ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. І.ФРАНКА

На правах рукопису

БУДЗ ІГОР СТЕПАНОВИЧ

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ СКЛАДОВИХ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ В ОКОЛІ СТІЙКОЇ РІВНОВАГИ

05.13.16 - застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання і математичних методів у наукових дослідженнях

Автореферат
на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Львів - 1994

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі прикладної математики Львівського державного університету ім. І.Франка

Науковий керівник: доктор фізико - математичних наук, професор Савула Я.Г.

Офіційні опоненти: академік НАН України, доктор фізико - математичних наук, професор Григоренко Я.М., кандидат фізико -математичних наук, доцент Зорій Л.М.

Провідна організація: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України

Захист відбудеться "26" жовтня 1994 р. о 14[30] годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 04.04.05 у Львівському державному університеті ім. І.Франка за адресою: 290602, Львів, вул. Університетська 1, ЛДУ, ауд 261.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Львівського державного університету.

Автореферат розісланий "23" вересня 1994 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради Б.А.Остудін

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність проблеми. При створенні сучасних зразків техніки в авіа- та ракетобудуванні, автомобіле- та приладобудуванні, енергетиці та інших галузях, широко використовуються конструкції, які містять тонкостінні елементи у вигляді пластин та оболонок. Забезпечення надійності та високих технічних показників під час експлуатації вимагає всебічного дослідження і аналізу фізичних та механічних полів цих конструкцій. Окремий напрямок досліджень складають задачі, які пов'язані з визначенням амплітудно-частотних характеристик процесу вільних коливань оболонкових конструкцій. Дослідженню цих проблем були присвячені праці І.Я.Аміро, В.В.Болотіна, Б.М.Бублика, А.Т.Василенка, А.С.Вольміра, О.Л.Гольденвейзера, Е.І.Григолюка, Я.М.Григоренка, В.І.Гуляєва, В.О.Заруцького, Л.М.Зорія, О.В.Карміщина, М.Ф.Копитко, О.С.Коссак, С.М.Кукуджанова, А.А.Лебедєва, Б.В.Лідського, В.М.Паймушина, Ю.Я.Петрушенка, Я.Г.Савули, А.С.Сахарова та інших авторів.

У зв'язку з моделюванням складних механічних та фізичних процесів, виникає необхідність більш повного врахування реальних умов роботи конструкцій. Зокрема, важливим є вивчення впливу попереднього напружено-деформованого стану (НДС), який зумовлений статичним зовнішнім навантаженням на частоти і форми вільних коливань оболонкових конструкцій. Розв'язанню даної проблеми присвятили свої праці В.В.Болотін, В.З.Власов, В.О.Бреславський, С.М.Кукуджанов, Л.Г.Агеносов, О.В.Саченков, Я.М.Григоренко, О.І.Беспалова, А.Б.Китайгородський, О.И.Шинкар, В.М.Паймушин, А.А.Лебедев, Ю.Я.Петрушенко, О.В.Карміщин, М.В.Нікулін, А.О.Киричук, В.О.Кошелев, О.С.Нарайкін, І.М.Преображенський, I.Du, D.Hui, G.F.Elsbernd, A.W.Liessa, T.J.Yang, H.W.Kim, L.K.Koval, E.T.Cranch, L.E.Penzes, H.Kraus та інші автори.

У загальному випадку, постановки та розв'язування задач про вплив попереднього навантаження на частоти і форми вільних коливань тонкостінних конструкцій є завданням складним. З огляду на це, в роботах багатьох авторів, які присвятили свої праці вивченню впливу попереднього НДС на коливні процеси в оболонках, використовувались спрощені підходи: однорідність та безмоментність попереднього НДС, врахування лише певних факторів попереднього НДС, дослідження впливу або лише напруженого стану, або лише початкових деформацій на амплітудно-частотні характеристики конструкцій. Крім цього, дослідження проводилися переважно для оболонок найпростіших канонічних форм. Слід зазначити, що в основу більшості запропонованих методик покладено класичну теорію оболонок, яка не враховує поперечних зсувних деформацій, а також вимагає використання на стадії чисельної реалізації апроксимацій високих порядків для невідомих функцій. Запропоновані підходи дають можливість вивчати вплив попереднього НДС на процес вільних коливань тонкостінних конструкцій, однак, питання про визначення цього НДС розглядається лише на рівні постановки задачі. Ця обставина не дозволяє у повній мірі автоматизувати процес дослідження явища впливу попереднього навантаження на частоти і форми коливань на ЕОМ.

Задачі на власні значення, до яких зводиться проблема визначення частот і форм вільних коливань попередньо навантажених тонкостінних конструкцій, є некласичними задачами. Розв'язання таких задач аналітичними методами викликає багато труднощів, а в окремих випадках є неможливим. З огляду на це, для розв'язування даних задач актуальним є застосування високоефективних чисельних методів та сучасної обчислювальної техніки. Для розв'язання задач на власні значення широко використовується метод скінченних елементів (МСЕ). Питання, пов'язані з розвитком МСЕ були розглянуті в роботах Г.І.Марчука, В.Г.Баженова, О.Ф.Борискіна, Р.Б.Рікардса, Л.О.Розіна, Я.Г.Савули, Г.А.Шинкаренка, О.С.Сахарова, О.Зенкевича, Г.Стренга, Дж.Фікса, J.M.Argyris, T.Hughes та інших авторів.

У більшості робіт, присвячених вивченню впливу попереднього навантаження на частоти і форми коливань оболонок використовувалась класична теорія. Проте, використання уточнених теорій оболонок, зокрема теорії Тимошенка, дозволяє розширити клас досліджуваних задач за рахунок побудови більш загальних математичних моделей і, одночасно, зняти обмеження на гладкість апроксимуючих функцій МСЕ (допускає використання апроксимацій класу $C^{(0)}$).

Підсумовуючи, можна стверджувати, що для розв'язання задач про вплив попереднього навантаження на амплітудно-частотні характеристики оболонок актуальним є створення нових підходів. В основу таких підходів необхідно покласти більш загальні математичні теорії та високоефективні чисельні методи, а також відповідне програмне забезпечення, яке давало б можливість автоматизувати процес дослідження впливу попереднього навантаження на частоти і форми коливань на персональних ЕОМ.

Метою даної роботи є:

- постановка та дослідження на основі рівнянь геометрично нелінійної теорії типу Тимошенка лінеаризованих задач на власні значення для попередньо навантажених оболонок, зокрема, складових оболонкових конструкцій обертання;
- побудова на основі варіаційного методу Бубнова-Гальоркіна та МСЕ чисельної схеми та алгоритмів для комплексного розв'язання задачі про визначення попереднього НДС та задачі на власні значення для попередньо навантажених складових оболонок обертання;
- створення на основі розроблених алгоритмів проблемно-орієнтованого комплексу програм, який забезпечував би автоматизацію і неперервність процесу дослідження впливу попереднього навантаження на частоти і форми вільних коливань оболонок на персональних ЕОМ;
- розв'язання тестових задач з метою дослідження точності та збіжності чисельних методів розв'язування задач на власні значення, які використані в даній роботі;
- розрахунок частот і форм коливань попередньо навантажених тонкостінних конструкцій, що мають застосування у практиці.

Наукова новизна. В роботі отримані такі нові наукові результати:

- поставлена задача на власні значення для попередньо навантажених оболонок, зокрема, оболонок обертання типу Тимошенка;
- записана варіаційна постановка задачі на власні значення;
- доведена симетричність операторів задачі на власні значення, що описують коливання попередньо навантажених оболонок; для

випадку кругової циліндричної оболонки з попереднім НДС, при умові осесиметричної постановки, доведено додатну визначеність операторів задачі;
- на основі МСЕ побудована чисельна схема розв'язання задачі на власні значення та задачі про визначення попереднього НДС для складових оболонок обертання;
- розроблено комплекс програм для використання на персональних ЕОМ, сумісних з IBM PC\AT, який дозволяє розраховувати частоти і форми вільних коливань складових оболонкових конструкцій обертання з попереднім НДС, а також визначати цей НДС, забезпечуючи неперервність і автоматизацію обчислювального процесу;
- на тестових прикладах, розв'язки яких є відомими в літературі, досліджено точність та збіжність побудованої чисельної схеми, отримані апостеріорні оцінки, проведено порівняння одержаних результатів з відомими;
- проведено чисельне дослідження впливу попереднього НДС на частоти вільних коливань складових тонкостінних конструкцій, які мають практичне застосування.

Вірогідність отриманих наукових результатів забезпечується використанням апробованих гіпотез і теорій, строгим і послідовним математичним обгрунтуванням отриманих задач і співвідношень; аналізом збіжності та фізичної вірогідності отриманих результатів, а також добрим узгодженням цих результатів з аналітичними та чисельними розв'язками, одержаними за іншими відомими методиками, які наведені в літературі.

Практичне значення дисертації полягає в розробці і реалізації на персональних ЕОМ ефективного методу визначення і дослідження впливу попереднього НДС на частоти і форми коливань складових тонкостінних конструкцій обертання. Створений програмний комплекс дозволяє розв'язувати широке коло задач про вільні коливання оболонок обертання. Цей комплекс може бути розширеним, внаслідок розгляду більшого кола задач, шляхом доповнення його новими програмними модулями.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались на Українській конференції "Моделирование и исследование устойчивости систем" (Київ, 1993 р.), XVI науковій конференції молодих вчених Інституту механіки АН УРСР (Київ, 1991 р.), науково-технічній конференції "Применение вычислительной техники и математических методов в научных и экономических исследованиях" (Київ, 1991 р.), Міжнародній конференції "Applied modelling and simulation" (Львів, 1993 р.), Міжнародній конференції "Інформаційні технології і системи" (Львів, 1993 р.). Дисертаційна робота в цілому доповідалась на науковому семінарі кафедри прикладної математики ЛДУ та проблемному семінарі факультету прикладної математики.

Публікації. Зміст дисертаційної роботи відображений у 6 статтях і тезах доповідей наукових конференцій /1 - 6/.

Обсяг роботи. Дисертаційна робота займає 144 сторінки машинописного тексту, і складається із вступу, трьох розділів, висновків, списку основної використаної літератури та додатку. Робота містить 12 малюнків, 12 таблиць. Бібліографічний список складається із 118 назв.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі проведено короткий аналіз сучасного стану проблеми дослідження задач на власні значення для попередньо навантажених тонкостінних конструкцій, обгрунтовано актуальність і важливість питань, які розглядаються в дисертаційній роботі, проведено огляд робіт за темою дисертації, сформульовані основні наукові положення, що виносяться на захист, здійснено короткий огляд дисертації за розділами.

У першому розділі на основі рівнянь та співвідношень геометрично нелінійної теорії оболонок типу Тимошенка здійснено постановки задач на власні значення для оболонок з попереднім НДС, а також про визначення цього НДС. Записана варіаційна постановка задачі на власні значення для попередньо навантажених оболонок, зокрема, оболонок обертання, отримана матрично-операторна проблема власних значень. Для складових оболонок наведені головні умови спряження. Доведена симетричність операторів задачі на власні значення для оболонок з попереднім НДС, а для випадку кругової циліндричної оболонки, за умови осесиметричної постановки, доведено додатну визначеність операторів задачі на власні значення.

Нехай оболонка, як тривимірне тіло, віднесена до криволінійної ортогональної системи координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ і займає область

$$\Omega^* = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3): (\alpha_1, \alpha_2) \in D, -\frac{h}{2} \le \alpha_3 \le \frac{h}{2}\},$$

$$D \xrightarrow{F(\alpha_1, \alpha_2)} \Omega, \qquad (1)$$

де Ω - серединна поверхня оболонки, а (1) - закон відображення області визначення змінних α_1, α_2 - D на поверхню $\Omega \in R^2$. Границя серединної поверхні оболонки - $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$, де Γ_u і Γ_σ - частини границі Γ, на яких задані переміщення і напруження (зусилля-моменти) відповідно.

Нехай напружено-деформований стан оболонки складається з "головного", що є рівноважним і, взагалі кажучи, може визначатися за геометрично нелінійною теорією, а також "додаткового", якому відповідають малі переміщення і деформації, що виникають в процесі здійснення оболонкою вільних коливань в околі положення рівноваги.

Нехтуючи квадратами величин "додаткового" стану в порівнянні з іншими величинами, що входять до ключових геометричних та фізичних співвідношень геометрично нелінійної теорії оболонок типу Тимошенка, можна отримати такі дві задачі:

а) задача про визначення попереднього НДС

$$G_\sigma(\sigma^*)^0 + p^0 = 0, \ (\alpha_1, \alpha_2) \in D, \qquad (2)$$

$$G_1(\sigma^*)^0 = \sigma^0_\Gamma, \ (\alpha_1, \alpha_2) \in \Gamma^0_\sigma, \qquad (3)$$

$$G_2 u^0 = u^0_\Gamma, \ (\alpha_1, \alpha_2) \in \Gamma^0_u,$$

$$(\sigma^*)^0 = F^0 \sigma^0, \ \sigma^0 = B\varepsilon^0,$$

$$\varepsilon^0 = C_1 u^0 + \frac{1}{2}(C_\Omega u^0)^T E_\Omega C_\Omega u^0; \qquad (4)$$

б) задача про малі коливання оболонки в околі рівноваги

$$G_\sigma(\tilde{\sigma}^*)^0 + \lambda^2 m\tilde{u} = 0, \ (\alpha_1, \alpha_2) \in D, \qquad (5)$$

$$G_1(\tilde{\sigma}^*)^0 = 0, \ (\alpha_1, \alpha_2) \in \tilde{\Gamma}_\sigma, \qquad (6)$$

$$G_2 \tilde{u} = 0, \ (\alpha_1, \alpha_2) \in \tilde{\Gamma}_u, \qquad (7)$$

де $\tilde{u} = \tilde{u}(\alpha_1, \alpha_2)$, $(\tilde{\sigma}^*)^0 = (\tilde{\sigma}^*)^0(\alpha_1, \alpha_2)$;

$$(\tilde{\sigma}^*)^0 = \tilde{F}\sigma^0 + F^0(\tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}^0), \ \tilde{\sigma} = B\tilde{\varepsilon}, \ \tilde{\sigma}^0 = B\tilde{\varepsilon}^0, \ \tilde{\varepsilon} = C_1\tilde{u},$$

$$\tilde{\varepsilon}^{o} = (C_{\Omega}u^{o})^{T}_{B}E_{\Omega}C_{\Omega}\tilde{u}. \qquad (8)$$

Тут

$$u^{o}_{\Gamma} = u^{o}_{\Gamma}(\alpha_1,\alpha_2),\ (\alpha_1,\alpha_2)\in\Gamma_u = \Gamma^{o}_{u} \cup \tilde{\Gamma}_u; \qquad (9)$$

$$\sigma^{o}_{\Gamma} = \sigma^{o}_{\Gamma}(\alpha_1,\alpha_2),\ (\alpha_1,\alpha_2)\in\Gamma_{\sigma} = \Gamma^{o}_{\sigma} \cup \tilde{\Gamma}_{\sigma}; \qquad (10)$$

де індекс "о" означає головний стан, а "~" - додатковий.

Вектори-стовпці переміщень - u, деформацій - ε, симетричних зусиль-моментів - σ, зовнішнього поверхневого навантаження - p, граничних переміщень - u_{Γ}, граничних зусиль-моментів - σ_{Γ} мають вигляд

$$u=(u_1,\ u_2,\ w,\ \gamma_1,\ \gamma_2)^T,\ \varepsilon=(e_1,\ e_2,\ e_{12},\ e_{23},\ \varkappa_1,\ \varkappa_2,\ 2\varkappa_{12})^T,$$

$$\sigma=(N_1,\ N_2,\ S,\ Q_1,\ Q_2,\ M_1,\ M_2,\ H)^T,\ p=(p_1,\ p_2,\ p_3,\ m_1,\ m_2)^T,$$

$$u_{\Gamma}=(u^{b}_{t},\ u^{b}_{s},\ w^{b},\ \gamma^{b}_{t},\ \gamma^{b}_{s})^T,\ \sigma_{\Gamma}=((N_t,\ N_s,\ Q_n,\ M_t,\ M_s)^T.$$

У кожній точці границі Γ області Ω задається трійка взаємно перпендикулярних векторів t, s, n, де t - тангенціальна нормаль, s - дотична, а n - нормаль.

Крім цього, у співвідношеннях (2)-(8) введено такі позначення: C_1, C_{Ω}, C_{σ} - диференціальні оператори; B, E_{Ω}, m - матриці констант; G_1, G_2 - матриці направляючих синусів та косинусів, F - деяка матриця функцій переміщень.

Введемо на $D(\alpha_1,\alpha_2)$ множину функцій Z, елементи якої задовільняють умови (7), а також $Z\subset[W^1_2(D)]^5$. Запишемо варіаційну постановку задачі (5)-(8)

$$\int_{\Omega}[C_1V + (C_{\Omega}u^{o})^{T}_{B}E_{\Omega}C_{\Omega}V]^{T}E_{\Omega}B[C_1u + (C_{\Omega}u^{o})^{T}_{B}E_{\Omega}C_{\Omega}u]d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega}(C_{\Omega}V)^{T}E^{T}_{\Omega}\sigma^{o}_{\Omega}C_{\Omega}ud\Omega - \lambda^{2}\int_{\Omega}Vmud\Omega = 0, \qquad (11)$$

$$u\in Z,\ \forall v_i\in Z,\ i=\overline{1.5}.$$

Тут $V=\{v_i\}^{5}_{i=1}$ - діагональна матриця.

$$\sigma^{o}_{\Omega} = (\sigma^{o}_{\Omega1},\ \sigma^{o}_{\Omega2},\ \sigma^{o}_{\Omega3},\ \sigma^{o}_{\Omega4},\ \sigma^{o}_{\Omega5},\ \sigma^{o}_{\Omega6},\ \sigma^{o}_{\Omega7},\ 2\sigma^{o}_{\Omega8})^T,$$

де $\sigma^{o}_{\Omega i}=\{(\sigma^{o}_{i})_j\}^{4}_{j=1}$ - діагональна матриця, $i=\overline{1,8}$,

σ^{o}_{i} - елементи вектора симетричних зусиль-моментів.

Тут і надалі позначення "~" - опускатиметься. Запишемо рівняння (5) у вигляді

$$Au - \lambda^2 mu = 0,\ (\alpha_1, \alpha_2)\in D, \qquad (12)$$

де A - диференціальний оператор, який залежить від функцій попереднього НДС, а M=m.

<u>Теорема</u> <u>1</u>. Нехай $\Gamma_u \neq \varnothing$. Тоді оператори задачі (12), (6), (7) - симетричні, тобто

$$(Au,\hat{u}) = (A\hat{u},u),$$

$$(Mu,\hat{u}) = (M\hat{u},u),\ \forall u\in Z.$$

Розглянемо оболонку обертання як тривимірне тіло, що займає область Ω^*, де

$$\Omega^* = \{(\alpha_1,\varphi,\alpha_3):(\alpha_1,\varphi)\in\Omega = \{\alpha_1\in\Omega_м = \{\alpha_1^0\le\alpha_1\le\alpha_1^1\};\ 0\le\varphi\le 2\pi\};\ -\frac{h}{2}\le\alpha_3\le\frac{h}{2}\},$$

де $\Omega\in R^2$ - серединна поверхня оболонки,

$\Omega_м$ - меридіальний переріз серединної поверхні оболонки.

У випадку складової оболонкової конструкції обертання матимемо

$$\Omega = \bigcup_{j=1}\Omega_j,\ \Omega_j = \{(\alpha_{1j},\varphi):\ \alpha^0_{1j}\le\alpha_{1j}\le\alpha^1_{1j},\ 0\le\varphi\le 2\pi\},$$

$$\Gamma_u = \bigcup_{j=1}\Gamma_{uj},\ \Gamma_\sigma = \bigcup_{j=1}\Gamma_{\sigma j},\ h_j;$$

мають місце головні умови спряження

$$T_j u_j = T_k u_k,$$

$$u_i = (u_{1i}, u_{2i}, w_i, \gamma_{1i}, \gamma_{2i})^T,\ i=j,k,$$

$$T_i = \begin{bmatrix} \cos\delta_i & 0 & -\sin\delta_i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\delta_i & 0 & \cos\delta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\delta_i \end{bmatrix},\ i=j,k,$$

де δ_i - кут між нормаллю до серединної поверхні k-ої складової та нормаллю нової системи координат, проведеними в точці спряження.

Для випадку осесиметричних коливань жорстко закріпленої на торцях циліндричної оболонки доведена теорема 2.

<u>Теорема</u> <u>2</u>. Оператори задачі виду (12) додатно визначені при додаткових умовах на попередній НДС, тобто

$$(Au,u) \geq d^2 \|u\|^2_{0,\Omega},$$

$$(Mu,u) \geq k^2 \|u\|^2_{0,\Omega},$$

$$\|u\|_{0,\Omega} = \int_0^1 (u_1^2 + w^2 + \gamma_1^2)\, d\alpha_1,$$

$$d^2 = f(u^0, \sigma^0) > 0.$$

Другий розділ присвячений побудові чисельної схеми напіваналітичного методу скінченних елементів для розв'язання задач на власні значення для попередньо навантажених складових оболонок обертання. Отримані матричні вирази для обчислення елементів матриць жорсткості та мас. За допомогою МСЕ задача на власні значення зводиться до узагальненої алгебраїчної проблеми для матриць великих розмірностей. Побудована чисельна схема для розв'язування задачі про визначення попереднього НДС.

На тестових прикладах, для яких побудовано аналітичний розв'язок, виконано дослідження точності та збіжності чисельної схеми. Проведено порівняння отриманих результатів з аналогічними, одержаними за іншими методиками, які є відомими в літературі.

Поділимо область меридіального перерізу серединної поверхні оболонки

$$\Omega_M = \{\alpha_1 : \alpha_1^0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_1^1\}$$

на одновимірні квадратичні скінченні елементи

$$\Omega_M = \bigcup_{i=1}^{I} \Omega_{Mi}, \quad \Omega_{Mi} = \{\alpha_1^{i-1} \leq \alpha_1 \leq \alpha_1^i\}, \quad i = \overline{1,I}.$$

Подамо вектор u на скінченному елементі у вигляді

$$u_i = \sum_{m=0}^{L} \Phi_m(\varphi) N(\xi) \cdot q_{mi}, \quad i = \overline{1,I} \qquad (13)$$

$\Phi_m = \{\varphi_m^i\}_{i=1}^{5}$ - діагональна матриця, де φ_m^k, $(k=\overline{1,5})$ - функції, що складають повну ортонормовану систему і задовільняють умови періодичності. Виберемо їх такими:

$\varphi_m^1 = \varphi_m^3 = \varphi_m^4 = \cos m\varphi$, $\varphi_m^2 = \varphi_m^5 = \sin m\varphi$, $m=0,1,\ldots,L$.

$N(\xi)$ - блочно-діагональна матриця кусково-квадратичних функцій класу $C^{(0)}_{[-1,1]}$,

$q_{mi} = [\hat{q}^T_{mi-1},\ \hat{q}^T_{mi-1/2},\ \hat{q}^T_{mi}]^T$ – вектор невідомих вузлових параметрів, де

$\hat{q}_{mk} = [u_{1mk},\ u_{2mk},\ w_{mk},\ \gamma_{1mk},\ \gamma_{2mk}]^T$, $k = i-1,\ i-\frac{1}{2},\ i$.

Матриця V на одному скінченному елементі має вигляд

$$V = \sum_{n=0}^{L} \Phi_n(\varphi) N(\xi). \qquad (14)$$

Підставляючи (13) і (14) у варіаційне рівняння (11) та підсумовуючи за скінченними елементами та гармоніками, отримаємо

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{n,m=0}^{L} [K^{mn}_i + T^{mn}_i - \lambda^2 M^{mn}_i] q_{mi} = 0, \qquad (15)$$

де

$$K^{mn}_i = \iint\limits_{0\Omega_{Mi}}^{2\pi} [C_1 \Phi_n N + (C_\Omega u^0_i)^T E_B C_\Omega \Phi_n N]^T E_0 B [C_1 \Phi_m N + (C_\Omega u^0_i)^T E_B C_\Omega \Phi_m N] d\Omega_{Mi}\, d\varphi,$$

$$T^{mn}_i = \iint\limits_{0\Omega_{Mi}}^{2\pi} (C_\Omega \Phi_n N)^T E^T_\Omega \sigma^{0(i)}_\Omega C_\Omega \Phi_m N d\Omega_{Mi}\, d\varphi, \qquad (16)$$

$$M^{mn}_i = \iint\limits_{0\Omega_{Mi}}^{2\pi} (\Phi_n N)^T m \Phi_m N d\Omega_{Mi}\, d\varphi.$$

Враховуючи ортогональність функцій φ^k_m і φ^k_n, $k=\overline{1,5}$; $m,n=\overline{0,L}$, отримаємо

$$K^{mn}_i = T^{mn}_i = M^{mn}_i = 0, \text{ коли } m \neq n. \qquad (17)$$

Зважаючи на умову (17), отримаємо L окремих алгебраїчних проблем на власні значення

$$\sum_{i=1}^{I} [K^{mm}_i + T^{mm}_i - \lambda^2 M^{mm}_i] q_{mi} = 0, \qquad (18)$$

$$m=\overline{0,L}.$$

Для розв'язання проблеми (18) ефективно використовуєтья метод ітерацій в підпросторі.

Для визначення попереднього НДС скористаємось рівняннями лінійної теорії оболонок типу Тимошенка. У загальному випадку, алгебраїчна проблема визначення попереднього НДС розпадається на

L окремих задач виду

$$\sum_{l=1}^{1} \hat{K}_l^{mm} q_{ml}^* = \sum_{l=1}^{1} F_l^{mm}, \quad m=\overline{0,L}, \qquad (19)$$

де

$$\hat{K}_l^{mm} = \int_0^{2\pi}\int_{\Omega_{Ml}} [C_l \Phi_m N]^T E_0 BC_l \Phi_m N d\Omega_{Ml} d\varphi,$$

$$F_l^{mm} = \int_0^{2\pi}\int_{\Omega_{Ml}} (\Phi_m N)^T \Phi_m N p_{ml} d\Omega_{Ml} d\varphi,$$

де

$p_{ml} = (\hat{p}^T_{ml-1}, \hat{p}^T_{ml-1/2}, \hat{p}^T_{ml})^T$ – вектор вузлових значень зовнішнього навантаження, а

$$\hat{p}_{mk} = (p_{1mk}, p_{2mk}, p_{3mk}, m_{1mk}, m_{1mk})^T,$$

$$k = i-1,\ i-\frac{1}{2},\ i.$$

Вважатимемо, що зовнішнє навантаження не залежить від кругової координати – φ, тому у матриці Φ_m приймемо m=0. Для розв'язання алгебраїчної проблеми (19) використовується алгоритм методу Гауса для стрічкової симетричної матриці.

Дослідження можливостей запропонованої схеми методу для розв'язування задач на власні значення попередньо навантажених оболонок обертання проводилось на прикладі жорстко закріпленої на торці круглої пластини радіуса R, товщини h, яка попередньо рівномірно розтягувалась або стискалася зовнішнім радіальним зусиллям N_r, прикладеним до торця пластини. Поперечний переріз пластини площиною φ=const зображений на рис.2. Розглядався випадок осесиметричних власних функцій.

У таб.1 наведені перші три частоти f_i $(f_i = \frac{\lambda_i}{2\pi},\ i=\overline{1,3})$, які отримані на різних скінченноелементних сітках при нульовому та близькому до критичного навантаженнях. Одержані чисельні результати порівнюються з аналітичними, отриманими в дисертаційній роботі.

В таб.2 подані результати відносного впливу зовнішнього навантаження N_r на частоти вільних коливань. Цей вплив

Таблиця 1

$N_{ел}$	$N_{г,м}^{H}$	f_1, Гц	δ, %	f_2, Гц	δ, %	f_3, Гц	δ, %
4	0	.12076E+02	0.013	.46560E+02	0.524	.10469E+03	3.12
	-10^8	.65944E+00	17	.38780E+02	0.8	.97082E+02	4
8	0	.12075E+02	0.001	.46335E+02	0.038	.10176E+03	0.231
	-10^8	.57166E+00	1	.38503E+02	0.05	.94010E+02	0.3
16	0	.12075E+02	≈0	.46319E+02	0.003	.10155E+03	0.017
	-10^8	.56540E+00	0.1	.38483E+02	0.004	.93778E+02	0.02
32	0	.12075E+02	≈0	.46317E+02	≈0	.10153E+03	≈0
	-10^8	.56500E+00	0.02	.38482E+02	≈0	.93763E+02	0.002
анал	0	.12075E+02	-	.46317E+02	-	.10153E+03	-
	-10^8	.56486E+00	-	.38482E+02	-	.93761E+02	-

Таблиця 2

$N_{г,м}^{H}$	f_1, Гц	Δ, %	f_2, Гц	Δ, %	f_3, Гц	Δ, %
-10^8	.56540E+00	95	.38483E+02	17	.93778E+02	7
-10^7	.11473E+02	5	.45598E+02	1.6	.10080E+03	0.73
-10^6	.12016E+02	0.49	.46247E+02	0.15	.10147E+03	0.079
-10^5	.12069E+02	0.05	.46312E+02	0.015	.10154E+03	0.009
0	.12075E+02	0	.46319E+02	0	.10155E+03	0
10^5	.12081E+02	0.05	.46326E+02	0.015	.10155E+03	0
10^6	.12133E+02	0.48	.46390E+02	0.15	.10162E+03	0.073
10^7	.12645E+02	5	.47028E+02	1.5	.10229E+03	0.73
10^8	.16858E+02	40	.52962E+02	14	.10872E+03	7

характеризується параметром Δ, де

$$\Delta = \frac{|f_i^0 - f_i|}{f_i^0} \cdot 100\% \ , \ i=\overline{1,3},$$

f_i^0 - i-та частота ненавантаженої пластини.

У даному розділі досліджувався, також, вплив попереднього навантаження на власні частоти кругової циліндричної оболонки, яка перебувала під дією рівномірного нормального зовнішнього тиску. проведено порівняння отриманих результатів з відомими, які наведені в літературі та отримані за іншими методиками.

У третьому розділі розглянута і описана структура програмного комплексу LOAD, який призначений для дослідження впливу зовнішнього навантаження на процес вільних коливань складових оболонкових конструкцій обертання. Наведені характеристики та висвітлені можливості окремих програмних модулів. Структура комплексу зображена на рис.1. Всі модулі записані на алгоритмічній мові Фортран. Розроблений комплекс призначений для використання на персональних ЕОМ, сумісних з IBM PC\AT. Дане програмне забезпечення розраховане на експлуатацію математиком -прикладником, ознайомленим з методом скінченних елементів, математичним моделюванням в механіці деформівного твердого тіла. Запропонований програмний комплекс дозволяє розв'язувати широке коло задач про вільні коливання попередньо навантажених оболонок обертання і може бути розширений внаслідок розгляду більшого кола задач, а також доповненням новими програмними модулями. Комплекс займає 200 Кб на магнітному диску.

У цьому ж розділі проведений чисельний аналіз залежності частот і форм вільних коливань від величини і характеру попереднього навантаження для складових оболонкових конструкцій, які мають застосування в інженерній практиці.

В таблицях 3 і 4 наведені перші три частоти вільних коливань скляної оболонки електронно-променевого приладу, яка перебуває під дією рівномірного нормального зовнішнього тиску. Меридіальний переріз серединної поверхні конструкції зображений на рис.3. Результати, які приведені в таблицях 3 і 4 відповідають значенням гармоніки m=0 і m=1 відповідно. Мають місце такі головні граничні умови:

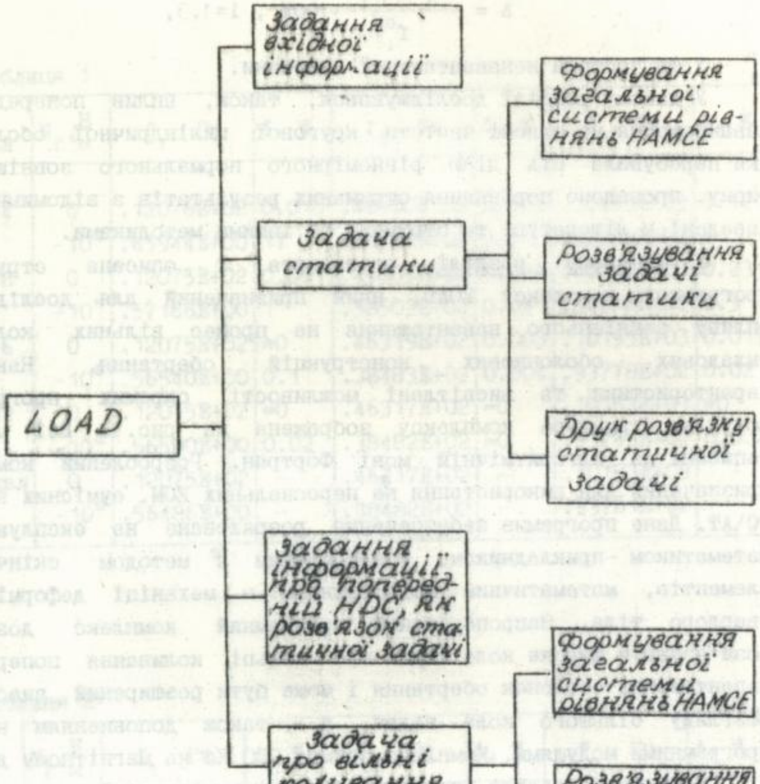
LOAD
Задання вхідної інформації
Формування загальної системи рівнянь НАМСЕ
Задача статики
Розв'язування задачі статики
Друк розв'язку статичної задачі
Задання інформації про попередній НДС, як розв'язок статичної задачі
Формування загальної системи рівнянь НАМСЕ
Задача про вільні коливання
Розв'язування задач на власні значення
Друк вихідної інформації

Рис. 1

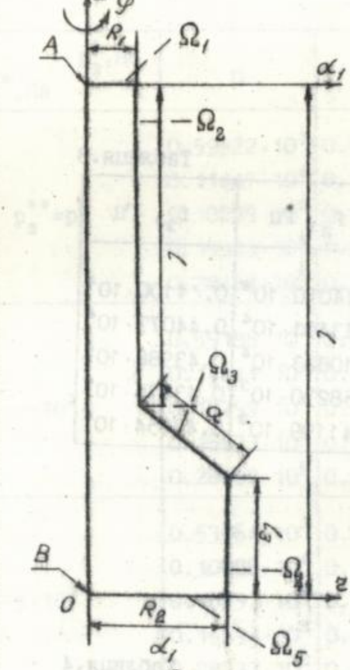

Рис.3

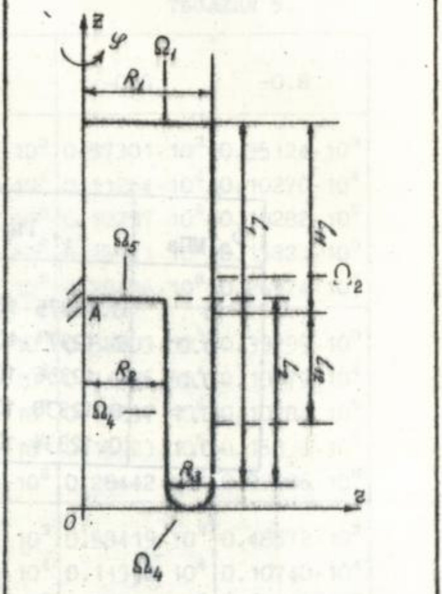

Рис.4

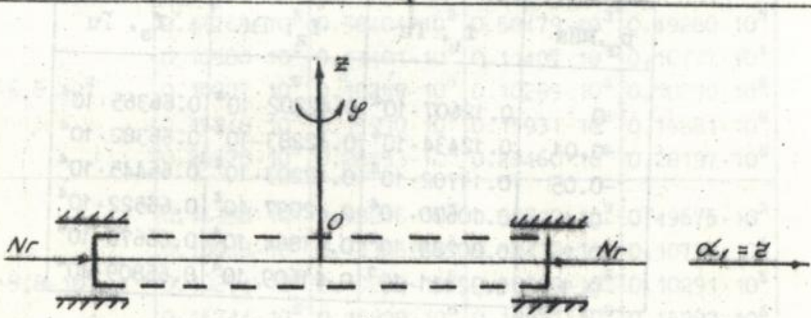

Рис. 2.

Таблиця.3

$p_з$, МПа	f_1, Гц	f_2, Гц	f_3, Гц
0	$0.12375 \cdot 10^4$	$0.14070 \cdot 10^4$	$0.44100 \cdot 10^4$
-0.01	$0.12371 \cdot 10^4$	$0.13491 \cdot 10^4$	$0.44077 \cdot 10^4$
-0.05	$0.12356 \cdot 10^4$	$0.10823 \cdot 10^4$	$0.43986 \cdot 10^4$
-0.1	$0.12338 \cdot 10^4$	$0.58230 \cdot 10^3$	$0.43876 \cdot 10^4$
-0.11	$0.12334 \cdot 10^4$	$0.41199 \cdot 10^3$	$0.43854 \cdot 10^4$

Таблиця.4

$p_з$, МПа	f_1, Гц	f_2, Гц	f_3, Гц
0	$0.12607 \cdot 10^4$	$0.42302 \cdot 10^4$	$0.66365 \cdot 10^4$
-0.01	$0.12434 \cdot 10^4$	$0.42283 \cdot 10^4$	$0.66382 \cdot 10^4$
-0.05	$0.11702 \cdot 10^4$	$0.42203 \cdot 10^4$	$0.66445 \cdot 10^4$
-0.1	$0.10670 \cdot 10^4$	$0.42097 \cdot 10^4$	$0.66522 \cdot 10^4$
-0.2	$0.80289 \cdot 10^3$	$0.41864 \cdot 10^4$	$0.66670 \cdot 10^4$
-0.3	$0.32411 \cdot 10^3$	$0.41609 \cdot 10^4$	$0.66809 \cdot 10^4$

Таблиця 5.

$p_з^{**}$, Па \ $p_з^{*}$, Па	0	-0.1	-0.3	-0.8
$p_з^{**}=p_з^{*}$	$0.59322\cdot10^{3}$	$0.59031\cdot10^{3}$	$0.57301\cdot10^{3}$	$0.35124\cdot10^{3}$
	$0.11447\cdot10^{4}$	$0.11419\cdot10^{4}$	$0.11264\cdot10^{4}$	$0.10270\cdot10^{4}$
	$0.10299\cdot10^{5}$	$0.10299\cdot10^{5}$	$0.10297\cdot10^{5}$	$0.10282\cdot10^{5}$
	$0.15933\cdot10^{5}$	$0.15932\cdot10^{5}$	$0.15921\cdot10^{5}$	$0.15821\cdot10^{5}$
	$0.28463\cdot10^{5}$	$0.28461\cdot10^{5}$	$0.28436\cdot10^{5}$	$0.26574\cdot10^{5}$
-10^{2}	$0.59186\cdot10^{3}$	$0.59098\cdot10^{3}$	$0.57603\cdot10^{3}$	$0.39299\cdot10^{3}$
	$0.11441\cdot10^{4}$	$0.11433\cdot10^{4}$	$0.11296\cdot10^{4}$	$0.10379\cdot10^{4}$
	$0.10299\cdot10^{5}$	$0.10299\cdot10^{5}$	$0.10297\cdot10^{5}$	$0.10284\cdot10^{5}$
	$0.15933\cdot10^{5}$	$0.15933\cdot10^{5}$	$0.15923\cdot10^{5}$	$0.15836\cdot10^{5}$
	$0.28462\cdot10^{5}$	$0.28461\cdot10^{5}$	$0.28442\cdot10^{5}$	$0.27086\cdot10^{5}$
$-5\cdot10^{2}$	$0.53064\cdot10^{3}$	$0.58642\cdot10^{3}$	$0.58419\cdot10^{3}$	$0.48572\cdot10^{3}$
	$0.10988\cdot10^{4}$	$0.11419\cdot10^{4}$	$0.11398\cdot10^{4}$	$0.10740\cdot10^{4}$
	0.1029[illegible]$\cdot10^{5}$	$0.10299\cdot10^{5}$	$0.10299\cdot10^{5}$	$0.10290\cdot10^{5}$
	$0.15894\cdot10^{5}$	$0.15931\cdot10^{5}$	$0.15930\cdot10^{5}$	$0.15877\cdot10^{5}$
	$0.28233\cdot10^{5}$	$0.28457\cdot10^{5}$	$0.28458\cdot10^{5}$	$0.28150\cdot10^{5}$
$-5{,}5\cdot10^{2}$	$0.44768\cdot10^{3}$	$0.58404\cdot10^{3}$	$0.58479\cdot10^{3}$	$0.49280\cdot10^{3}$
	$0.10580\cdot10^{4}$	$0.11401\cdot10^{4}$	$0.11407\cdot10^{4}$	$0.10777\cdot10^{4}$
	$0.10287\cdot10^{5}$	$0.10299\cdot10^{5}$	$0.10299\cdot10^{5}$	$0.10290\cdot10^{5}$
	$0.15848\cdot10^{5}$	$0.15930\cdot10^{5}$	$0.15931\cdot10^{5}$	$0.15881\cdot10^{5}$
	$0.26678\cdot10^{5}$	$0.28453\cdot10^{5}$	$0.28460\cdot10^{5}$	$0.28197\cdot10^{5}$
$-5{,}8\cdot10^{2}$	$0.16358\cdot10^{3}$	$0.58216\cdot10^{3}$	$0.58510\cdot10^{3}$	$0.49675\cdot10^{3}$
	$0.10018\cdot10^{4}$	$0.11386\cdot10^{4}$	$0.11412\cdot10^{4}$	$0.10799\cdot10^{4}$
	$0.10274\cdot10^{5}$	$0.10298\cdot10^{5}$	$0.10299\cdot10^{5}$	$0.10291\cdot10^{5}$
	$0.15744\cdot10^{5}$	$0.15929\cdot10^{5}$	$0.15931\cdot10^{5}$	$0.15883\cdot10^{5}$
	$0.23351\cdot10^{5}$	$0.28450\cdot10^{5}$	$0.28460\cdot10^{5}$	$0.28220\cdot10^{5}$

точка A: $u_1=w=0$,

точка B: $u_1=0$.

Рахунок проводився для розбиття складових оболонки на 3, 12, 9, 9, 9 елементів.

Розглядалась, також, конструкція, меридіальний переріз серединної поверхні якої зображений на рис.4.

Досліджувався вплив нерівномірного за координатою α_1 зовнішнього нормального тиску. На частині серединної поверхні оболонки довжиною l_{12} діє тиск інтенсивністю p_3^{**}. Решта серединної поверхні перебуває під дією зовнішнього тиску інтенсивністю p_3^{*}. В точці A задані умови жорсткого закріплення.

В таб.5 наведені значення перших п'яти частот для гармоніки m=1 та різних комбінацій p_3^{*} і p_3^{**}.

Рахунок проводився для розбиття складових оболонки на 5, 12, 5, 8, 3 елементів.

<u>У висновках</u> сформульовані основні результати, які отримані в дисертації:

1. Виходячи із співвідношень геометрично нелінійної теорії оболонок типу Тимошенка, записана постановка задачі на власні значення для оболонок з попереднім навантаженням. Записана варіаційна постановка цієї задачі, отримана матрично- операторна проблема власних значень. Наведена постановка задачі про визначення попереднього НДС оболонок.

2. Здійснена постановка задачі на власні значення для оболонок обертання з попереднім навантаженням. Розглянутий випадок складових оболонкових конструкцій.

3. Для загального випадку, доведена симетричність операторів задачі на власні значення, яка описує вільні коливання попередньо навантажених оболонок в околі положення рівноваги. Для циліндричної оболонки, для осесиметричного випадку доведена додатна визначеність операторів задачі.

4. Розроблена і реалізована у вигляді програмного комплексу для персональних ЕОМ, сумісних з IBM PC\AT, схема МСЕ, яка дозволяє розв'язувати широкий спектр задач на власні значення для складових оболонок обертання з врахуванням їх попереднього навантаження. Програмний комплекс дозволяє розв'язувати, також, задачу про визначення попереднього НДС,що дає можливість задавати

реальне зовнішне навантаження, утримуючи оболонку в стані рівноваги, а також керувати зовнішнім навантаженням з метою одержання необхідних частотних характеристик оболонки.

5. На тестовому прикладі, для якого відомий аналітичний розв'язок показана хороша збіжність і висока ефективність схеми МСЕ.

6. Проведений чисельний аналіз залежності частот вільних коливань оболонок від значення попереднього їх навантаження. Встановлено, що попереднє навантаження кількісно і якісно по-різному впливає на різні частоти в спектрі.

7. Виконано розрахунки складових оболонкових конструкцій, які мають практичне застосування. Отримано частоти вільних коливань для різних значень попереднього навантаження та гармоніки. Результати розрахунків добре узгоджуються з інженерними оцінками.

Запропонована методика дозволяє розглядати широке коло задач, пов'язаних з визначенням частот та форм вільних коливань попередньо навантажених складових оболонкових конструкцій обертання.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ ВИКЛАДЕНІ В РОБОТАХ:

1. Будз І.С. Вільні коливання попередньо навантажених складених осесиметричних оболонкових конструкцій // Моделирование и исследование устойчивости систем: тез. докл. Украинской конференции. - Киев, 24-29 мая 1993 г., Ч.1. - С. 23.
2. Будз И.С. Численный анализ динамики оболочек типа Тимошенко с учетом предварительного нагружения / Львов. ун-т. - Львов, 1992. - 37 с. - Деп. в УкрНИИНТИ 22.01.92 г., № 77-Ук92.
3. Будз И.С., Коссак О.С. Математическое моделирование динамики оболочек типа Тимошенко с учетом предварительного нагружения // Тр. 16 науч. конф. молодых ученых Ин-та механики АН УССР, Киев, 21-24 мая, 1991 г., Ч.2. - С. 232-236.
4. Будз І.С., Савула Я.Г. Чисельний розв'язок задач про вільні коливання тонких оболонок з урахуванням початкового навантаження // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. - 1993. - Вип.39. - С. 22-30.

5. Савула Я.Г.,Будз И.С. Численный анализ динамики оболочек типа Тимошенко с учетом предварительной нагрузки // Применение вычислительной техники и математических методов в научных и экономических исследованиях: Тр. научно-технической конф. - Киев. - 1991. - С. 82.

6. Ya.Savula, O.Kossak, I.Budz. Adaptive models and finite element method for dynamic analysis of structures // Applied modelling and simulation: Proceedings Intern. AMSE Conference. - Lviv, Sept. 30 - Oct. 26 1993. - pp. 213-222.

Підписано до друку 21.09.94. Формат 60х84/16. Папір друк. №1.
Друк. офсет. Умовн. друк. арк. 1,5. Умовн.-фарб.відб. 1,5.
Обл.-вид. арк. 1,5. Тираж 100. Зам. 343.
Машинно-офсетна лабораторія Львівського державного університету ім. І. Франка 290602 Львів, вул. Університетська, 1.