НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

МОСКАЛЬЦОВА Натела Валентинівна

# АНАЛІТИЧНИЙ ПІДХІД ДО ЦЕНТРАЛЬНОЇ ГРАНИЧНОЇ ТЕОРЕМИ ВІД ЕРГОДИЧНИХ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА

01.01.05 – теорія імовірностей
та математична статистика

## А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 1994

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор ШУРЕНКОВ В.М.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор КАРТАШОВ М.В.
кандидат фізико-математичних наук ВИНЕВШИН Я.Ф.

Провідна установа: Київський політехнічний інститут

Захист відбудеться "18" 10 1994 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.04 при Інституті математики НАН України за адресою:
252601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці інституту.

Автореферат розісланий "16" 09 1994 р.



Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фізико-математичних наук ГУСАК Д.В.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Дослідження, пов'язані з центральною граничною теоремою для ергодичних ланцюгів Маркова, стали традиційним розділом сучасної теорії випадкових процесів. Цю тематику розвивали такі автори як Є.М. Каллан, Д.С. Сільвестров, К.Л. Чжун, С.В. Нагаєв та багато інших математиків. Останнім часом цей напрям досліджень отримав додатковий імпульс завдяки зусиллям Е. Нуммеліна, П. Нея, К. Атрея та інших вчених, що висунули концепцію так званих штучних моментів регенерації. При цьому можна виділити декілька підходів до центральної граничної теореми, які відрізняються не стільки технічно, скільки ідеологічно.

Як відомо, початковим об'єктом для вивчення будь-якого, а у нашому випадку ергодичного, ланцюга Маркова виступає імовірність переходу за один крок $P(x,A)$, $x \in E$, $A \in \mathcal{A}$, де $(E,\mathcal{A})$ – це фазовий простір ланцюга. Знаючи імовірність переходу, ми маємо повну інформацію про розподіли усіх функціоналів на даному ланцюгу, не торкаючись питання про обчислення цих розподілів. Зокрема, можна припустити, що нам відомі розподіли моментів повернення та накопичених сум до цих моментів. Саме такий підхід використав у своїй монографії "Загальні непризвідні ланцюги Маркова та невід'ємні оператори" Еса Нуммелін. Одним із очевидних мінусів такого підходу є неоднозначність вибору моменту повернення ланцюга, тобто моменту штучної регенерації.

У даній роботі запропоновано альтернативний підхід. Він також пов'язаний з повним апріорним знанням перехідної імовірності. Знаючи $P(x,A)$, можна вважати, що нам відомі потенціали ( або резольвенти ) $R_t(x,A)=\sum\limits_{n\geq 0} t^n P^n(x,A)$, де $P^n(x,A)$ – імовірність переходу за $n$ кроків. Ергодичність ланцюга, як автор розуміє її у запропонованій роботі, рівносильна тому, що $\lim\limits_{t\uparrow 1}(1-t)R_t(x,A)=\pi(A)$ для всіх $x\in E, A\in\mathcal{A}$, де $\pi(\cdot)$ – єдиний імовірнісний розподіл ланцюга.

Виходячи з останнього твердження, виникає питання про структуру тих $\mathcal{A}$-вимірних обмежених функцій $f$, для яких існує границя

$$\lim_{t\uparrow 1} R_t f(x). \tag{1}$$

М е т а  р о б о т и якраз і полягає у відповіді на це питання.

Необхідна умова існування границі (1) :

$$\langle\pi, f\rangle=\int_E \pi(dx)f(x)=0. \tag{2}$$

Виявляється – це і є один із наших основних висновків, – що таких функцій існує досить багато. Їх лінійними комбінаціями можна апроксимувати яку завгодно $\mathcal{A}$-вимірну функцію $f$, що задовольняє умову (2). Більш того, значення границі (1) може бути записаним у вигляді $\int_E W(x,dy)f(y)$, де знакозмінне ядро $W(x,A)$ задовольняє деякій послабленій умові обмеженості.

Таким чином, ядро $W(x, A)$ можна розглядати як деяку апріорну характеристику ланцюга на відміну від штучних моментів регенерації, вибір яких, як було зазначено вище, є неоднозначним. У той же час, ядро у тісний спосіб пов'язане з моментами регенерації.

Існування границі $(1)$ у деякому сенсі гарантує асимптотичну нормальність нормованих сум $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n$, де $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$, до того ж, дисперсія граничного нормального закону має вираз через ядро $W(x, A)$.

**Метод дослідження** полягає у застосуванні результатів про асимптотичну поведінку потенціалів ергодичних ланцюгів як аналітичного апарату для центральних граничних теорем.

**Наукова новизна** результатів дисертаційної роботи полягає у наступному:

1. Для певного класу функцій $f$ доведено збіжність за Абелем потенціалу $\sum_{n \geq 0} P^n f(i)$ однорідного ергодичного ланцюга Маркова у зліченному фазовому просторі. Зроблено ряд висновків, корисних для потреб центральної граничної теореми для ланцюгів Маркова, зокрема, умова, еквівалентна скінченності другого моменту часу першого повернення до стану.

2. На підставі результатів, що стосуються поведінки потенціалу зліченного ергодичного ланцюга Маркова, для певних класів функцій доведено асимптотичну нормальність випадкової посли-

довності $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n$. Асимптотичну нормальність центрованих частот здобуто без застосування умови скінченності другого моменту часу першого повернення до стану ланцюга.

3. Доведено теореми про існування потенціалу ергодичного ланцюга Маркова у довільному фазовому просторі та деякі наслідки.

4. Отримано умови асимптотичної нормальності стохастично адитивних функціоналів від ергодичних ланцюгів Маркова у довільному фазовому просторі.

5. Внаслідок попередніх результатів поширено деякі класи $n$-вимірних функцій $f$, для яких має місце асимптотична нормальність випадкової послідовності $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$ для ланцюгів Маркова у довільному фазовому просторі.

Теоретична та практична цінність роботи. Робота має теоретичний характер. Результати, отримані в дисертації, можуть мати практичну цінність у зв'язку з дослідженнями, що пов'язані з вивченням процесів Маркова та суміжних питань теорії випадкових процесів.

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на Другому українсько-угорському симпозіумі "Нові напрямки в теорії імовірностей та математичній статистиці" (Мукачево, 27 вересня – 3 жовтня 1992 р.), на III Донецькій міжнародній конференції "Імовірнісні моделі процесів в управлінні та надійності" (Маріуполь, 6 – 11 вересня 1993 р.) та на семінарах відділів теорії випадкових процесів та теорії імовірностей та математичної статистики Інституту математики НАН України.

Публікації. Результати дисертації опубліковані у чотирьох друкованих працях [1 – 4].

Структура роботи. Дисертація складається із вступу, двох розділів та списку літератури, що містить 28 найменувань. Загальний обсяг роботи становить 78 сторінок друкованого тексту.

## ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовується актуальність обраного напрямку досліджень, наводиться стислий огляд робіт по темі дисертації і дається перелік основних отриманих результатів.

Перший розділ містить результати, які стосуються зліченних ергодичних ланцюгів. В § 1 розглядаються потенціали однорідних ергодичних ланцюгів. $B_0$ – клас всіх фінітних функцій на фазовому просторі $E$, тобто обмежених функцій $f$, що дорівнюють нулю всюди, окрім деякої скінченної множини з $E$, для яких $\sum_{i\in E}\pi_i f(i)=0$. Доведено, що коли функція $f$ належить до класу $B_0$, то границя (1) існує та є скінченною для всіх точок фазового простору. Доведено три наслідки, зокрема, наслідок 3 надає умову, еквівалентну скінченності другого моменту часу першого повернення до стану. У § 2 на підставі попередніх результатів для потенціалу ланцюга доведено центральну граничну теорему, яка установлює асимптотичну нормальність випадкової послідовності $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$ для тих функцій $f$, що належать класу $B_0$. Доведено, що середнє граничного нормального розподілу дорівнює нулю, а дисперсію виражено через деяке невід'ємне ядро $V$.

Другий розділ присвячений ергодичним ланцюгам Маркова у довільному фазовому просторі $(E, \mathcal{A})$ зі злічено породженою $\sigma$-алгеброю $\mathcal{A}$. У § 1 наведено наступні поняття.

Означення 1. Сукупність $\mathcal{A}$-вимірних множин називатимемо мізерним класом $\mathcal{E}$, якщо вона замкнена відносно скінченного об'єднання своїх елементів та містить всі їх $\mathcal{A}$-вимірні підмножини.

Означення 2. Якщо деякий клас $\mathcal{E}$ містить таку зліченну послідовність своїх елементів, що покриває весь простір $E$, то він називається повним.

Означення 3. $\mathcal{A}$-вимірну функцію $f$ називатимемо $\mathcal{E}$-фінітною, якщо вона дорівнюватиме нулю всюди окрім деякої множини класу $\mathcal{E}$.

Означення 4. Невід'ємне ядро $W$ будемо називати $\mathcal{E}$-обмеженим, якщо виконано умову $\sup_{x\in E} W(x,D)<\infty$ для всіх множин $D$ із класу $\mathcal{E}$.

Знакозмінне ядро називатимемо $\mathcal{E}$-обмеженим, якщо його можна представити у вигляді різниці двох невід'ємних $\mathcal{E}$-обмежених ядер.

Через $B_0(\mathcal{E})$ позначено клас обмежених $\mathcal{E}$-фінітних функцій $f$, для яких виконано (2). Доведено дві теореми про існування потенціалу ланцюга та їх наслідок. Наведемо формулювання однієї з цих теорем повністю.

ТЕОРЕМА 1. Існує такий мізерний повний клас $\mathcal{E}^{\circ}$ та таке $\mathcal{E}$-обмежене ядро $W$, що $\lim_{t\uparrow 1} R_t f(x) = Wf(x)$ для всіх $x \in E$ та для всіх функцій $f$ класу $\mathbb{B}_0(\mathcal{E})$.

Суттєво використовуючи цей результат, у § 2 другого розділу доведено центральну граничну теорему.

ТЕОРЕМА 2. Існує такий мізерний повний клас $\mathcal{E}^{\circ}$ та таке $\mathcal{E}$-обмежене ядро $W$, що для всіх $f \in \mathbb{B}_0(\mathcal{E}^{\circ})$ випадкова послідовність $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$ асимптотично нормальна з нульовим середнім та дисперсією $\sigma^2 = 2\langle \pi, g\rangle - \langle \pi, f^2\rangle$, де $g(x) = f(x)Wf(x)$.

Як наслідок цієї теореми, отримані деякі корисні результати, зокрема, здобуто асимптотичну нормальність центрованих частот без застосування умови скінченності другого моменту часу першого повернення до стану ланцюга.

Третій параграф присвячений доведенню центральної граничної теореми для стохастично адитивних функціоналів $S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} \xi_k (X_{k-1}, X_k)$. Через $\mathbb{P}_x$ позначено умовне середнє при умові, що $X_0 = x$, $S_0 = 0$, а через $\mathbb{P}_\pi(\cdot) = \int \pi(dx)\mathbb{P}_x(\cdot)$ – міру, що відповідає розподілу $\pi$. Зроблено припущення, що виконані умови

$$\mathbb{P}_\pi \xi_1 (X_0, X_1) = 0 \text{ та } \mathbb{P}_\pi \xi_1^2 (X_0, X_1) < \infty \qquad (3)$$

та доведено наступний результат.

ТЕОРЕМА 3. Існує такий мізерний повний клас $\mathcal{E}$ та таке

$\mathcal{E}$ -обмежене ядро $W$ , що стохастично адитивний функціонал $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ є асимптотично нормальним, якщо виконані умови (3) та функція $v(x)=\mathbb{P}_x \xi_1(x, X_1)$ є обмеженою та $\mathcal{E}$ -фінітною. Дисперсію граничного нормального закону виписано через ядро $W$ , а саме, якщо позначити

$$v^*(y)=\mathbb{P}_\pi(S_1 | X_1=y)=\int_E \mathbb{P}_x(S_1|X_1=y)\pi(dx),$$

то $\sigma^2=\mathbb{P}_\pi S_1^2+2\int_E\int_E v^*(x)\pi(dx)W(x,dy)v(y)$. Дисперсія дорівнюватиме нулю тоді і тільки тоді, коли $\xi_1(X_0, X_1)$ можна $\mathbb{P}_\pi$ -м.н. представити у вигляді різниці значень деякої $\mathcal{A}$ -вимірної функції $u(x)$ , $x\in E$ , тобто $\xi_0(X_0, X_1)=u(X_0)-u(X_1)$.

Цей результат отримано, суттєво використовуючи центральну граничну теорему із монографії В.М. Шуренкова "Ергодичні процеси Маркова", яку в нашому випадку зручно сформулювати таким чином.

ТЕОРЕМА 4. Нехай виконано умови (3) . Тоді якщо буде знайдено таку монотонно збіжну до одиниці послідовність $t_n$ та таку $\pi$ -додатну множину $D\in\mathcal{A}$, що для стохастично адитивного функціоналу $S_n$ буде виконано умови

$$\lim_{n\to\infty}(1-t_n)^2\sum_{k\geq 1} t_n^k\int_D \pi(dx)\mathbb{P}_x S_k^2<\infty$$

та

$$\lim_{n\to\infty}(1-t_n)\Big|\sum_{k\geq 1} t_n^k\int_A \pi(dx)\mathbb{P}_x S_k\Big|<\infty$$

для всіх $A\in\mathcal{A}D$ , то $\frac{1}{\sqrt{n}}S_n$ матиме при $n\to\infty$ гранично нормальний розподіл, дисперсія якого дорівнюватиме нулю тоді та тільки тоді, коли $\xi_1(X_0, X_1)$ можна буде $\mathbb{P}_\pi$-м.н. представити у вигляді різниці значень деякої $\mathcal{A}$-вимірної функції $u(x)$, $x \in E$, тобто $\xi_1(X_0, X_1) = u(X_0) - u(X_1)$.

У § 4 розглянуто наступні об'єкти:

- клас $\mathcal{K}$, що містить всі обмежені $\mathcal{A}$-вимірні функції $f$, для яких існує та є скінченною рівномірна по $x \in E$ границя $\lim_{t \uparrow 1} R_t f(x)$;
- клас $\bar{\mathcal{K}}$, що містить $\mathcal{A}$-вимірні обмежені функції $f$, для яких, по-перше, границя $\lim_{t \uparrow 1} R_t f(x)$ існує та скінченна для всіх $x \in E$, а по-друге, резольвента ланцюга $R_t f(x)$ рівномірно обмежена по $t$ та $x$, тобто $\sup_{0 \le t < 1} \sup_{x \in E} |R_t f(x)| < \infty$;
- клас $\mathcal{L}$ операторів, переставних з оператором імовірності переходу $Q(x, A)$ ланцюга Маркова, тобто $\mathcal{L} = \{U : UQ = QU\}$.

Розглянуто лінійний обмежений оператор $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ у банаховому просторі $\mathbb{B}$ обмежених $\mathcal{A}$-вимірних функцій, який належить до класу $\mathcal{L}$. Використовуючи попередні результати, було доведено наступні факти.

ТЕОРЕМА 5. Якщо $f \in \mathcal{K}$, а лінійний оператор $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ є обмеженим оператором класу $\mathcal{L}$, то випадкова послідовність $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} Uf(X_k)$ має симетричний нормальний розподіл при $n \to \infty$.

ТЕОРЕМА 6. Якщо $f \in \mathcal{K}$, а лінійний обмежений оператор $U : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ класу $\mathcal{L}$ є слабо неперервним в $\mathbb{B}$, то послідовність $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} Uf(X_k)$ має на границі симетричний нормальний розподіл.

ТЕОРЕМА 7. Існує такий мізерний клас $\mathcal{E}$, що послідовність $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} Uf(X_k)$ асимптотично нормальна для всіх $f \in B_0(\mathcal{E})$ і для тих лінійних обмежених операторів $U \in \mathcal{L}$, які є слабо неперервними в $B$.

Дисперсію граничного нормального закону для кожного з розглянутих вище випадків представлено через деяке $\mathcal{E}$-обмежене ядро. Наведено приклади тих операторів $U$, що задовольняють умови останніх трьох теорем.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:


1. Москальцова Н.В., Шуренков В.М. Об асимптотике потенциала счетной эргодической цепи Маркова // Укр. мат. журн. - 1993.- 45, № 2.- С.265-270.

2. Москальцова Н.В., Шуренков В.М. Центральная предельная теорема для центрированных частот счетной эргодической цепи Маркова // Укр. мат. журн. - 1993.- 45, № 12.- С.1713-1715.

3. Moskaltsova N. V., Shurenkov V. M. Central limit theorem for ergodic markov chains // Proc. Second Ukr.-Hungar. Conf. on New Trends in Probab. Theory and Math. Stat. - Kiev; VSP, Utrecht/ TBiMC, 1993. - P. 208-210.

4. Москальцова Н.В., Шуренков В.М. Про потенціали ергодичних ланцюгів Маркова // Укр. мат. журн.- 1994.- 46, № 4.- С. 446-449.


Н. Моск-

Підп. до друку 12.09.94. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс.друк
ум.друк. арк. 0,70. Ум. фарбо-відб. 0,70. Обл.-вид. арк. 0,5
Тираж 100 пр. Зам. Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3

ТЕОРЕМА 7. Існує таке мінімальне ядро $\mathcal{E}^*$, що послідовність $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} Uf(X_k)$ асимптотично нормальна для всіх $f \in B_\gamma(\mathcal{E})$ і для тих лінійних обмежених операторів $U \in \mathcal{L}^*$, які є слабо неперервними в $\mathcal{B}$.

Дисперсія граничного нормального закону для кожної з розглянутих вище ситуацій представлено через ядро $\mathcal{E}$ і мінімальне ядро. Наведено приклади тих операторів $U$, що задовольняють умови останніх трьох теорем.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:


1. Москальцова Н.В., Журенко Л.Н. [illegible] // Укр. мат. журн. - 1993. - 45, № 2. - С.[illegible]

2. Москальцова Н.В., Журенко Л.Н. Центральная предельная теорема для центрированных частных сумм эргодической цепи Маркова // Укр. мат. журн. - 1993. - 45, № 12. - С.1713-1715.

3. Moskaltsova N. V., Zhurenko L. N. Central limit theorem for ergodic markov chains // Proc. Second Ukr.-Hungar. Conf. on New Trends in probab. theory and math. stat. - Kiev, Ukr.; Utrecht: TBiMC. 1995. - P. 238-248.

4. Москальцова Н.В., Журенко Л.Н. Про [illegible] ергодичних ланцюгів Маркова // Укр. мат. журн. - 1994. - 46, № [illegible] - С. [illegible].



Підп. до друку [illegible]. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк. Ум. друк. арк. [illegible]

Інститут математики НАН України

[illegible] вул. Терещенківська, 3