Академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

АХМЕТОВ Марат Убайдуллович

НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ В СИСТЕМАХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

01.01.02 - диференціальні рівняння

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття вченого ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ - 1994

517.95

ЛННБ України ім.В.Стефаника
00373789 (.)

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі диференціальних та інтегральних рівнянь Київського університету імені Тараса Шевченка

Науковий консультант - доктор фізико-математичних наук,
професор ПЕРЕСТЮК М.О.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор НАГАЄВ Р.Ф.

доктор фізико-математичних наук,
професор ПОКОРНИЙ Ю.В.

доктор фізико-математичних наук,
професор СЛЮСАРЧУК В.Є.

Провідна установа - Санкт-Петербурзький університет.

Захист дисертації відбудеться "25" жовтня 1994 року о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д.016.50.02 при Інституті математики АН України за адресою: 252601 Київ - 4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Інституту.

Автореферат розіслано "20" вересня 1994 р.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

Вчений секретар
спеціалізованої ради ЛУЧКА А.Ю.

Ав-30,837

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дослідження систем з розривними траєкторіями є зараз одним з найбільш важливих і цікавих напрямків у теорії диференціальних рівнянь і знаходять застосування при створенні віброударних механізмів, імпульсних систем автоматичного регулювання, обчислювальних систем, а також у біології та медицині.

У київській школі нелінійної механіки розгорнуто широку дослідницьку програму застосування методів якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь, еволюційних рівнянь, теорії оптимального керування, стохастичних рівнянь до систем з розривними траєкторіями. Різні аспекти цієї програми розглядалися у роботах А.М.Самойленка, М.О.Перестюка та їх учнів А.А.Асланяна, М.М.Астаф'євої, О.В.Вишенської, С.І.Гургули, М.Ілолова, В.В.Іщука, К.К.Єлгондиєва, І.Каркинбаєва, В.П.Лісовської, К.Ю.Мамси, Ю.В.Роговченка, В.Г.Самойленка, О.М.Станжицького, Ю.В. Теплинського, В.І.Ткаченка, С.І.Трофимчука, В.Н.Шовкопляса, О.С.Черникової.

Поряд з вказаним підходом відомі і розвиваються інші методи. Так, в роботах А.А.Андронова, Н.Н.Баутіна, Ю.П.Неймарка та їх учнів динамічні системи вивчалися за допомогою методу точкових відображень.

Як один з основних при вивченні руху у віброударних системах І.І.Блехман, А.Е.Кобринський, М.З.Коловський, Р.Ф.Нагаєв застосовували метод припасування.

Як математичну модель імпульсних систем, а також для опису і керування дискретними динамічними системами успішно застосовували рівняння в скінченних різницях В.Б.Ларін, В.Є.Слюсарчук, Я.З.Ципкін.

Під керівництвом Ю.В.Покорного розробляється теорія механічних моделей, в яких розриви відбуваються за просторовою змінною.

Імпульсні системи можна розглядати як рівняння зі збуреннями типу розподілів. Такий підхід визначає дослідження С.Т.Завалищина, А.Н.Сесекіна, Р.Ф.Нагаєва, Д.Векслера

Роботи Є.А.Барбашина, Я.Курцвейля, С.Швабіка сприяли тому, що у вивченні процесів з розривами знайшли застосування поняття міри, апарат інтегралів Стільт'єса, Перона, функції обмеженої варіації.

Задачі імпульсного керування присвячено багато робіт школи М.М.Красовського, дослідження під керівництвом В.Б.Ларіна, а також роботи М.Х.Розова, А.С.Ковальової, Т.Р.Гичева.

З численними застосуваннями пов'язаний розвиток диференціальних рівнянь з розривною правою частиною, який був здійснений в дослід женнях А.А.Андронова, М.А.Айзермана, Н.Н.Баутіна, Ф.Р.Гантмахера, В.І.Благодатських, Є.А.Леонтович, С.В.Ємельянова, Ю.І.Неймарка, В.І. Уткіна, А.Ф.Філіпова.

Серед великої різноманітності диференціальних рівнянь з імпульсною дією та методів їх дослідження виділимо клас систем, в яких розв'язки зазнають розривів при досягненні поверхні в розширеному фазовому просторі або на множині у фазовому просторі. Такі системи називають *системами з імпульсною дією у нефіксовані моменти часу.* Якраз до таких рівнянь приводить більшість задач віброударної техніки. Важливість їх дослідження ще в 1967 році підкреслювали А.Д.Мишкіс і А.М.Самойленко (Мышкис А.Д., Самойленко А.М. Системы с толчками в заданные моменты времени// Мат. сб. - 1967. - Т. 74, вып. 2. - С. 202 - 208.). Але систематичного, з використанням досить загального методичного підходу дослідження не проводилося.

Мета роботи. Розвиток методів дослідження диференціальних рівнянь з імпульсною дією у нефіксовані моменти часу, диференціальних рівнянь з розривною правою частиною та застосування їх для вивчення задачі про періодичні, майже періодичні і рекурентні розв'язки та інтегральні поверхні.

Методика дослідження. Застосовуються методи якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь, диференціальних рівнянь з розривною правою частиною та теорія диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

Наукова новизна. *Практична та теоретична цінність.* Робота має теоретичний характер.

Відмітимо основні результати та положення, які визначають наукову новизну і виносяться на захист:

Зведення до вивчення систем рівнянь, в яких імпульсні збурення проходять у фіксовані, попередньо вибрані належним чином моменти часу. Таке зведення відбувається за допомогою локальної (в околі поверхні розриву) деформації інтегральних кривих.

Представлення системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією на поверхнях як елемента топологічного або метричного простору-добутку, співмножниками якого є простори, які визначаються 1) правими частинами диференціальних рівнянь імпульсної системи; 2) відображеннями, які визначають стрибок розв'язку при імпульсній дії; 3) функціями, які задають поверхні розриву. На основі такого представлення стало можливим застосування методів та прийомів теорії динамічних систем.

1. У множині кусково-неперервних функцій, які, взагалі кажучи, не ма-

ють спільних точок розриву, спеціальним чином означена топологія. На її основі вивчені загальні властивості нелінійних імпульсних систем: існування та єдиність розв'язків, неперервна залежність від початкових даних та параметрів. Введене означення стійкості за Ляпуновим розв'язків диференціальних рівнянь з імпульсною дією у нефіксовані моменти часу.

2. Визначені достатні умови існування обмежених, періодичних та майже періодичних розв'язків слабонелінійних імпульсних систем, права частина яких задовольняє умову Ліпшиця. Досліджується стійкість таких систем.

3. Вводиться означення диференціальної залежності довільного скінченного порядку та аналітичної залежності розв'язків диференціальних рівнянь з імпульсною дією у нефіксовані моменти часу. Встановлені достатні умови, за яких існують похідні скінченного порядку і можливе розвинення розв'язків в ряд за початковими даними та параметрами. Побудовано алгоритм визначення коефіцієнтів розвинення в ряд.

4. Метод малого параметра Пуанкаре-Ляпунова застосовано для встановлення необхідних та достатніх умов існування періодичних та майже періодичних розв'язків нелінійних систем. Розглядаються критичний та некритичний випадки. Визначені умови, за яких можливий асимптотичний розвиток за малим параметром періодичних розв'язків слабонелінійних рівнянь та наведено спосіб побудови такого розвитку. Узагальнено теорему Ляпунова-Пуанкаре про стійкість періодичного розв'язку нелінійної імпульсної системи та теорему про умовну стійкість такого розв'язку. Вивчено задачу про існування та стійкість періодичного та майже періодичного розв'язків системи з імпульсною дією на поверхнях, близької до довільної нелінійної.

5. Доведено твердження про існування інтегральних та локально інтегральних поверхонь слабонелінійних імпульсних систем, відповідна однорідна система для яких є експоненціально дихотомічною (е.д.). Доводиться узагальнення теореми Ляпунова-Перона про умовну стійкість точки спокою. Досліджуються диференціальні властивості інтегральних поверхонь. На слабконелінійні импульсні системи поширюється принцип зведення.

6. Досліджуються диференціальні властивості розв'язків та ковзаючих режимів диференціальних рівнянь з розривною правою частиною. Наведено означення диференціальної залежності довільного скінченного порядку і аналітичної залежності розв'язків від початкових даних та параметрів. Даються достатні умови гладкості розв'язків. Вивчено задачу

про існування періодичних розв'язків нелінійних систем з розривною правою частиною в критичному випадку та для рівняння, близького до довільного нелінійного.

7. Введено означення метричного та топологічного просторів кусково-неперервних функцій, на основі яких визначаються та вивчаються властивості розривних майже періодичних (м.п.) функцій. Доведено узагальнення теорем Амеріо та Фавара, здійснено перевірку справедливості узагальнення теореми Е.Мухамадієва, теореми В.М.Міліонщикова про існування граничних рекурентного та майже періодичного розв'язків для неавтономної системи з імпульсною дією на поверхнях, досліджено задачу про регулярність лінійного диференціального оператора з умовою розриву, встановлено зв'язок цієї властивості з експоненціальною дихотомією.

Розроблені в дисертації методи дослідження диференціальних рівнянь з імпульсною дією в нефіксовані моменти часу, диференціальних рівнянь з розривною правою частиною можна застосовувати до широкого класу нелінійних диференціальних рівнянь. Результати можуть бути використані при створенні віброударних механізмів, в теорії імпульсного керування, при розв'язанні задачі синтезу керування за допомогою ковзаючих режимів.

Апробація роботи. Результати, включені в дисертацію, доповідалися на Всесоюзній науковій конференції "Нелінійні проблеми диференціальних рівнянь та математичної фізики" (м.Тернопіль, 1989), Республіканських школах-семінарах "Розривні динамічні системи" (м. Київ, 1989; м.Івано-Франківськ, 1990; м.Ужгород, 1991), Розширеному семінарі по теорії машин та механізмів "Механіка віброударних систем" (м.Москва, 1988, 1992), Республіканських міжвузівських конференціях по математиці та механіці (м.Алма-Ата, 1984, 1989), Воронезьких математичних школах (1992, 1993), Першій українсько-американській математичній школі (м. Судак, 1993), Міжнародній конференції "Нелінійні проблеми диференціальних рівнянь та математичної фізики - другі боголюбовські читання" (м.Київ, 1993), на семінарах: МДУ під керівництвом професорів В.М.Міліонщикова, М.Х.Розова, В.А.Кондрат'єва (1984, 1992), ІМ АН України під керівництвом академіка Ю.О.Митропольського (1993), ІММ Уральського відділення РАН під керівництвом проф. С.Т.Завалішина (1991), "Механобрі" під керівництвом проф. І.І.Блехмана (1992), НДІ математики Воронезького університету під керівництвом проф. Ю.В.Покорного, Інституті механіки АН України під керівництвом проф. В.Б.Ларіна, а також семінарах по диференціальних рівняннях у Київському університеті.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в работах [1 - 31]. Із спільних публікацій в дисертацію включені тільки результати, отримані дисертантом самостійно.

Об'єм та структура. Дисертаційна робота складається з вступу, шести розділів та списку літератури з 196 назв і викладена на 237 сторінках.

Основний зміст роботи

У вступі наводиться короткий огляд методів, які використовуються різними авторами в теорії систем з розривними розв'язками. Описуються дві модельні механічні задачі, дослідження яких можна звести до диференціальних рівнянь з імпульсною дією в нефіксовані моменти часу. Дано опис основних наукових результатів роботи.

У першому розділі дано загальний опис методу зведення для рівнянь з імпульсною дією у нефіксовані моменти часу. Наведено достатні умови існування обмеженого розв'язку, існування та стійкості періодичного та майже періодичного розв'язків слабконелінійної імпульсної системи, права частина якої задовольняє умову Ліпшиця.

У §1 викладені загальні питання теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією на поверхнях.

Нехай I - числовий проміжок із R. Розглянемо множину Ξ_I неперервних зліва з розривами першого роду функцій, визначених на I, які приймають значення в R^n. Припускається, що множина точок розриву кожної з цих функцій не більш, ніж злічена і не має скінченних граничних точок в R^1.

Нехай $\varepsilon > 0$ - фіксоване число. Будемо говорити, що функція $y(t) \in \Xi_I$ знаходиться в ε-околі функції $x(t) \in \Xi_I$, якщо 1) точки розриву функції $y(t)$ розміщені в ε-околах точок розриву функції $x(t)$; 2) для всіх $t \in I$, які не лежать в ε-околах точок розриву функції $x(t)$, справедлива нерівність $\|x(t) - y(t)\| < \varepsilon$.

Сукупність ε-околів, $\varepsilon \in (0, \infty)$, всіх елементів множини Ξ_I утворює базу топології, яку назвемо В-топологією.

Нехай дана система диференціальних рівнянь з імпульсною дією на поверхнях, що має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad t \neq T_i(x), \qquad \Delta x|_{t=T_i(x)} = \Phi_i(x), \tag{1}$$

в якій $x \in R^n$, функції F і Φ визначені та неперервні для всіх $t \in R$, $x \in R^n$, $i \in Z$ (Z - множина цілих чисел), поверхні розриву такі, що $T_i(x) < T_{i+1}(x)$, $i \in Z$.

Далі під правою частиною імпульсної системи виду (1) будемо розуміти трійку $\{F, \{\Phi_i\}, \{T_i\}\}$.

Нехай $x(t)$ - розв'язок системи (1), $t = \tau_i$ - впорядкована послідовність точок розриву цього розв'язку.

Будемо говорити, що розв'язок $x(t)$ задовольняє α-умову, якщо існує число $\theta \in R^1, \theta > 0$, таке, що для всіх i: $\tau_{i+1} - \tau_i \geq \theta$; β-умову, якщо знайдеться ціле число $k \geq 0$ таке, що кожний одиничний відрізок дійсної прямої R містить не більше, ніж k точок послідовності τ_i.

Якщо кожний розв'язок системи (1) задовольняє α-умову (β -умову) з одним і тим же числом θ (відповідно k), то будемо говорити, що система (1) задовольняє α-умову (β-умову).

Припустимо, що $x(t)$ задовольняє хоча б одну з умов α чи β і визначений на проміжку $\bar{I} = [a, \infty)$ при деякому $a \in R$. Тоді розв'язок називається нескінченно продовжуваним вправо.

Означення 1.1. *Розв'язок $x(t)$ системи (1) називається B-стійким за Ляпуновим (просто B-стійким), якщо для довільних ε та $t_0 \geq a$ існує дійсне число $\delta > 0$ таке, що розв'язок $y(t)$ цієї системи, який задовольняє умову $\|x(t_0) - y(t_0)\| < \delta$, знаходиться в ε-околі розв'язку $x(t)$ на проміжку $I = [t_0, +\infty)$. Точка t_0 не повинна бути точкою розриву розв'язків $x(t)$ та $y(t)$.*

Означення 1.2. *Розв'язок $x(t)$ рівняння (1) називається нестійким, якщо для деяких $\varepsilon > 0$ і $t_0 \in \bar{I}$ та довільного $\delta > 0$ існує такий розв'язок $y(t)$, що $\|x(t_0) - y(t_0)\| < \delta$, точка t_0 не є точкою розриву розв'язків і $y(t)$ не належить ε-околу $x(t)$ на проміжку $I = [t_0, +\infty)$.*

Означення 1.3. *B-стійкий розв'язок $x(t)$ системи (1) називається B асимптотично стійким, якщо він B-стійкий і існує таке дійсне число $\delta > 0$, що для всіх $\varepsilon > 0$, $t_0 > a$ та розв'язку $y(t)$, $\|x(t_0) - y(t_0)\| < \delta$ знайдеться дійсне число $\theta > t_0$ таке, що $y(t)$ належить ε-околу $x(t)$ при $I = [\theta, +\infty)$.*

Загальна характеристика методу зведення. Застосування методу зведення до системи (1) полягає в тому, що деякі її властивості досліджуються на основі вивчення відповідних властивостей рівняння

$$\frac{dy}{dt} = F(t, y), \quad t \neq \tau_i, \qquad \Delta y|_{t=\tau_i} = W_i(y), \tag{2}$$

де τ_i - деяка впорядкована послідовність дійсних чисел, $W_i : R^n \to R^n$ -

спеціальним чином побудовані відображення.

Нехай $\Omega_x \subset R^n$ - обмежена область, Ω_t - обмежений інтервал і $j \geq 0$, $k > 0$ - цілі числа. Позначимо

$$\Omega = \{(t, x, i) \mid t \in \Omega_t, x \in \Omega_x, i = \overline{j, j+k}\}$$

Нехай Γ_i - поверхні розриву для (1). Припустимо, що їх можна записати у вигляді $t = \tau_i + \theta_i(x)$, $\mid \theta_i(x) \mid \leq \nu < +\infty$, $i \in Z$.

Далі символом $[a \overset{\vee}{,} b]$ будемо позначати відрізок $[a, b]$, якщо $a \leq b$ і відрізок $[b, a]$, якщо $b \leq a$. Зафіксуємо i. Нехай $x_0(t)$ - розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \qquad x(t_i) = x. \tag{3}$$

Позначимо $t = \theta_i$ - момент зустрічі розв'язку $x_0(t)$ з Γ_i. Вважаючи, що розв'язок $x_1(t)$ рівняння (3) з початковою умовою $x_1(\theta_i) = x_0(\theta_i) + \Phi_i(x_0(\theta_i))$ визначений на проміжку $[\tau_i \overset{\vee}{,} \theta_i]$, побудуємо відображення

$$W_i : x \to x_1(t_i) - x$$

або

$$W_i(x) = \int_{\tau_i}^{\theta_i} F(u, x_0(u))du + \Phi_i(x + \int_{\tau_i}^{\theta_i} F(u, x_0(u))du) + \int_{\theta_i}^{\tau_i} F(u, x_1(u))du.$$

Будемо говорити, що системи (1) і (2) B-еквівалентні в області $G \subset R^n$, якщо для довільного розв'язку $x(t)$ рівняння (1), визначеного на проміжку $U \subset R$, який має точки розриву $t = \theta_i$ і такого, що $x(t) \in G$, $t \in U$, існує розв'язок $y(t)$ рівняння (2), який визначений на U і задовольняє умови

$$y(t) = x(t), \qquad t \notin (\theta_i \overset{\vee}{,} \tau_i]. \tag{4}$$

Навпаки, для кожного розв'язку $y(t)$ системи (2), $y(t) \in G, t \in U$ існує розв'язок $x(t), t \in U$ системи (1), який задовольняє умову (3).

Припустимо, що функції F, Φ_i, T_i рівномірно за x в Ω задовольняють умову Ліпшиця зі сталою K і

$$\sup_{\Omega} \|F\| \quad \sup_{\Omega} \|\Phi\| = M < +\infty$$

Нехай також $T_i : \Omega_x \to \Omega_t$. Зафіксуємо деякі $x_0 \in \Omega_x$ і $\bar{H} \in R, \bar{H} > 0$ так, щоб $\bar{H} > M(1 + 2\nu)$ і множина $\{x \in R^n : \|x - x_0\| \leq \bar{H}\}$ була включена в Ω_x. Позначимо також $h = \bar{H} - M(1 + 2\nu)$, $H = \bar{H} - M(1 + \nu)$.

Теорема 1.1. *1) Для кожного* $i = \overline{j, j+k}$ *функція* W_i *існує і визначена на множині* $\Omega_h = \{x \in R^n : \|x - x_0\| \leq h\}$; *2) для довільних* $x, \bar{x} \in \Omega_h$ *та кожного цілого числа* i *справедлива нерівність* $\|W_i(\bar{x}) - W_i(x)\| \leq k(l, K)\|x - y\|$, *де* $k(l, K)$ *- обмежена функція; 3) рівняння (1) і (2) є* *області Ω_h B-еквівалентні, причому, якщо розв'язок системи (1) або (2) приймає значення в Ω_h, то відповідний йому в силу B-еквівалентності розв'язок приймає значення в Ω_H.*

На основі теореми 1.1 доводяться теореми про існування та єдиність розв'язків, неперервну залежність розв'язків від початкових даних та параметрів.

У §2 розглядається система диференціальних рівнянь з імпульсною дією на поверхнях вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x), \quad t \neq \tau_i + \theta_i(x),$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i+\theta_i(x)} = B_i x + I_i(x), \tag{5}$$

в якій $x \in R^n$, матриці $A(t)$, $t \in R$, B_i, $i \in Z$ розміру $n \times n$, функція $f(t,x)$ неперервна при $t \in R$, матриці $(E + B_i)$, $i \in Z$, невироджені.

Поряд з системою (5) будемо розглядати відповідну лінійну систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \neq \tau_i, \qquad \Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x. \tag{6}$$

Припускаємо, що функції f, I_i, θ_i рівномірно за x задовольняють умову Ліпшиця зі сталою l, а система (5) періодична з періодом $\omega > 0$. Це означає, що $A(t+\omega) = A(t)$, $f(t+\omega,x) = f(t,x)$, $t \in R$ і існує ціле число $p > 0$, для якого $\tau_{i+p} = \tau_i + \omega$, $\theta_{i+p}(x) = \theta_i(x)$, $B_{i+p} = B_i$, $I_{i+p}(x) = I_i(x)$, $i \in Z$. Рівняння (6) не має характеристичних показників з нульовою дійсною частиною.

Доведено теорему про достатні умови для існування єдиного періодичного розв'язку, який буде B - стійким, якщо дійсні частини всіх характеристичних показників системи (6) від'ємні.

У §3 припускається, що система є майже періодичною (м.п.), тобто A і f м.п. за Бором за змінною t, послідовності B_i і I_i м.п. за i рівномірно за x, послідовності τ_i^j, $i \in Z$, $\tau_i^j = \tau_{i+j} - \tau_i$, $j \in Z$, одностайно майже періодичні (о.м.п.).

Розв'язок $x(t)$ системи (5) називається м.п., якщо для довільного дійсного числа $\varepsilon > 0$ існує відносно щільна на дійсній осі R множина чисел T така, що для кожного $\tau \in T$ функція $x(t+\tau)$ належить ε - околу розв'язку $x(t)$ при $I = R$.

У припущенні, що матриця Коші системи (6) задовольняє нерівність

$$\|X(t,\tau)\| \leq K \exp(-\alpha(t-\tau)), \qquad -\infty < \tau \leq t < +\infty, \tag{7}$$

де $K \geq 1$ і $\alpha > 0$ - дійсні сталі, доведено, що при досить малій сталій Ліпшиця l рівняння (5) має єдиний B-асимптотично стійкий м.п. розв'язок. Розглянуто також випадок, коли система (6) періодична і не має характеристичних показників з нульовою дійсною частиною.

Питання про достатні умови існування обмежених розв'язків слабконелінійної системи з експоненціально дихотомічною (е.д.) лінійною частиною досліджується у четвертому параграфі.

Другий розділ присв'ячено вивченню диференціальних властивостей розв'язків систем рівнянь з нефіксованими моментами імпульсної дії.

Нехай $\Omega_t \times \Omega_x \subset R_+ \times R^n$ - обмежена область, $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, $x_0 = (x_0^1, ..., x_0^n)$ - розв'язок рівняння (1) з точками розриву $t = \tau_i, i = \overline{1, k}$. Позначимо $h_0 = \Delta t$, $(h_1, ..., h_n) = \Delta x$, $h = (h_0, ..., h_n)$.

Будемо говорити, що розв'язок $x(t)$ має B-похідні за початковими даними t_0 і x_0 до l-го ($l \geq 1$) порядку включно, якщо при досить малому $\|h\|$ існує розв'язок $\bar{x}(t) = x(t, t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x)$ і для нього виконуються умови

$$1) \quad \bar{x}(t) - x(t) = P_l(t, t_0, x_0) + o(\|h\|^l), \quad t \notin [\tau_i, \theta_i], \quad i = \overline{1, k}; \tag{8}$$

$$2) \quad \theta_i - \tau_i = Q_l^i(t_0, x_0) + o(\|h\|^l), \quad i = \overline{1, k}; \tag{9}$$

де θ_i - точка розриву розв'язку $\bar{x}(t)$, P, Q - поліноми порядку l відносно h, коефіцієнти яких симетричні відносно перестановки індексів і неперервно залежать від t_0, x_0.

Відповідні коефіцієнти поліномів P_l, Q_l^i, $i = \overline{1, k}$, утворюють $k + 1$-ки, які назвемо B-похідними розв'язку $x(t)$ за початковими даними.

Розв'язок $x(t)$ називається B-аналітичним за x_0, якщо розв'язок $x(t, t_0, x)$, де x взято з досить малого околу x_0, задовольняє умови:
1) для всіх $t \notin [\tau_i, \theta_i]$, де θ_i - точки розриву розв'язку $x(t, t_0, x_0)$, можливе розвинення цього розв'язку в ряд за степенями координат вектора $x - x_0$;
2) різниці $\theta_i - \tau_i$ при кожному i також розвивається в ряд за степенями координат вектора $x - x_0$.

Означення гладкості розв'язку імпульсної системи за параметром аналогічні наведеним вище означенням гладкості за початковими даними.

В даному розділі визначені умови, при яких рівняння з імпульсною дією на поверхнях припускають B-похідні довільного порядку за початковими даними та параметрами. Доведено також теореми про умови, при яких має місце B-аналітична залежність розв'язків від початкових даних та параметрів. Побудовано асимптотичне представлення розв'язків регулярно обурених систем.

В розділі 3 розглядається задача про існування періодичних та майже періодичних розв'язків імпульсних систем з гладкою правою частиною. На такі системи поширюється метод малого параметра Пуанкаре-Ляпунова.

Предметом дослідження перших двох параграфів є система, яка має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t) + \mu\varphi(t,x,\mu), \qquad t \neq \tau_i + \mu\theta_i(x,\mu),$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i+\mu\theta_i(x,\mu)} = B_i x + I_i + \mu\Psi_i(x,\mu), \tag{10}$$

в якій $x \in R^n$, $A(t)$, $t \in R$, - неперервна розміру $n \times n$ матриця, B_i, $i \in Z$ - квадратні порядку n сталі матриці, $\det(E+B_i) \neq 0$, функція f неперервна для всіх $t \in R$. Система (10) є ω-періодичною, тобто існують числа $\omega \in R$, $\omega > 0$, та $p \in Z$, $p > 0$, для яких $A(t+\omega) = A(t)$, $\varphi(t+\omega,x,\mu) = \varphi(t,x,\mu)$, $f(t+\omega) = f(t)$, $B_{i+p} = B_i$, $\Psi_{i+p}(x,\mu) = \Psi_i(x,\mu)$, $I_{i+p} = I_i$, $\theta_{i+p}(x,\mu) = \theta_i(x,\mu)$, $\tau_{i+p} = \tau_i + \omega$ рівномірно за $i \in Z, t \in R$.

Припустимо, що породжуюче рівняння має єдиний ω-періодичний розв'язок $x_0(t)$ і позначимо $\Omega_x = \{x \in R^n : \|x - x_o\| \leq d, 0 \leq t \leq \omega\}$, де $d > 0$ - фіксоване число, Ω_t - деякий окіл для $[0,\omega]$ в R, $\Omega_\mu = (-\mu_0, \mu_0)$, де $\mu_0 > 0$ - фіксоване число. Нехай $\Omega = \Omega_t \times \Omega_x \times \Omega_\mu$, $\varphi \in C^{(0,1,1)}(\Omega)$, $\theta_i, \Psi_i \in C^{(1,1)}(\Omega_x \times \Omega_\mu)$, $i = \overline{1,p}$.

Теорема 3.1. *При достатньо малому $|\mu|$ система (10) має єдиний ω-періодичний розв'язок $x(t,\mu)$, який при $\mu \to 0$ в B-топології прямує до розв'язку $x_0(t)$ породжуючого рівняння.*

Якщо всі мультиплікатори відповідної для (10) системи (6) розміщені всередині одиничного круга, то розв'язок $x(t,\mu)$ при достатньо малому $|\mu|$ B-асимптотично стійкий.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ так, що Ω_ε - об'єднання ε-околів точок $\tau_i, i = \overline{1,p}$, міститься в $[0,\omega]$. Розглянемо систему (10), припускаючи додатково, що функції $\varphi, \theta_i, \psi_i$ голоморфні за t в області $\Omega_\varepsilon \times \Omega_x \times \Omega_\mu$.

Теорема 3.2. *При достатньо малому $|\mu|$ система (10) припускає єдиний розв'язок $x(t,\mu)$ періоду ω, який B-аналітично залежить від μ в точці $\mu = 0$ і при $\mu \to 0$ прямує в B-топології на проміжку $I = [0,\omega]$ до породжуючого розв'язку $x_0(t)$.*

Розглянемо систему (10) при умові, що відповідна однорідна система (6) має k $(1 < k \leq n)$ періодичних з періодом ω розв'язків $\varphi_i, i = \overline{1,k}$, які утворюють максимальну лінійно незалежну систему. Припускаємо, що для деякого цілого $l \geq 1$:

$$A(t), f(t) \in C^{l-1}(\Omega_\varepsilon) \cap C^l(\Omega_t), \quad \theta_i, \psi_i \in C^l(\Omega_x \times \Omega_\mu),$$

$$\varphi \in C^{(l-1,l,l)}(\Omega_t \times \Omega_x \times \Omega_\mu) \cap C^{(0,l,l)}(\Omega).$$

Спряжена до (6) система

$$\frac{dy}{dt} = -A^T(t)y, \quad t \neq \tau_i, \qquad \Delta y|_{t=\tau_i} = -(E + B_i^T)^{-1} B_i^T y \quad . \qquad (11)$$

(T - знак транспонування) також має k лінійно незалежних ω- періодичних розв'язків. Складемо з них матрицю $H(t)$ розміру $n \times k$ і припустимо, що виконується рівність

$$\int_0^\omega H(t)f(t)dt + \sum_{i=1}^p H(\tau_i)I_i = 0,$$

тоді породжуюче для (10) рівняння припускає k-параметричне сімейство ω-періодичних розв'язків $x(t,\alpha) = \alpha_1\varphi_1 + ... + \alpha_k\varphi_k + \varphi_0$, де $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$, φ_0 - частковий розв'язок цього рівняння.

Теорема 3.3. *Нехай рівняння $\nu(\alpha) = 0$, де*

$$\nu(\alpha) = \int_0^\omega H^T(t)\varphi(t, x(t,\alpha), 0)dt + \sum_{i=1}^p H^T(\tau_i)[\Psi(x(\tau_i,\alpha), 0) - \\ - A(\tau_i)(B_i x(\tau_i,\alpha) + I_i)\theta_i(x(\tau_i,\alpha), 0)],$$

припускає розв'язок $\alpha = \alpha_0$, для якого $\det(\nu'_{\alpha_0}) \neq 0$. Тоді при достатньо малому $|\mu|$ система (10) має розв'язок $x(t,\mu)$ періоду ω, який при $\mu \to 0$ прямує в B-топології до розв'язку $x(t,\alpha_0)$, і зображення

$$x(t,\mu) = x(t,\alpha_0) + \mu x_1(t) + ... + \mu^{l-1}x_{l-1}(t) + \mu^{l-1}\xi_l(t,\mu),$$

справедливе для всіх $t \notin (\tau_i, \nu_i]$, де ν_i - точка розриву розв'язку $x(t,\mu)$. Для кожного і: $|\tau_i - \nu_i| \to 0$ при $\mu \to 0$.

Наведено приклад, який ілюструє теореми 3.1 і 3.2.

Аналогічно до неавтономних систем в §3 розглядається задача існування асимптотичного зображення за малим параметром періодичних розв'язків автономної квазілінійної імпульсної системи в критичному випадку.

Узагальнення теореми Ляпунова-Пуанкаре про стійкість ω-періодичного розв'язку системи з імпульсною дією (1) доведено в §4.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \mu g(t,x,\mu), \quad t \neq \tau_i(x) + \mu\theta_i(x,\mu),$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i(x)+\mu\theta_i(x,\mu)} = I_i(x) + \mu W_i(x,\mu). \qquad (12)$$

Нехай $\Omega_x \times \Omega_\mu \subset R^n \times R^1$ - обмежена область, Ω_μ - окіл нуля, $\Omega = \{(x,t,\mu,i) : x \in \Omega_x, t \in R, \mu \in \Omega_\mu, i \in Z\}$. Припускаємо, що система (12) визначена в Ω. Нехай рівняння, що породжує (12), є ω-періодичним і припускає єдиний ω-періодичний розв'язок $x_0(t)$ з точками розриву $t = \theta_i$, $0 < \theta_1 < ... < \theta_p < \omega$, причому $\theta'_{ix}(x_0(\theta_i))f(\theta_i, x_0(\theta_i, \tau)) \neq 1$.

У §5 доведено дві теореми, що наводяться нижче. Припустимо спочатку, що система (12) є ω-періодичною.

Теорема 3.4. *Нехай мультиплікатори системи рівнянь у варіаціях відносно розв'язку $x_0(t)$ не рівні одиниці. Тоді при досить малому $|\mu|$ рівняння (12) припускає ω-періодичний розв'язок $x(t,\mu)$, який при $\mu \to 0$ прямує в B-топології до $x_0(t)$. Якщо крім того всі мультиплікатори розміщені всередині одиничного круга, то розв'язок $x(t,\mu)$ B-асимптотично стійкий.*

Нехай тепер в (12) функція g м.п. за Бором за t, W_i і θ_i м.п. послідовності рівномірно в Ω.

Теорема 3.5. *Якщо система рівнянь у варіаціях відносно розв'язку $x_0(t)$ не має мультиплікаторів на одиничному колі, то при достатньо малому $|\mu|$ система (12) припускає єдиний м. п. розв'язок, який при $|\mu| \to 0$ прямує в B-топології до $x_0(t)$.*

Крім того, в §5 проведено аналіз задачі про існування періодичних розв'язків системи (12) у випадку, коли породжуюче рівняння має неізольований ω- періодичний розв'язок. Визначені умови, при яких система (12) має періодичний з періодом ω розв'язок, який прямує в B-топології до одного з періодичних розв'язків породжуючого рівняння.

Наведено приклад однієї віброударної системи, для якої на основі теорем 3.4 та 3.5 доведено існування коливних розв'язків.

У §6 ω-періодична система виду (1) розглядається при умові, що вона припускає k-параметричне сімейство ω-періодичних розв'язків $x(t,\lambda)$, $\lambda \in R^k$. Доведено теорему про умовну B-асимптотичну стійкість розв'язку $x(t,\lambda)$ відносно деякого $(n-k)$ - вимірного многовиду.

У §7 досліджено питання про існування періодичних розв'язків нелінійного імпульсного рівняння з малим параметром. При умові, що породжуюче рівняння має неізольований періодичний розв'язок, отримані умови, при яких сама система припускає в околі породжуючого розв'язку періодичний розв'язок.

У розділі 4 досліджено питання існування інтегральних поверхонь слабонелінійної системи виду (5). Додатково до умов §2 розділу 1 припускаємо, що початок координат є точкою спокою системи.

У §1 доведено аналог теореми Ляпунова-Перона, показано, що при умові експоненціальної дихотомічності для відповідної системи (6) рівняння (5) припускає локальні інтегральні поверхні Φ_+ та Φ_-. Розв'язки, які починаються на поверхнях Φ_+ та Φ_-, прямують до початку координат відповідно при $t \to +\infty$, $t \to -\infty$. Далі, в §5, за рахунок посилення умов на поверхнях розриву вдається застосувати метод зведення уже у всьому просторі R^n та довести узагальнення теореми Ляпунова-Перрона.

У §2 досліджено диференціальні властивості інтегральних поверхонь, існування яких доведено у попередньому параграфі. Показано, що якщо права частина рівняння (5) має деяку властивість гладкості, то аналогічну властивість мають поверхні Φ_+ та Φ_-.

У §3 розглядається імпульсна система вигляду

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = A(t)x + f_1(t,w),\\ \frac{dy}{dt} = Cy + f_2(t,w), \quad t \neq \tau_i + \theta_i(w),\\ \Delta x|_{t=\tau_i+\theta_i(w)} = B_i x + I_i^1(w), \quad \Delta y|_{t=\tau_i+\theta_i(w)} = I_i^2(w),\end{gathered} \tag{13}$$

$w = (x,y)$, $x \in R^n, y \in R^m$. Припускаємо, що відповідна система (6) така, що виконується умова (7), власні числа матриці C мають невід'ємні дійсні частини і справедлива умова Ліпшиця

$$\begin{gathered}\|f_j(t,w) - f_j(t,\bar{w})\| + \|I_i^{(j)}(w) - I_i^{(j)}(\bar{w})\| +\\ +|\theta_i(w) - \theta_i(\bar{w})| \leq l\|w - \bar{w}\|, \quad j = 1,2.\end{gathered} \tag{14}$$

Доведено теорему про необхідні та достатні умови існування локальних інтегральних поверхонь Φ_+ та Φ_- для системи (13).

У §4 наведені умови на поверхні розриву, при яких метод зведення можна застосувати у всьому просторі R^n.

У §6 принцип зведення поширюється на імпульсні слабконелінійні системи з сталими коефіцієнтами при частині змінних.

Нехай імпульсна система (1) визначена на множині $R^n \times R$ і Υ - інтегральна поверхня цієї системи. Нехай $\tau \in R$, позначимо $\Upsilon_\tau = \{x \in R^n : (\tau, x) \in \Upsilon\}$.

Означення 4.1. *Розв'язок $x(t)$ знаходиться в ε-околі поверхні Υ на проміжку $I \subset R$, якщо $x(t)$ визначений на цьому проміжку і для всіх $\tau \in I$, розміщених поза ε-околами точок розриву розв'язку $x(t)$, точка $x(\tau)$ належить ε-околу множини Υ_τ, тобто справедлива нерівність* $\inf_{x \in \Upsilon_\tau} \|x(\tau) - x\| < \varepsilon$.

Означення 4.2. *Інтегральна поверхня Υ B-стійка, якщо для кожного $\varepsilon \in R$, $\varepsilon > 0$ знайдеться дійсне число $\delta > 0$ таке, що довільний розв'язок $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, для якого t_0 не є точкою розриву і x_0 розміщена в ε-околі множини Υ_{t_0}, знаходиться в ε-околі поверхні Υ при $I = [t_0, +\infty)$.*

Означення 4.3. *Інтегральна поверхня Υ B-асимптотично стійка, якщо існує число $\Delta \in R, \Delta > 0$ таке, що для кожного дійсного числа $\varepsilon > 0$ та розв'язку $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, для якого $t = t_0$ не є точкою розриву і x_0 належить Δ-околу множини Υ_{t_0}, знайдеться дійсне число $\theta > t_0$ таке, що $x(t)$ належить ε-околу поверхні Υ при $I = [\theta, +\infty)$.*

Означення 4.4. *Інтегральна поверхня Υ називається B-стійкою в цілому, якщо для неї число Δ в попередньому означенні можна вибрати довільним.*

Нехай інтегральна поверхня Ψ_- системи (13) задається рівнянням $x = Q(t, y)$. Тоді на цій поверхні система зводиться до рівняння

$$\frac{dy}{dt} = Cy + f_2(t, Q(y,t), y), \quad t \neq \tau_i + \theta_i(Q(y,t), y),$$
$$\Delta y|_{t=\tau_i+\theta_i(Q(y,t),y)} = I_i^{(2)}(Q(y,t), y). \tag{15}$$

Теорема 4.1. *При досить малій сталій Ліпшиця l інтегральна поверхня Ψ_- системи (13) B-стійка в цілому.*

Теорема 4.2. *Якщо система рівнянь (13) критична і в (14) $l \to 0$ при $\|w\| + \|\bar{w}\| \to 0$, то стійкість, асимптотична стійкість та нестійкість нульового розв'язку цієї системи мають місце тоді і тільки тоді, коли нульовий розв'язок системи (15) буде стійким, асимптотично стійким чи нестійким.*

У розділі 5 досліджується гладкість розв'язків та ковзних режимів диференціальних рівнянь з розривною правою частиною.

Нехай $\Omega = \Omega_t \times \Omega_x \subset R^1 \times R^n$ - обмежена область, $\Gamma_i, i = \overline{1,p}$ - поверхні в $R^1 \times R^n$, означені рівняннями $t = \tau_i(x)$. Припускаємо, що поверхні Γ_i можуть перетинатися по $(n-1)$-вимірній гіперповерхні або не мати жодної спільної точки і розбивають Ω на області Ω_k, $k = \overline{1,m}$. На об'єднанні Ω_0 множин Ω_k означимо кусково-неперервну функцію $f(t,x)$. Припустимо, що вона разом зі своїми похідними неперервна на кожній з множин Ω_k.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь виду

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x). \tag{16}$$

Дослідимо диференціальні властивості ковзних режимів рівняння (16). Ковзними режимами називаються розв'язки, що рухаються по поверхні розриву і задовольняють на цій поверхні рівняння, отримане на цій поверхні за допомогою довизначення за А.Ф.Філіповим.

У вступі наведено загальний опис рівнянь, що вивчаються. Виділено чотири класи рівнянь в залежності від поведінки розв'язків відносно поверхонь розриву: 1) системи, розв'язки яких перетинають поверхню розриву; 2) системи, розв'язки яких, потрапляючи на поверхню розриву, переходять у ковзний режим; 3) рівняння, розв'язки яких є ковзними режимами, які потрапляючи на $(n-1)$-вимірну поверхню, переходять з однієї поверхні розриву на другу; 4) системи, розв'язки яких спочатку ковзають по поверхні розриву, а потім сходять з поверхні при досягненні деякої кривої. Сформульовано теореми про неперервну залежність розв'язків від початкових даних та правої частини рівняння. Під правою частиною рівняння з розривною правою частиною розуміємо сукупність функції $f(t,x)$ і функцій, які визначають поверхні розриву цієї функції.

У §1 дається означення диференціальної залежності розв'язків від початкових даних та параметрів довільного скінченного порядку. Для кожного типу рівнянь, що розглядаються, будується система зведення і на її основі по аналогії з імпульсними системами формулюються теореми про достатні умови існування похідних за початковими даними та за параметром.

У §2 узагальнена теорема Пуанкаре про розвинення в ряд за координатами початкових значень та за параметром.

§3 присвячено дослідженню за допомогою методу малого параметра питання про періодичні розв'язки рівняння з розривною правою частиною. Розглядається рівняння виду

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\mu), \quad x \in R^n, \tag{17}$$

права частина якого ω-періодична за t. У припущенні, що породжуюче рівняння припускає k-параметричне сімейство ω-періодичних розв'язків $\varphi(t,\lambda), \lambda \in R^k$, даються достатні умови для існування у системи (17) при достатньо малому $|\mu|$ розв'язку періоду ω, який при $\mu \to 0$ прямує до $\varphi(t,\lambda_0)$, де $\lambda = \lambda_0$ визначається як розв'язок алгебраїчного рівняння.

Узагальнено теорему І.Г.Малкіна про існування періодичного розв'язку системи, близької до довільної нелінійної, в критичному випадку. Наведено приклад застосування даної теореми.

Розділ 6 присвячено дослідженню питання про існування розривних м.п. розв'язків систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією.

У §1 вводиться означення розривної м.п. функції. Для цього в просторі кусково-неперервних функцій вводиться метрика, основана на результатах А.М.Колмогорова та А.В.Скорохода.

Позначимо через $\Re$ множину кусково-неперервних функцій, означених на дійсній осі R, виключаючи злічепну множину точок розриву першого роду (для різних функцій із $\Re$ точки розриву не обов'язково співпадають). Множина точок розриву функції із $\Re$ не має скінченних граничних елементів і необмежена зліва та справа.

Функції f і g із $\Re$ назвемо ε-еквівалентними і позначимо $f \sim^{\varepsilon} g$, якщо: а) точки розриву цих функцій можна занумерувати t_k^f, t_k^g, $k \in Z$, припускаючи скінченну кратність в порядку розміщення на осі R так, що $|t_k^f - t_k^g| < \varepsilon$; б) існують послідовності строго зростаючих чисел t_k, t_k', $|t_k|, |t_k'| \to +\infty$ при $|k| \to \infty$, для яких справедливі співвідношення $\sup_{t \in (t_k, t_{k+1}), t' \in (t_k', t_{k+1}')} \|f(t) - g(t')\| < \varepsilon$, $|t_k - t_k'| < \varepsilon, k \in Z$.

Нехай $\rho(f, g) = \inf_{f \sim^{\varepsilon} g} \varepsilon$ - число, яке визначає відстань між функціями f і g. Зафіксуємо $\varphi \in \Re$ і позначимо через $\Re_{\varphi}$ множину функцій f із $\Re$, для яких $\rho_{\varphi}(f, g) = \rho(f, g)$ - скінченне число.

Лема 6.1. $\Re_{\varphi}$ - *метричний простір.*

Означення 6.1. *Функція $\varphi \in \Re$ називається м.п., якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться відносно щільна множина дійсних чисел Γ, для кожного елемента τ якої справедлива нерівність $\rho(\varphi(t + \tau), \varphi(t)) < \varepsilon$.*

Доведено, що м.п. функція $\varphi(t)$ обмежена разом з послідовністю $\theta_{i+1} - \theta_i$, $i \in Z$, де θ_i - точки розриву функції $\varphi(t)$, рівномірно неперервна на сукупності інтервалів неперервності. Доводиться аналог теореми Бохнера.

Введено простір D злічених множин дійсних чисел на дійсній прямій R^1 та вивчені їх властивості.

Нехай $\Re_I$ - множина кусково-неперервних функцій з розривами першого роду у скінченній множині точок, означених на відрізку $I \in R$. Аналогічно відстані $\rho(f, g)$ для функцій із $\Re$ вводиться відстань $\rho_I(f, g)$ для функцій множини $\Re_I$. Доводиться, що $\Re_I$ - метричний простір.

У другому параграфі вивчається питання про існування єдиного асимптотично стійкого м.п. розв'язку системи інтегро-диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу

$$\frac{dx}{dt} = A(t) + f(t, x, \int_t^{t+\sigma} \omega(t, s, x) ds), \quad t \neq \tau.$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x + I_i(x, \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Psi(s,x)ds). \tag{18}$$

Припускаємо, що $A(t)$ - м.п. за Бором функція, f - м.п. за t функція, B_i, I_i - м.п. послідовності і відповідна (18) однорідна система (6) - експоненціально дихотомічна, функція ω - м.п. за t і s, а функція Ψ - м.п. за s, послідовності τ_i^j - одностайно м.п. Права частина рівняння (18) задовольняє умову Ліпшиця.

У третьому параграфі для імпульсних систем узагальнено теореми Амеріо та Фавара. Використовується H-клас, побудований як замикання в метричному просторі-добутку, означеному по правій частині імпульсної системи.

У §4 досліджується регулярність лінійного диференціального оператора з умовою розриву. Встановлено зв'язок цієї властивості з експоненціальною дихотомією. Доведено узагальнення теореми Е.Мухамадієва про регулярність м.п. лінійного диференціального оператора з умовою розриву.

Позначимо через $\tilde{\Re}$ простір функцій із $\Re$ з топологією збіжності в метриці кожного простору $\Re_I$, де I - відрізок із R.

Нехай також $\varphi^s = \varphi(t+s), s \in R$, - зсув за часом функції $\varphi(t)$. Означимо абстрактну динамічну систему, траєкторіями якої є зсуви функції $\varphi \in \Re$ уздовж числової прямої R.

Функція $\varphi \in \Re$ називається рекурентною, якщо рекурентною є траєкторія φ^s у топології $\tilde{\Re}$.

Розглянемо імпульсну систему

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \neq \tau_i(x), \qquad \Delta x|_{t=\tau_i(x)} = I_i(x), \tag{19}$$

в якій $x \in R^n$, функції $f, I, \tau, t \in [t_0, +\infty) = R_+, i = 0,1,2,...$ неперервні за x на деякому компакті $K \in R^n$. При довільному $x \in K$ вірно, що $f(t,x) \in \Re_{R_+}$, послідовність I_i обмежена рівномірно в K, система (19) задовольняє β-умову.

Означення 6.2. *Функція $x^*(t)$ називається граничним розв'язком рівняння (19), якщо для деякої послідовності розв'язків $x_k(t)$ цієї системи і послідовності зсувів $\theta_k, \theta_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, послідовність $x_k(t+\theta_k)$ збігається до $\dot{x}^*(t)$ в кожному просторі $K_I, I \subset R$.*

Наступні теореми є узагальненнями для імпульсних систем результатів В.М.Міліонщикова.

Теорема 6.1. *Якщо система (19) припускає розв'язок $x_0(t) \in \Re_{R_+}$, то існує граничний рекурентний розв'язок цієї системи.*

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

Означення 6.3. *Розв'язок $x_0(t)$ системи (19) називається усталеним, якщо для довільних чисел $\varepsilon > 0$ і $T \leq 0$ знайдуться дійсні числа $\delta > 0$ і θ такі, що якщо $\tau'' \geq \tau' \geq \theta$ і $\|x_0(\tau') - x_0(\tau'')\| \leq \delta$, то $\rho_{[T,+\infty)}(x_0(\tau' + t), x_0(\tau'' + t)) < \varepsilon$.*

Теорема 6.2. *Нехай $x_0(t), x_0 \in \Re_{R_+}$ - усталений розв'язок рівняння (19). Тоді граничний рекурентний розв'язок $x^*(t)$ цієї системи майже періодичний.*

Основні положення дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Ахметов М.У. Почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием// Дифференц. уравнения. - 1984. - 20, N. 5. - С. 911 - 912.

2. Ахметов М.У. Об устойчивости периодических решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием// Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. - Алма-Ата. - 1986. - С. 8 - 13.

3. Ахметов М.У. Почти периодические решения интегро-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием// Мат. физика и нелинейн. механика. - 1987. - 8. - С. 5 - 9.

4. Ахметов М.У., Перестюк Н.А. О периодических решениях систем с импульсным воздействием// Изв. АН КазССР. - Сер. физ.-мат. наук. - 1984. - N. 1. - С. 13 - 17.

5. Ахметов М.У., Перестюк Н.А. О почти периодических решениях одного класса систем с импульсным воздействием// Укр. мат. журн. - 1984. - 36, N. 4. - С. 486 - 490.

6. Ахметов М.У., Перестюк Н.А. Почти периодические решения нелинейных импульсных систем// Докл. АН УССР. - Сер. А. - 1988. - N. 1. - С. 3 - 6.

7. Ахметов М.У., Перестюк Н.А. О движении с импульсным воздействием на поверхностях// Изв. АН КазССР. - Сер. физ.-мат. наук. - 1988. - N. 1. - С. 11 - 14.

8. Ахметов М.У. Интегральные поверхности квазилинейных импульсных систем// Всесоюзн. конф. по нелинейн. проблемам дифференц. уравнений и мат. физики, Тернополь, 12 -15 сент. 1989 г.: Тез. докл. - Тернополь, 1989. - С. 14.

9. Ахметов М.У. Периодические решения неавтономных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в критическом случае// Изв. АН КазССР. - Сер. физ.-мат. наук. - 1991. - N. 3. -

С. 62 - 65.

10. Ахметов М.У. Реккурентные и почти периодические решения неавтономных импульсных систем//Изв. АН КазССР. - Сер. физ.-мат. наук. - 1988. - N. 3. - С. 8 - 10.

11. Ахметов М.У., Перестюк Н.А. Почти периодические решения нелинейных импульсных систем// Укр. мат. журн. - 1989. - 41, N. 3. - С. 291 - 296.

12. Самойленко А.М., Перестюк Н.А., Ахметов М.У. Метод сравнения для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. - Киев, 1989. - 42 с. - (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 89.3).

13. Ахметов М.У., Перестюк Н.А. О дифференцируемой зависимости решений импульсных систем от начальных данных// Укр. мат. журн. - 1989. - 41, N. 8. - С. 1028 - 1033.

14. Ахметов М.У., Перестюк Н.А. Устойчивость периодических решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях// Укр. мат. журн. - 1989. - 41, N. 12. - С. 1596 - 1601.

15. Перестюк Н.А., Ахметов М.У. О почти периодических решениях импульсных систем// Укр. мат. журн. - 1987. - 39, N. 1. - С. 74 - 80.

16. Ахметов М.У., Перестюк Н.А. О методе сравнения для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием// Дифференц. уравнения. - 1990. - 26, N. 9. - С. 1475 - 1483.

17. Самойленко А.М., Перестюк Н.А., Ахметов М.У. Дифференциальные свойства решений и интегральных поверхностей нелинейных импульсных систем. - Киев, 1990. - 50 с. - (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 90.11).

18. Ахметов М.У., Перестюк Н.А. Периодические решения квазилинейных импульсных систем в критическом случае// Укр. мат. журн. - 1992. - 44, N. 1. - С. 5 - 11.

19. Ахметов М.У., Перестюк Н.А. Асимптотическое представление решений регулярно-возмущенных систем дифференциальных уравнений с неклассической правой частью// Укр. мат. журн. - 1991. - 43, N. 10. - С. 1298 - 1305.

20. Ахметов М.У., Перестюк Н.А. О существовании В-производных высшего порядка решений импульсных систем по начальным данным// Изв. АН КазССР. - Сер. физ.-мат. наук. - 1991. - N. 1. - С. 15 - 17.

21. Ахметов М.У. О разложении в ряд по начальным значениям и параметрам решений дифференциальных уравнений с разрывной правой частью// Укр. мат. журн. - 1993. - 46, N. 5. - С. 724 - 727.

22. Ахметов М.У., Перестюк Н.А. Дифференциальные свойства решений и интегральных поверхностей нелинейных импульсных систем// Дифференц. уравнения. - 1992. - 28, N. 4. - С. 555 -566.

23. Ахметов М.У., Перестюк Н.А. Периодические и почти периодические решения сильно нелинейных импульсных систем// Прикл. математика и механика. - 1992. - 56, вып. 6. - С. 926 - 934.

24. Ахметов М.У. О применении метода малого параметра к нелинейным импульсным системам// Тез. докл. шк. "Современные методы в теории краевых задач", Воронеж, 2 - 9 мая 1992 г. - Воронеж, 1992. - С. 8.

25. Ахметов М.У. О методе исследования дифференциальных свойств решений систем с разрывной правой частью// Нелинейные проблемы дифференц. уравнений и матем. физики - вторые боголюбовские чтения, Киев, 28 сент. - 2 окт. 1993 г.: Тез. докл. - Киев, 1992. - С. 12.

26. Ахметов М.У. Периодические решения сильно нелинейных систем с неклассической правой частью в случае семейства порождающих решений// Укр. мат. журн. - 1993. - 45, N. 2. - С. 202 - 208.

27. Ахметов М.У. Периодические решения систем дифференциальных уравнений с неклассической правой частью, содержащей малый параметр// Асимптотические решения нелинейных уравнений с малым параметром. - Киев, 1991. - С. 11 - 15.

28. Ахметов М.У. Интегральные множества слабонелинейных импульсных систем// Теория функций, дифференциальные уравнения в математическом моделировании, Воронеж, 2 - 9 сент. 1993 г.: Тез. докл. - Воронеж, 1993. - С. 14.

29. Ахметов М.У. О гладкости решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях// Дифференц. уравнения. - 1992. - 28, N. 11. - С. 2007 - 2008.

30. Ахметов М.У., Перестюк Н.А. О методе сравнения в пространстве R^n// Укр. мат. журн. - 1993. - 46, N. 6. - С. 753 - 763.

31. Ахметов М.У. О гладкости решений дифференциальных уравнений с разрывной правой частью// Укр. мат. журн. - 1993. - 46, N. 12. - С. 1587 - 1594.

Підп. до друку 25.04.94. Формат 60×84/16. Папір друк. Офс. друк
Ум. друк. арк. 1,39. Ум. фарбо-відб. 1,39. Обл.-вид. арк. 1,0.
Тираж 100 пр. Зам. 117 Безкоштовно.

Підготовано і віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ-4, ГСП, вул. Терещенківська, 3.

Ab 30.837

Ab 30.837