ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. І.Франка

На правах рукопису

ІЛЬНИЦЬКИЙ
Ярослав Миколайович

УДК 536.7; 519.25; 530.145

МЕТОД КОЛЕКТИВНИХ ЗМІННИХ І ϵ-РОЗКЛАД

01.04.02.-теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів - 1994

ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ім. І.Франка

На правах рукопису

ІЛЬНИЦЬКИЙ
Ярослав Миколайович

УДК 536.7; 519.25; 530.145

МЕТОД КОЛЕКТИВНИХ ЗМІННИХ
І ϵ-РОЗКЛАД

01.04.02.-теоретична фізика

Автореферат
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів - 1994

Робота виконана в Інституті фізики конденсованих систем АН України.

Наукові керівники – академік АН України,
доктор фізико-математичних наук,
професор
ЮХНОВСЬКИЙ Ігор Рафаїлович
– доктор фізико-математичних наук,
КОЗЛОВСЬКИЙ Михайло Павлович

Офіційні опоненти – доктор фізико-математичних наук,
ЛЕВИЦЬКИЙ Роман Романович
– доктор фізико-математичних наук,
ФІЛІППОВ Олександр Ельвінович

Провідна установа – Одеський державний університет
ім. І.І.Мечнікова

Захист відбудеться "___" __________ 1994 р. о ___ год. на засіданні спеціалізованої ради Д.068.26.05 при Львівському державному університеті ім. І.Франка за адресою: 290005, м.Львів-5, вул. Ломоносова, 8а, Велика фізична аудиторія.

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці Львівського державного університету ім. І.Франка, м.Львів, вул. Драгоманова, 5.

Автореферат розіслано "___" __________ 1994 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фіз.-мат. наук
професор А.Є.Носенко

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. За останні двадцять років фізика фазових переходів перетворилася на самостійну галузь, де розвинуто потужні теоретичні методи і виконуються експерименти на різних системах. Значний прогрес в розумінні фізичної картини фазового переходу вдалося досягнути завдяки застосуванню методу ренормгрупи (РГ), яка була розвинута раніше в квантовій теорії поля. Так, інфрачервоні розбіжності в теорії поля, які виникають при скінченному хвильовому вектору q і імпульсі обрізання $\Lambda \to \infty$, можуть бути співставлені з розбіжностями в теорії фазових переходів при $T = T_c$ в границі $q \to 0$ при скінченному $\Lambda \sim 1/c$ (c-обернений період кристалічної гратки). В результаті в обох теоріях проблема опису системи в границі $q/\Lambda \to 0$ по-суті та сама і зводиться до переходу від формалізму функцій Гріна до кореляційних функцій та гамільтоніану. Таким чином, метод РГ виявився життєздатним математичним формалізмом для опису фізичної картини поведінки систем поблизу T_c, суть якої у виникненні масштабної інваріантності і катастрофічному зростанні кореляційної довжини.

Встановлення наявності класів універсальності, які включають в себе фазові переходи в фізично різних системах, дозволило сконцентрувати увагу на обчисленні універсальних значень для критичних індексів та амплітуд, що визначають асимптотичну поведінку термодинамічних функцій (теплоємність, сприйнятливість та ін.) поблизу T_c. На даний час відомо декілька реалізацій РГ схеми, це, зокрема, вільсонівський підхід (у різних модифікаціях); теоретико-польовий підхід (т.з. "безмасова" та "масивна" теорія поля), РГ в прямому просторі, монте-карлівська РГ та ін. Різна техніка, яка використовується в даних підходах, значною мірою ускладнює їх грунтовне порівняння, яке часто може бути виконане лише на рівні кінцевих числових значень для критичних індексів та амплітуд. Суттєвим питанням при виконанні такого порівняння є встановлення важливості вищих флуктуацій спінових мод (що відповідає моделям ϕ^6, ϕ^8, $\cdots$), оскільки дана проблема по-різному вирішується в різних підходах. У зв'язку із цим як обчислення універсальних характеристик фазового переходу в кожній новій схемі, так і грунтовне порівняння різних схем між собою є потрібним і актуальним.

Крім обчислення числових значень для критичних індексів та амплітуд значна увага приділяється обчисленню критичної температури, отриманню явних виразів для термодинамічних функцій, рівняння стану. На даний час такі обчислення виконано лише в небагатьох підходах.

Ряд оригінальних результатів отримано на основі методу колективних змінних, розвинутого І.Р.Юхновським. Оригінальна процедура РГ перетворення, запропонована в рамках даного методу, дозволила отримати наближений розв'язок моделі Ізінга та n-компонентної моделі без використання теорії збурень. Обчислено числові значення критичних індексів та амплітуд, отримано вирази для термодинамічних функцій в околі T_c. Виконано аналіз фазових переходів в системі рідина-газ, в бінарних сумішах та розплавах.

Мета роботи – дослідження критичної поведінки тривимірної моделі Ізінга та n-компонентної моделі, які описують фазові переходи в конкретних фізичних системах (ферромагнетики, сегнетоелектрики, бінарні суміші та розплави та ін.) за допомогою методу колективних змінних, всесторонній аналіз ренормгрупової схеми в даному методі та її порівняння з іншими теоретичними підходами. У зв'язку із цим завданнями даної дисертаційної роботи є:

- виконання всестороннього аналізу ренормгрупової схеми в методі колективних змінних за допомогою теорії збурень: отримання діаграмного представлення відповідних рекурентних співвідношень, порівняння на діаграмному рівні з іншими ренормгруповими схемами, встановлення області її застосовності;
- обчислення універсальних характеристик фазового переходу (критичних індексів) за допомогою методу колективних змінних в двопетлевому наближенні, порівняння з даними інших методів;
- дослідження суттєвості врахування вищих флуктуацій спінових мод та залежності кінцевих результатів від деталей ренормгрупової схеми;

- отримання прецезійних числових значень для критичних індексів та амплітуд із використанням теоретико-польового підходу;
- отримання явного виду для рівняння стану моделі Ізінга в околі критичної точки за допомогою методу колективних змінних.

Наукова новизна. В дисертаційній роботі вперше виконано порівняльний аналіз на діаграмному рівні РГ схеми Юхновського із іншими РГ схемами, зокрема детально досліджується відповідність із РГ схемою у вільсонівському підході. Показано, що в обох підходах отримується один і той самий клас діаграм. Проаналізовано відмінності при обчисленні різних типів діаграм. Знайдено область застосовності РГ схеми Юхновського залежно від значення РГ параметру s.

Вперше запропоновано спосіб самоузгодженого врахування вкладів від вищих флуктуацій спінових мод при розрахунку характеристик фазового переходу в моделі Ізінга та n-компонентній моделі при використанні РГ схем із циклічною напівгрупою. Показано, що врахування флуктуацій типу ρ^6 приводить до появи розбіжностей при $d = 3$ (де d-розмірність простору), які було усунуто шляхом виконання ϵ-розкладу.

Вперше отримано ϵ-розклади для критичних індексів моделі Ізінга та n-компонентної моделі з точністю до ϵ^2 при виконанні інфінітезимального перетворення РГ із циклічною напівгрупою. Отримані ϵ-розклади демонструють хороше узгодження із числовими значеннями для критичних індексів, отриманими із високотемпературних розкладів.

Вперше в рамках РГ перетворення Юхновського завдяки використанню ϵ-розкладу вдалося в значній мірі усунути залежність кінцевих результатів від деталей РГ схеми, а саме залежність від величини параметру поділу s.

Вперше виконано аналіз асимптотичних рядів теорії збурень, отриманих в рамках масивної теорії поля, за допомогою оригінальної процедури перерозкладу, суть якої полягає в самоузгодженому врахуванні вищих порядків теорії збурень при розрахунку характеристик критичної поведінки. В результаті отримано прецезійні значення для критичних індексів і, використовуючи асимптотичний характер рядів, оцінено похибку, пов'язану із обриванням ряду. Запропонована процедура перерозкладу не потребує введення додаткових параметрів і приводить до меншої похибки обчислень, ніж процедура пересумування рядів Паде-Бореля.

Вперше за допомогою РГ схеми із циклічною РГ отримано явний вигляд для рівняння стану у випадку моделі Ізінга, яке пов'язує намагніченість, температуру та величину зовнішнього магнітного поля поблизу точки фазового переходу. Знайдено граничний випадок РГ параметру, при якому запропонована техніка переходить в техніку безмасової теорії поля. Запропоновано новий механізм формування критичного індексу для намагніченості, який не використовує розкладів по $\epsilon \ln |\tau|$.

Практична цінність. Виконані в дисертації теоретичні дослідження сприяють розширенню загальних уявлень про критичні явища в тривимірних системах, в яких спостерігається фазовий перехід другого роду. Отримані числові значення можуть бути використані при інтерпретації результатів експерименту для встановлення типу фазового переходу та належності до того чи іншого класу універсальності.

На захист виносяться такі положення:

1. Діаграмне представлення ренормгрупового перетворення Юхновського для опису критичної поведінки в магнітних системах з короткодіючою взаємодією. Його аналіз в широкому інтервалі значень ренормгрупового параметру s і порівняння з іншими ренормгруповими схемами.

2. Процедура коректного врахування вищих флуктуацій спінових мод в околі критичної точки. Вирази для критичних індексів, що характеризують температурну залежність теплоємності, сприйнятливості та радіусу кореляцій в околі критичної точки у вигляді рядів ϵ-розкладу, отриманих за допомогою ренормгрупового перетворення Юхновського. Числові значення відповідних критичних індексів в тривимірному випадку, які добре узгоджуються з даними високотемпературних розкладів та експериментом.

3. Прецезійні числові значення для критичних індексів та комбінацій критичних амплітуд n-компонентної моделі Стенлі, отримані за допомогою теоретико-польового підходу в тривимірному випадку. Використовується запропонована в роботі процедура перерозкладу асимптотичних рядів теорії збурень, яка є альтернативою до техніки пересумування Паде-Бореля.

4. Аналіз критичної поведінки моделі Ізінга у впорядкованій фазі. Схема розрахунку рівняння стану в околі точки фазового переходу, яка працює в широкій області значень РГ параметру s. Новий механізм формування критичного індексу намагніченості.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідалися і обговорювалися на Всесоюзній конференції *"Сучасні проблеми статистичної фізики"*, Львів, 3-5 лютого 1987 р., Регіональній конференції молодих вчених *"Фізика конденсованого стану"*, Львів, 29-30 березня 1988 р., *Школі-семінарі молодих вчених із статистичної фізики*, Львів, 12-15 жовтня 1988 р., *I Радянсько-польському Симпозіумі з фізики сегнетоелектриків та споріднених матеріалів*, Львів, 4-8 червня 1990 р., *IV Літній школі з нелінійних динамічних систем*, Самос, 20 липня – 8 серпня 1990 р.(Греція), Всесоюзній конференції *"Сучасні проблеми статистичної фізики"*, Харків, 14-17 травня 1991 р., Українсько-Французькому Симпозіумі *"Конденсована речовина - наука та промисловість"*, Львів, 20-27 лютого 1993 р.

Публікації За матеріалами дисертації опубліковано 11 робіт, перелік яких подано вкінці автореферату.

Структура і об'єм дисертації. Основна частина дисертації має об'єм 101 стор. і складається із вступу, трьох розділів і висновків. Список літератури, що цитується, вміщає 98 найменувань вітчизняних та зарубіжних джерел. Загальний об'єм дисертації 111 стор.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтовано актуальність теми, виконано огляд теорії фазових переходів та критичних явищ, проаналізовано особливості різних ренормгрупових схем. Тут вказано мету роботи, коротко викладено її зміст і перераховано основні положення, що висуваються на захист.

В першому розділі розглядається наближене перетворення ренормгрупи Юхновського та виконується його детальне порівняння з іншими ренормгруповими схемами.

Статистична сума моделі Ізінга в представленні колективних змінних (КЗ) записується у вигляді (І.Р.Юхновський, 1971):

$$\mathcal{Z} = \int \exp(-\beta\mathcal{H}(\rho))\mathcal{J}(\rho)(d\rho)^N, \tag{1}$$

де $\mathcal{H}(\rho))$ – гамільтоніан системи в представленні КЗ, $\mathcal{J}(\rho)$ – якобіан переходу від спінових до КЗ. Колективні змінні є модами флуктуацій спінового моменту. В дисертації показано, що з форми (1) можна легко отримати форму типу Гінзбурга-Ландау-Вільсона:

$$\mathcal{Z} = 2^N \prod_{\vec{l}} \int \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{\vec{l}_1\vec{l}_2}\beta\Phi_{\vec{l}_1\vec{l}_2}s_{\vec{l}_1}s_{\vec{l}_2} - \sum_{p=1}^{\infty}\frac{a_{2p}}{(2p)!}(s_{\vec{l}})^{2p} + \beta H\sum_{\vec{l}} s_{\vec{l}}\right) ds_{\vec{l}}, \tag{2}$$

якщо виконати певну апроксимацію якобіану переходу. Її суть полягає в скороченні меж інтегрування в інтегралах, що представляють відповідні δ-функції, в результаті чого відбувається їх ефективне "розмивання" і ми приходимо до функціональної форми (2). Знайдено числові значення коефіцієнтів a_{2p}.

Далі подано детальну схему виконання наближеного перетворення ренормгрупи (НПРГ) Юхновського. Основною відмінністю НПРГ від інших підходів є оригінальна техніка виділення довгохвильових мод, яка виконується, в загальному випадку, без застосування теорії збурень. Фазовий простір КЗ розбивається на шари (які визначаються величиною хвильового вектора $\vec{k}$), по яких відбувається інтегрування починаючи від короткохвильових і закінчуючи довгохвильовими модами. Фур'є-образ потенціалу взаємодії замінюється в кожному шарі на відповідне середнє значення. В результаті факторизація функціоналу статсуми виконується в координатному просторі, в кожному шарі окремо. Основна інформація про критичну поведінку міститься в рекурентних співвідношеннях (РС) між затравками блочних гамільтоніанів, які виникають при виконанні НПРГ:

$$\begin{aligned} r^{(n+1)} &= (s^{(n)})^2((r^{(n)} + q^{(n)})\mathcal{N}^{(n)} - q^{(n)}), \\ u^{(n+1)} &= u^{(n)}(s^{(n)})^{4-d}\mathcal{E}^{(n)}, \\ w^{(n+1)} &= w^{(n)}(s^{(n)})^{6-2d}\mathcal{K}^{(n)}, \\ &\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

де $\mathcal{N}^{(n)}$, $\mathcal{E}^{(n)}$, $\mathcal{K}^{(n)}$ – відомі функції від $r^{(n)}$, $u^{(n)}$,$w^{(n)}$.

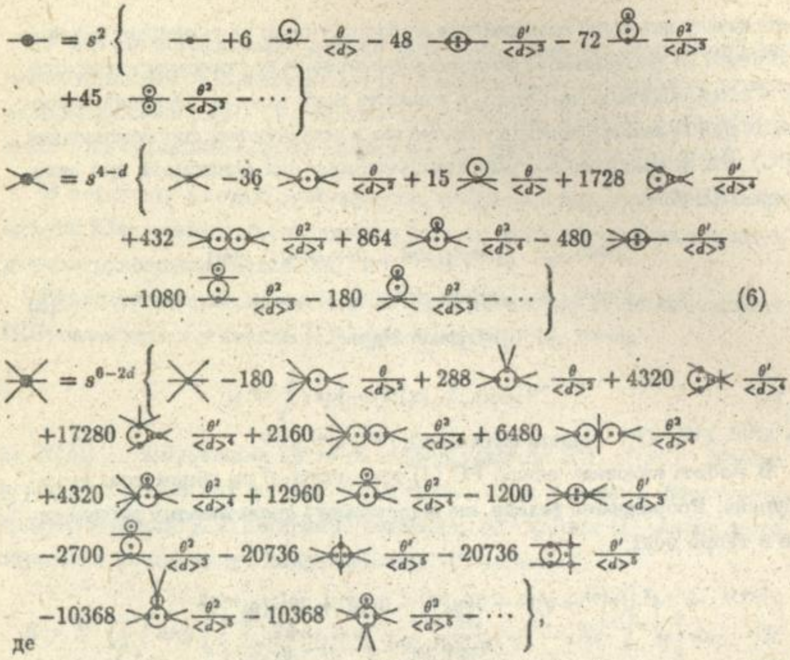
В роботі виконано аналіз РС (3) для моделі ρ^6 за допомогою теорії збурень. Розраховано вклади, що відповідають двопетлевому наближенню в теорії поля:

$$\begin{aligned} r^{(n+1)} &= s^2\Big[(r^{(n)} + q)(1 + 3\theta {g_4}^{(n)} - 3(2\theta' + 3\theta^2)({g_4}^{(n)})^2 \\ &\qquad + \tfrac{45}{4}\theta^2 {g_6}^{(n)} + \cdots) - q\Big], \\ u^{(n+1)} &= s^{4-d}u^{(n)}\Big[1 - 9\theta {g_4}^{(n)} + \tfrac{15}{2}\theta {g_6}^{(n)}/{g_4}^{(n)} + 27(4\theta' + 3\theta^2)({g_4}^{(n)})^2 \\ &\qquad - \tfrac{15}{2}(8\theta' + 21\theta^2){g_6}^{(n)} + \cdots\Big], \\ w^{(n+1)} &= s^{6-2d}w^{(n)}\Big[1 - 45\theta {g_4}^{(n)} + 36\theta({g_4}^{(n)})^3/{g_6}^{(n)} \\ &\qquad + 270(5\theta' + 6\theta^2)({g_4}^{(n)})^2 - \tfrac{75}{2}(4\theta' + 9\theta^2){g_6}^{(n)} \\ &\qquad - 648(2\theta' + \theta^2)({g_4}^{(n)})^4/{g_6}^{(n)} + \cdots\Big]. \end{aligned} \tag{4}$$

де:

$$\theta = 1 - s^{-d}, \qquad \theta' = 1 - 3s^{-d} + 2s^{-2d}. \tag{5}$$

Отримано відповідне діаграмне представлення, де кожному коефіцієнту ряду в (4) співставляється одна чи група діаграм:



де

$$< d > = < d(k) >_{\Omega} = r + q, \tag{7}$$

$$\theta = 1 - s^{-d}, \qquad \theta' = 1 - 3s^{-d} + 2s^{-2d}, \tag{8}$$

вершині відповідає $u/(4!N)$ або $w/(6!N^2)$), зовнішній лінії – змінна $\rho_{\vec{k}}$, $k \in [0, B]$, кожній замкнутій петлі – інтегрування по внутрішньому імпульсу $\vec{q}_i, q \in (B/s, B]$, кожній внутрішній лінії – пропагатор $1/d(\vec{q}), q \in (B/s, B]$. Для зручності петльові інтеграли винесено з-під діаграм, що символічно зображено крапками всередині петель.

Завдяки отриманому діаграмному представленню виникла можливість глибокого порівняння НПРГ із іншими підходами, зокрема із концептуально найближчим – вільсонівським підходом. В результаті порівняння встановлено, що однопетлеві та двопетлеві звідні (які можна розрізати по вершині) діаграми обчислюються в обох підходах однаково, а двопетлеві незвідні – дещо відмінно. При цьому є певна область значень

РГ параметру $s \sim 2^{1/d}$ (s-параметр поділу на шари), де обидва підходи приводять до однакового результату. При виконанні безмежно малого (інфінітезимального) РГ перетворення різниця полягає в різній асимптотиці діаграм при $s \to 1$:

$$\frac{1}{N^2} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2 \in \Omega'} 1 = \begin{cases} \frac{9}{16}(1 - s^{-2})^3 & \text{при } s \leq 2, \\ \frac{1}{32}(15 - 96s^{-3} + 54s^{-4} + 78s^{-6}) & \text{при } s \geq 2 \end{cases} \tag{9}$$

за рахунок чого у вільсонівському підході двопетльові незвідні діаграми пропадають, а в НПРГ – залишаються і вносять ненульовий вклад в фіксовану точку та критичні індекси. Вплив цього вкладу на відповідні числові значення критичних індексів досліджується в наступному розділі.

В **другому розділі** виконано розрахунок універсальних критичних характеристик фазового переходу. З метою аналізу рядів теорії збурень, які отримуються в рамках різних РГ схем, пропонується оригінальна процедура перерозкладу, яка дозволяє послідовним чином врахувати вищі порядки теорії збурень. Ідея полягає в пошуку координат фіксованої точки g_4^*, g_6^* і т.д., які характеризують взаємодії відповідно ρ^4, ρ^6 і т.д. в виді рядів по степенях параметру g', що є розв'язком для g_4^* в однопетлевому наближенні. В результаті отримуємо критичні індекси та інші універсальні характеристики у виді рядів, перерозкладених по степенях g'. Доцільність використання такої процедури полягає як в можливості оцінки вкладу від кожного порядку теорії збурень, так і в оцінці похибки, пов'язаної із обриванням ряду (використовуючи його асимптотичний характер).

Запропонована процедура перерозкладу застосована до РС в методі колективних змінних. В результаті цього вдалося послідовним чином врахувати вклад від вищих взаємодій спінових флуктуацій ρ^6 і т.д. в фіксовану точку та критичні індекси. При врахуванні взаємодії ρ^6 виникають розбіжності при розмірності простору $d = 3$ (яка для даної взаємодії є критичною):

$$g_4^* = g'[1 + 3\frac{d+12}{d-3}g' + \cdots], \qquad g_6^* = \frac{18d}{d-3}g'^3 + \cdots, \tag{10}$$

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{3d}{4}g' + \frac{9d}{8} \cdot \frac{d^3 - 11d^2 + 42d - 24}{(d-2)(d-3)}g'^2 + \cdots. \tag{11}$$

де параметр перерозкладу:

$$g' = g'_4 = \frac{4-d}{9d} \tag{12}$$

Дані розбіжності було запропоновано усунути за допомогою розмірної регуляризації, що в даному випадку просто означає виконання ϵ-розкладу:

$$\frac{1}{d-3} = \frac{1}{1-\epsilon} \approx 1 + \epsilon + \epsilon^2 + \cdots \tag{13}$$

Відзначимо, що критичні розмірності для g_8 і вищих затравок є нецілими: $d = 8/3$, $d = 5/2$ і т.д. і включення даних затравок є тривіальним. Схожі за характером розбіжності двопетлевих діаграм виникають в безмасовій теорії поля (K.Symanzik, 1973). В результаті регуляризації отримано ϵ-розклади для критичних індексів, наприклад, для критичного індекса кореляційної довжини ν у випадку n-компонентної моделі маємо:

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{n+2}{4(n+8)}\epsilon + \frac{n+2}{8(n+8)^3}(n^2 + 31n + 76)\epsilon^2 \tag{14}$$

Числові значення для ν, обчислені з даного ряду при $d = 3$, добре узгоджуються як із даними високотемпературних розкладів, так і з результатами інших РГ схем:

Табл.1.Критичний індекс ν n-компонентної моделі при $d = 3$: (14) - ϵ-розклад в РГ процедурі Юхновського; ВТР - високотемпературні розклади; ТПП - теоретико-польовий підхід).

n	(14)	ВТР	ТПП, $d=3$	ТПП, ϵ^2
0	0.600	0.600	0.588	0.592
1	0.639	0.638	0.630	0.627
2	0.671	0.670	0.669	0.655
3	0.697	0.703	0.705	0.678

Результати, отримані за допомогою інших методів, взято із робіт інших авторів (M.Ferer, M.Wortis, 1972; D.S.Ritchie, M.E.Fisher, 1972; G.A.Baker,Jr, B.G.Nickel, D.I.Meiron, 1978; K.Wilson, 1972). В роботі показано, що величина вкладу від двопетльових незвідних діаграм в фіксовану точку та критичні індекси становить $1/5 \div 1/7$ від суми інших вкладів. Відкидання даних діаграм приводить до деякого завищення кінцевих результатів для ν:

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{n+2}{4(n+8)}\epsilon + \frac{n+2}{8(n+8)^3}(n^2+38n+96)\epsilon^2, \qquad (15)$$

таким чином врахування даних діаграм є бажаним.

В роботі досліджено залежність кінцевих результатів від деталей РГ схеми, зокрема залежність від параметру поділу s, яка притаманна іншим підходам (наприклад РГ в прямому просторі, наближена рекурентна формула Вільсона і т.д.). Обчислено ϵ-розклади для критичного індексу ν та індексів поправок до скейлінгу Δ, Δ_1 із явно виділеною залежністю від s. Показано, що s-залежність індекса ν усувається вже в другому порядку по ϵ, а для її усунення в виразах для індексів поправок до скейлінгу необхідно розглянути вищі порядки теорії збурень.

З метою отримання прецезійних числових значень для критичних індексів процедура перерозкладу застосована до рядів теорії збурень "масивної" теорії поля. В результаті цього отримано перерозкладені ряди для критичних індексів, які мають асимптотичну природу із достатньо малим мінімальним членом (порядку 10^{-3}). Наприклад, у випадку моделі Ізінга $n=1$:

$$\begin{aligned} \nu &= 0.5 + 0.083333g' + 0.033322g'^2 + 0.007264g'^3 + 0.005146g'^4 \\ &\quad -0.001118g'^5 + 0.003694g'^6 - \cdots \qquad (16) \\ \eta &= 0.010974g'^2 + 0.010187g'^3 + 0.005044g'^4 + 0.003206g'^5 \\ &\quad +0.001295g'^6 + \cdots \end{aligned}$$

Цей факт дозволяє обірвати ряд за крок мінімального члену, а його величина визначить похибку, пов'язану із обриванням:

$$\nu = 0.629 \pm 0.001, \qquad \eta = 0.029 \pm 0.001 \qquad (17)$$

Дані результати демонструють прекрасне узгодження із результатами аналізу цих же рядів за допомогою техніки пересумування Паде-Бореля (G.A.Baker,Jr, B.G.Nickel, D.I.Meiron, 1978):

$$\nu = 0.630 \pm 0.002, \qquad \eta = 0.031 \pm 0.011 \tag{18}$$

Отримане "покращення" асимптотичних рядів за допомогою процедури перерозкладу властиве і для інших значень розмірності спіну n. В роботі виконано відповідні розрахунки числових значень критичних індексів ν, η і комбінації критичних амплітуд R_ξ^+ при $n = 0 \div 3$:

Табл.2. Значення критичних індексів ν, η, обчислені за допомогою процедури перерозкладу і відповідні значення ν^*, η^*, обчислені за допомогою техніки Паде-Бореля (J.C.Le Guillou, J.Zinn-Justin, 1980).

n	ν	ν^*	η	η^*
0	0.584±0.002	0.588±0.0015	0.025±0.0009	0.027±0.004
1	0.629±0.001	0.630±0.0015	0.029±0.001	0.031±0.004
2	0.665±0.001	0.669±0.002	0.031±0.001	0.033±0.004
3	0.695±0.003	0.705±0.003	0.031±0.001	0.033±0.004

Табл.3. Значення універсальної комбінації критичних амплітуд R_ξ^+ n-компонентної моделі в тривимірному випадку, обчислені за допомогою процедури перерозкладу і відповідні значення R_ξ^{+*}, обчислені за допомогою техніки Паде-Бореля (C.Bervillier, C.Godrèche, 1980).

n	R_ξ^+	R_ξ^{+*}
0	0.584±0.002	0.588±0.0015
1	0.629±0.001	0.630±0.0015
2	0.665±0.001	0.669±0.002
3	0.695±0.003	0.705±0.003

При всіх значеннях n похибка не перевищує $\sim 0.1 \div 0.2\%$.

В третьому розділі отримано явний вигляд для рівняння стану моделі Ізінга в околі критичної точки. Спочатку досліджуються РС для моделі Ізінга в методі колективних змінних. Для зручності колективна змінна ρ_0, яка описує флуктуації параметру порядку, зміщується на величину намагніченості, яка виникає у впорядкованій фазі. В результаті цього функціонал статистичної суми в термінах нових змінних набирає асиметричного виду (з непарними степенями по φ_k), типу функціоналу для переходу рідина-газ.

Далі відповідні РС аналізуються за допомогою теорії збурень. Знайдено координати фіксованої точки, власні значення лінійного оператора РГ:

$$g_1^* = g_3^* = 0, \qquad g_4^* = \frac{\epsilon \ln(s)}{9(1 - s^{-4})} \tag{19}$$

$$\begin{array}{ll} P_{11} = s^{1+\frac{d}{2}}, & P_{12} = s^{1+\frac{d}{2}} \frac{\theta}{2} \frac{1}{r^*+q} + \cdots, \\ P_{21} = 0, & P_{22} = s^{3-\frac{d}{2}}(1 - 9\theta g_4^* + \cdots), \end{array} \tag{20}$$

$$\begin{array}{ll} R_{11} = s^2(1 - 3\theta g_4^* + \cdots), & R_{12} = s^2 \frac{\theta}{2} \frac{1}{r^*+q} + \cdots, \\ R_{21} = s^{4-d} 108\theta (r^* + q)(g_4^*)^2 + \cdots, & R_{22} = s^{4-d}(1 - 18\theta g_4^* + \cdots) \end{array} \tag{21}$$

де P – матриця, яка перетворює асиметричні змінні $p^{(n)}, v^{(n)}$, а R – відповідно симетричні змінні $r^{(n)}, u^{(n)}$. Поблизу фіксованої точки розв'язок РС має такий вигляд:

$$\begin{aligned} p^{(n)} &= d_1' L_1{}^n + P d_2' L_2{}^n, \\ v^{(n)} &= d_2' L_2{}^n, \\ r^{(n)} &= r^* + c_1' E_1{}^n + R c_2' E_2{}^n, \\ u^{(n)} &= u^* + R_1 c_1' E_1{}^n + c_2' E_2{}^n, \end{aligned} \tag{22}$$

Відповідно поза околом фіксованої точки маємо розв'язок іншого типу:

$$\begin{aligned} p^{(n_s+m)} &= s^{(1+\frac{d}{2})m}[p^{(n_s)} + v^{(n_s)} \mathcal{I}_1^{(m)}(r^{(n_s)})] \\ v^{(n_s+m)} &= s^{(3-\frac{d}{2})m} v^{(n_s)}[1 - 3u^{(n_s)} \mathcal{I}_2^{(m)}(r^{(n_s)}) + 2(v^{(n_s)})^2 \mathcal{I}_3^{(m)}(r^{(n_s)})] \\ r^{(n_s+m)} &= s^{2m}[r^{(n_s)} + u^{(n_s)} \mathcal{I}_1^{(m)}(r^{(n_s)}) - (v^{(n_s)})^2 \mathcal{I}_2^{(m)}(r^{(n_s)})] \\ u^{(n_s+m)} &= s^{(4-d)m} u^{(n_s)}[1 - 3u^{(n_s)} \mathcal{I}_2^{(m)}(r^{(n_s)}) + 12(v^{(n_s)})^2 \mathcal{I}_3^{(m)}(r^{(n_s)}) \\ &\quad -6 \frac{(v^{(n_s)})^2}{u^{(n_s)}} \mathcal{I}_4^{(m)}(r^{(n_s)})] \end{aligned} \tag{23}$$

де $\mathcal{I}_f^{(m)}(r^{(n_6)})$ – суми вигляду:

$$\mathcal{I}_f^{(m)}(r^{(n_6)}) = \frac{\theta}{2}\sum_{l=0}^{m-1}\frac{s^{-dl}}{(r^{(n_6)} + qs^{-2l})^f} \tag{24}$$

В інфінітезимальній границі $s \to 1$ дані суми перетворюються в однопетлеві інтеграли теорії поля:

$$\lim_{s\to 1}\mathcal{I}_f^{(m)}(r^{(n_6)}) = \frac{d}{2(\beta\tilde{\Phi}(0))^f B^{d-2f}}\int_{B^{(n_6+m)}}^{B^{(n_6)}}\frac{k^{d-1}dk}{(k^2+\bar{m}^2)^f}, \tag{25}$$

де маса $\bar{m} = \sqrt{\bar{r}^{(n_6)}B^{(n_6)}}$.

Рівняння стану моделі Ізінга визначається із рівняння: $a_1^0 = 0$, де a_1^0 – коефіцієнт біля першої степені розподілу по φ_0. Розписуючи дане рівняння в явному вигляді, отримуємо:

$$\frac{h}{m} = r - r_c + \frac{um^2}{6} + u(P + \mathcal{I}_1(r^{(n_6)}))\frac{L_2^{n_6}}{L_1^{n_6}} \tag{26}$$

де n_6 – деякий характерний крок РГ перетворення, що визначає область застосовності розв'язку (22). В інфінітезимальній границі $s \to 1$:

$$\lim_{s\to 1}\mathcal{I}_1(r^{(n_6)}) = \lim_{s\to 1}\mathcal{I}_1(r') = \frac{1}{\beta\tilde{\Phi}(0)}(1 + \frac{r'}{\beta\tilde{\Phi}(0)}\ln\frac{r'}{\beta\tilde{\Phi}(0)}) + O(\epsilon), \tag{27}$$

отже рівняння стану записується у вигляді:

$$\frac{\bar{h}}{\bar{m}} = \tau + \frac{u\bar{m}^2}{6} + \frac{\epsilon}{6}(\tau + \frac{u\bar{m}^2}{2})\ln(\tau + \frac{u\bar{m}^2}{2}) \tag{28}$$

де $\bar{h}, \bar{m}$ - пронормовані на $\beta\tilde{\Phi}(0)$ зовнішнє поле і температура. Дана форма була раніше отримана в рамках безмасової теорії поля (E.Brezin, D.J.Wallace, K.G.Wilson, 1972) і приводить до відомих ϵ-розкладів для критичних індексів:

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{\epsilon}{6} + \cdots, \quad \delta = 3 + \epsilon + \cdots. \tag{29}$$

які формуються в результаті виконання розкладів по степенях $\epsilon\ln|\tau|$. Достатньо близько до T_c маємо $\tau >> 1$, що вимагає значної малості ϵ.

При виконанні неінфінітезимального РГ перетворення температурна залежність намагніченості визначається іншим членом:

$$\frac{L_2^{n_\delta}}{L_1^{n_\delta}} = (\delta')^{-2(d/2-1)} \cdot (\tau)^{2\nu(d/2-1)} = const. \cdot (\tau)^{2\beta}, \tag{30}$$

Таким чином для рівняння стану отримуємо іншу еквівалентну форму:

$$\frac{h}{m} = \beta\bar{\Phi}(0)\tau + \frac{um^2}{6} + u \cdot const.(\tau)^{2\beta}, \tag{31}$$

яка приводить до тієї ж асимптотичної поведінки намагніченості m від температури. Але в даному випадку формування індексу β відбувається за рахунок температурної залежності члена $L_2^{n_\delta}/L_1^{n_\delta}$ і розклади по степенях $\epsilon \ln|\tau|$ не використовуються.

Таким чином, в рамках методу колективних змінних отримано явний вираз для рівняння стану. Показано, що в границі інфінітезимального РГ перетворення дана техніка переходить в техніку безмасової теорії поля і дає можливість отримати той же результат для рівняння стану. Нами виконано обчислення рівняння стану при неінфінітезимальному РГ перетворенні, за допомогою якого раніше було обчислено повні вирази для термодинамічних функцій в околі T_c (М.П.Козловський, І.В.Пилюк, І.Р.Юхновський, 1991). На відміну від техніки безмасової теорії поля тут не використовуються розклади по степенях $\epsilon \ln|\tau|$, а формування критичного індексу β відбувається за рахунок температурної залежності характерної точки n_δ, що визначає область застосовності лінійного оператора РГ.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ

Таким чином, в дисертаційній роботі виконано аналіз критичної поведінки тривимірної моделі Ізінга та n-компонентної моделі, які описують фазові переходи в конкретних фізичних системах (ферромагнетики, сегнетоелектрики, бінарні суміші та розплави та ін.) за допомогою методу колективних змінних.

Основні результати:

1. Виконано всесторонній аналіз ренормгрупової схеми в методі колективних змінних за допомогою теорії збурень – отримано відповідне діаграмне представлення рекурентних співвідношень, виконано порівняння даної ренормгрупової схеми на діаграмному рівні з іншими схемами, показано особливості обчислень різних класів діаграм, встановлено область застосування даної схеми.

2. Запропоновано процедуру коректного врахування вищих флуктуацій спінових мод, показано виникнення розбіжностей при $d = 3$ при включенні до розгляду флуктуацій типу ρ^6, запропоновано спосіб їх усунення. Отримано ϵ-розклади для критичних індексів в другому порядку по ϵ, які демонструють хороше узгодження з даними інших теоретичних методів.

3. Досліджено залежність кінцевих результатів від деталей ренормгрупової схеми. Показано, що залежність ведучих критичних індексів від вибору ренормгрупового параметру усувається вже в другому порядку по ϵ. Досліджується суттєвість врахування двопетльових незвідних діаграм і їх вплив на кінцеві результати.

4. Використовуючи оригінальну процедуру перерозкладу рядів теорії збурень отримано прецезійні числові значення для критичних індексів та амплітуд із використанням теоретико-польового підходу.

5. Отриманно рівняння стану моделі Ізінга в околі критичної точки за допомогою методу колективних змінних. Показано, що в границі інфінітезимального РГ перетворення дана техніка переходить в техніку безмасової теорії поля. Отримано еквівалентну форму рівняння стану при неінфінітезимальному РГ перетворенні, яка не використовує розкладів по параметру, пропорційному до $\ln|T - T_c|$.

Результати дисертації опубліковані в таких основних роботах:

1. *Козловский М.П., Ильницкий Я.Н., Пылюк И.В.* Свободная энергия и другие термодинамические функции трехмерной модели Изинга ниже точки фазового перехода. Киев, 1985. – 30 с. – (Препр. / АН УССР. ИТФ; ИТФ-85-107Р).
2. *И.Р.Юхновский, Я.Н.Ильницкий, М.П.Козловский.* Исследование критических свойств трехмерной модели Изинга. Специфический способ интегрирования статистической суммы. Киев, 1987. – 31 с. – (Препр. / АН УССР. ИТФ; ИТФ-87-17Р).
3. *Я.Н.Ильницкий.* Исследование критических свойств трехмерной модели Изинга в рамках специфического способа интегрирования статистической суммы. Учет высших базисных мер. Киев, 1987. – 13с. – (Препр. / АН УССР. ИТФ; ИТФ-87-150Р).
4. *И.Р.Юхновский, М.П.Козловский, Я.Н.Ильницкий.* О выборе параметра ренормгруппы при исследовании трехмерной модели Изинга // *УФЖ*. – 1989. – 34, №7. – с.1106-1110.
5. *M.P.Kozlovskii, Ja.N.Ilnytskii* Description of Phase Transition in Systems With Dimensionality Close to Four in the Collective Variables Method. Kiev, 1988. – 17с. – (Prepr. / Ukr. Acad. Sci. ITP; ITP-87-100E).
6. *И.Р.Юхновский, Я.Н.Ильницкий, М.П.Козловский.* Применение специфического способа разбивки к исследованию трехмерной модели Изинга./ Материалы всесоюзной конференции "Современные проблемы статистической физики", Львов, 3-5 февраля 1987 г., т.2, с.103.
7. *М.П.Козловский, Я.Н.Ильницкий* Неуниверсальные термодинамические характеристики модели Изинга при размерности пространства близкой к четырем в методе коллективных переменных. Киев, 1988. – 20 с. – (Препр. / АН УССР. ИТФ; ИТФ-88-69Р).

8. *Я.М.Ільницький, М.П.Козловський* Процедура переровкладу. Застосування до асимптотичних рядів теорії збурень. Київ, 1990. –16 с. – (Препр. / АН УССР. ИТФ; ИТФ-90-38У).

9. *Ja.N.Ilnytskii.* The Reexpansion Procedure. Application to the Asymptotic Series of Perturbation Theory // Тезисы докладов I Советско-польского симпозиума по физике сегнетоэлектриков и родственных материалов, Львов, 4-8 июня 1990, г. Киев, 1990, с.139.

10. *М.П.Козловский, Я.Н.Ильницкий.* Исследование критического поведения n-компонентной модели при помощи приближенного преобразования ренормгруппы. // Сборник аннотаций Всесоюзной конференции "Современные проблемы статистической физики", Харьков, 14-17 мая 1991 г., Харьков, 1991, с.79.

11. *Ja.N.Ilnytskii, M.P.Kozlovskii* The Equation of State of One-Component Spin Model in the Three-Dimensional Case// Тези Українсько-Французького Симпозіуму "Конденсована речовина – наука та промисловість", Львів, 20-27 лютого 1993, Сімферополь, 1993, с.238.