup_{0<\delta<1} \frac{\omega_2(f,h)}{h^{1/2}} < \infty,$$

где $\omega_2(f,h)$ - интегральный модуль непрерывности функции $f\in L_2(0,1)$, а $B^{1,k}(d)$ - есть множество функций $b(t)$, которые имеют не более чем k точек разрыва первого рода

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_r < t_{r+1} = 1, \quad r = r(b) \leq k,$$

и для $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i=1,2,\dots,r+1$,

$$|b(t)| + \left|\frac{d}{dt} b(t)\right| \leq d$$

Обозначим через $\Psi_P^{1,1/2}$ класс уравнений Пайерлса (0.3) для которых $b(t) \in B^{1,k}(d)$,

$$\left\|\left(I-H_b\right)^{-1}\right\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leq \beta,$$

а свободные члены $f(t)$ принадлежат шару $W^1_{2,\gamma}$ радиуса γ в пространстве $W_2^1(0,1)$.

Теорема 8.1. ■

$$N^{-1} \asymp E_N\left[\, \Psi_P^{1,1/2},\ L_2(0,1)\, \right] \asymp N^{-1}\cdot \log_2^2 N.$$

При этом для класса $\Psi_P^{1,1/2}$ оптимальный порядок информационной сложности в степенной шкале доставляет алгоритм A_m и галёркинская информация $T_m(H_b,f)$, $N \asymp m\cdot 2^{2m}$, построенные на базе системы Хаара.■

Замечание. На симпозиуме по методам решения сингулярных уравнений (Тарту, 1989г.) Г.М.Вайникко поставил вопрос о точном степенном порядке информационной сложности. Теорема 8.1 даёт ответ на вопрос

Г.М.Вайникко для уравнений Пайерлс , возникающих в теории переноса излучения.

Результаты §8 опубликованы в работе [5].

В §9 рассмотрена задача об оценке величины E_N для уравнений Фредгольма, ядра которых принадлежат классу функций с "доминирующей смешанной производной", в пространстве $C = C(0,2\pi)$ непрерывных на $[0,2\pi]$ 2π-периодических функций.

Пусть $C^r = C^r(0,2\pi)$, $r=1,2,\dots$,-пространство r раз непрерывно дифференцируемых 2π-периодических функций с нормой $\|f\|_{C^r} = \|f\|_C + \|f^{(r)}\|_C$, $W^{r,s}$– линейное пространство 2π-периодических по каждой переменной функций $h(t,\tau)$, у которых частные производные

$$h^{(i,j)}(t,\tau)= \frac{\partial^{i+j} h(t,\tau)}{\partial t^i \partial \tau^j}, \quad i=0,1,\dots,r, \; j=0,1,\dots,s,$$

непрерывны на квадрате $Q = [0,2\pi]\times[0,2\pi]$;

$$W^{r,s}_{C,\alpha} = \left\{h: h\in W^{r,s}, \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s} \max_{(t,\tau)\in Q} \left|h^{(i,j)}(t,\tau)\right| \leqslant \alpha \right\}$$

Обозначим через $\mathcal{H}^{r,r}_C = \mathcal{H}^{r,r}_C(\alpha,\beta)$ класс интегральных операторов

$$Hz(t) = \int_0^{2\pi} h(t,\tau)\cdot z(\tau)d\tau$$

для которых $h(t,\tau) \in W^{r,r}_{C,\alpha}$ и $\left\|(I-H)^{-1}\right\|_{C\to C} \leqslant \beta$. Классы уравнений (0.1) со свободными членами $f(t)$ из шара C^r_γ радиуса γ в пространстве C^r и операторами $H \in \mathcal{H}^{r,r}_C$ обозначим через $\Psi^{r,r}_C$.

Пусть

$$\Xi(n) = \left[0,2^n-1\right]\times\left[0,1\right] \bigcup_{m=1}^{2^n-1} \left[0,2^{p(m)}-1\right]\times\left[m,m+1\right],$$

где $p(m)=[\frac{2}{3}\cdot(n-[1+\log_2 m])]$, $m=1,2,\dots,2^n-1$, $[x]$ – целая часть x.

Рассмотрим способ задания информации $T_3(H,f)$ об уравнениях (0.1) из класса $\Psi^{r,r}_C$, определяемый набором функционалов

$$T_3(H,f) = \left\{ \int_Q h(u,v)\cdot\cos(mu-\frac{i\pi}{2})\cdot\cos(kv-\frac{j\pi}{2})du\,dv, \right.$$

$$\left. \int_0^{2\pi} f(u)\cdot\cos(lu-\frac{i\pi}{2})du, \quad (m,k)\in\Xi(n), \; l=0,1,\dots,2^n-1, \; i,j=0,1 \right\}$$

и алгоритм $A_3\in \mathcal{A}_N(T_3)$, при котором каждому уравнению (0.1) из класса

$\Psi_C^{r,r}$ в качестве приближённого решения сопоставляется элемент

$$z(A_n) = A_n(T_8,H,f) = z_n + \left[I-H_nS_{2^q}\right]^{-1}\left[V_{2^{n-1}}f + H_nz_n - z_n\right],$$

где z_n – решение уравнения с конечномерным оператором

$$z_n = H_nS_{2^q}z_n + V_{2^{n-1}}f, \quad q=[\tfrac{n}{3}],$$

V_m и S_m – соответственно суммы Валле Пуссена и Фурье, а H_n – некоторый конечномерный оператор который ставится в соответствие оператору $H \in \Psi_C^{r,r}$ и для построения которого используется информация $T_8(H,f)$.

Теорема 9.1. При $r=1,2,\ldots$

$$E_N\left[\Psi_C^{r,r}, C\right] \asymp N^{-r}$$

При этом точный порядок $E_N\left[\Psi_C^{r,r}, C\right]$ реализует информации $T_8(H,f)$ и алгоритм A_8, $\Xi = \Xi(n)$, где n определяется из соотношения $2^n \asymp N$ ■

В 1986 г. X.Вожьняковский поставил вопрос о точном порядке информационной сложности уравнений Фредгольма второго рода с ядрами и свободными членами из определённых функциональных классов. Теорема 9.1 дает ответ на вопрос X.Вожьняковского для случая уравнений из класса $\Psi_C^{r,r}$.

Результаты §9 опубликованы в работе [1].

В последнем параграфе рассмотрена задача об оценке информационной сложности многомерных уравнений Фредгольма с ядрами из классов функций Соболева в пространстве $L_2(Q^m)$ суммируемых в квадрате на $Q^m = [0,2\pi]^m$.

Пусть $W_2^r(Q^n)$ – пространство Соболева 2π-периодических функций от n переменных, а $W_{2,\gamma}^r(Q^n)$ – шар радиуса γ в этом пространстве.

Обозначим через $\mathcal{H}_{2,m}^r = \mathcal{H}_{2,m}^r(\alpha,\beta)$ класс интегральных операторов

$$Hz(t_1,t_2,\ldots,t_m) = \int_{Q^m} h(t_1,\ldots,t_m,\tau_1,\ldots,\tau_m)\cdot z(\tau_1,\ldots,\tau_m)d\tau_1\ldots d\tau_m,$$

у которых $h \in W_{2,\alpha}^r(Q^{2m})$ и $\left\|\left[I-H\right]^{-1}\right\|_{L_2(Q^m)\to L_2(Q^m)} \leq \beta$,

а через $\Psi_{2,m}^r$ – класс уравнений (0.1) с операторами $H \in \mathcal{H}_{2,m}^r$ и свободными членами $f \in W_{2,\gamma}^r(Q^m)$.

Рассмотрим способ задания информации T_n^{2m} об уравнениях (0.1) из класса $\Psi_{2,m}^r$

$$T_n^{2m}(H,f) = \left\{ \int\limits_{Q^{2m}} h(\vec{u}) \cdot \prod_{i=1}^{2m} \cos(l_i u_i - \frac{\nu\pi}{2})d\vec{u}, \quad \vec{l} \in \Gamma_{2m}(n), \right.$$

$$\left. \int\limits_{Q^m} f(\vec{v}) \cdot \prod_{i=1}^{m} \cos(k_i v_i - \frac{\nu_i \pi}{2})d\vec{v}, \quad \vec{k} \in D_q^m, \quad \nu_i = 0,1 \right\},$$

где $\Gamma_s(n) := \left\{ (\tau_1, \ldots, \tau_s) : \ |\tau_1 \cdots \tau_s| \leqslant n \right\}$, $D_q^m = [0, q-1]$, $q = [\sqrt[m]{n}]$,

а $\vec{k}$ и $\vec{l}$ - векторы с целочисленными координатами и поставим в соответствие каждому оператору $H \in \mathcal{H}_{2,m}^r$ конечномерный оператор

$$H_n z(t_1, t_2, \ldots, t_m) = \int\limits_{Q^m} h_n(t_1, t_2, \ldots, t_{2m}) \cdot z(\tau_{m+1}, \ldots, \tau_{2m}) dt_{m+1} \ldots dt_{2m},$$

где

$$h_n(t_1, t_2, \ldots, t_{2m}) = \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \cdot \sum_{\vec{l} \in \Gamma_{2m}(n)} 2^{\mu(\vec{l})} \times$$

$$\times \int\limits_{Q^{2m}} h(\tau_1, \ldots, \tau_{2m}) \cdot \prod_{i=1}^{2m} \cos l_i (t_i - \tau_i) d\tau_1 \ldots d\tau_{2m},$$

а $\mu(\vec{l})$ - число компонентов вектора $\vec{l}$, отличных от нуля.

Рассмотрим ещё алгоритм $A_n^m \in \mathcal{A}_N(T_n^{2m})$, при котором каждому уравнению (0.1) из класса $\Psi_{2,m}^r$ в качестве приближенного решения сопоставляется элемент

$$z(A_n^m) = A_n(T_n^{2m}, H, f) = z_p + \left[I - H_n S_p^m \right]^{-1} \left[S_q^m f + H_n z_p - z_p \right]$$

где z_p - решение уравнения

$$z_p = H_n S_p^m z_p + S_q^m f, \qquad p = [\sqrt[3m]{n}], \qquad q = [\sqrt[m]{n}],$$

$$S_\nu^m f(\vec{t}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \cdot \int\limits_{Q^m} \sum_{\vec{k} \in D_\nu^m} 2^{\mu(\vec{k})} \cdot \prod_{i=1}^{m} \cos k_i (t_i - \tau_i) \cdot f(\vec{\tau}) d\vec{\tau},$$

$\vec{k}$ - вектор с целочисленными координатами.

Теорема 10.1. ■ При r, $m = 1, 2, \ldots$ имеет место соотношение

$$N^{-\frac{r}{m}} \asymp E_N\left[\Psi_{2,m}^r ; L_2 \right] \ll N^{-\frac{r}{m}} \cdot (\log N)^{\frac{2m-1}{m}}$$

Оптимальный порядок $E_N\left[\Psi_{2,m}^r , L_2 \right]$ реализует способ задания информации $T_n^{2m}(H,f)$ и алгоритм A_n^m. ■

Результаты §10 опубликованы в работах [2,3].

Автор благодарит своего научного руководителя доктора физико-математических наук С.В.Переверзева за внимание и постоянную помощь в работе.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Шарипов К.К. Сложность уравнения Фредгольма II рода с ядрами из классов с доминирующей смешанной производной // Укр.мат.журн. - 1990. - 42, № 8. - С. 1138-1145.
2. Шарипов К.К. Оценка сложности решений многомерных уравнений Фредгольма II рода.// Респ. науч. конф. "Экстремальные задачи теории приближения и их приложения", Киев, 29-31 мая 1990 г.: Тез. докл.- Киев, 1990.- С. 142.
3. Шарипов К.К Оценка сложности приближённых решений многомерных уравнений Фредгольма II рода.// Современные вопросы теории приближения и комплексного анализа.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990.- С. 127-136.
4. Шарипов К.К. Сложность решения некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений // Міжнар. конф. "Теорія наближення та задачі обчислювальної математики", Дніпропетровськ, 26-28 трав. 1993 р.: Тез. доп.- Вид-во ДДУ, 1993.- С. 209.
5. Pereverzev S.V, Scharipov C.K. Information complexity of equations of the second kind with compact operators in Hilbert space //J. of Complexity. - 1992.- 8.- P.176-202.

Подп. в печ. 15.02.94. Формат 60×84/16. Бумага тип. Офс. печать.
Усл. печ. л. 0,93. Усл. кр.-отт. 0,93. Уч. - изд.л. 0,6. Тир.
100 экз. Зак.18 Бесплатно.

Подготовлено и отпечатано в Институте математики АН Украины
252601 Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3