МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

Львівський державний університет
ім. Івана Франка

На правах рукопису

ЯРОШКО Сергій Адамович

РОЗВИТОК МЕТОДУ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗДІЛЕННЯ ЗМІННИХ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ДО ЗАДАЧ СИНТЕЗУ КОНФОРМНИХ АНТЕННИХ ҐРАТОК

(Спеціальність 05.13.16 – застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання і математичних методів в наукових дослідженнях)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Львів – 1994

ЛВ 30.844

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України.

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, професор
ВОЙТОВИЧ Микола Миколаєвич

Офіційні опоненти:

1. доктор фізико-математичних наук, професор,
КАЛЕНИК Петро Іванович
2. доктор фізико-математичних наук,
ШИНКАРЕНКО Георгій Андрійович

Провідна організація - Радіоастрономічний інститут Національної Академії Наук УКРАЇНИ.

Захист відбудеться "26" жовтня 1994 року на засіданні спеціалізованої ради К 04.04.05 в Львівському державному університеті ім. І.Франка, 290000, м. Львів, вул. Університетська, 1, факультет прикладної математики, 0130.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Львівського державного університету ім. І.Франка.

Автореферат розісланий "24" вересня 1994 року.

Вчений секретар
спеціалізованої ради Б.А.ОСТУДІН

ЛННБ України ім.В.Стефаника
00777686 (+)

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність проблеми. Бурхливий розвиток сучасної обчислювальної техніки зумовлює активну розробку нових числових методів для застосування їх у різноманітних областях науки. Однією з них є теорія синтезу антен.

Антени сучасних радіотехнічних систем в значній мірі визначають їх ефективність та можливі області застосування. Тому проектування антен, параметри яких задовільняють певним заданим вимогам, є важливою задачею. Здебільшого такі вимоги ставляться до характеристики електромагнітного поля на нескінченності (ця характеристика називається діаграмою напрямленості (ДН) антени).

Типова задача синтезу антен - зовнішня оберенена задача електродинаміки. В класичній постановці вона формулюється так: за заданою комплексною ДН знайти комплексний розподіл струму (поля) в розкриві випромінюючої системи. В такій постановці теорія синтезу розроблена досить глибоко і різносторонньо[1], проте її результатів буває не достатньо для розв'язання практичних задач. Виникає необхідність враховувати не тільки реальні вимоги до ДН, а й додаткові вимоги до розподілу струмів (поля) на антені та ін.[2] Часто на практиці інтерес представляє не вся комплексна ДН, а лише її амплітуда (модуль). З'являється свобода у виборі фазової ДН, яку

---

[1] Зелкин Е.Г. Построение излучающей системы по заданной диаграмме направленности.- М.-Л.: Энергоиздат, 1963.
Минкович Б.М., Яковлев В.П. Теория синтеза антенн. - М.: Сов. радио, 1969.

[2] Вахрах Л.Д., Кременецкий С.Д. Синтез излучающих систем. - М.: Сов. радио, 1974.
Чаплин А.Ф. Анализ и синтез антенных решеток. - Львов: Выща школа, 1987.

можна використати для задоволення тих чи інших додаткових вимог.

Задача синтезу антени стає нелінійною і багатопараметричною. Для її розв'язання найбільш зручно застосовувати варіаційні методи.

Синтез двовимірних конформних антен (наприклад, плоских прямокутних, циліндричних і т.д.) - як неперервних, так і дискретних - ускладнюється ще кількома обставинами. По-перше, доводиться долати значні обчислювальні труднощі, розв'язуючи нелінійні двовимірні інтегральні рівняння або системи великого числа нелінійних алгебраїчних рівнянь. По-друге, суттєво ускладнюється технічна реалізація отриманого розв'язку, який описується, як правило, складною функцією двох змінних або великою двовимірною таблицею. Тому актуальним залишається питання розробки числових методів, які дозволили б, не зважаючи на всі перераховані труднощі, розв'язувати потрібні для практики задачі синтезу антен, зокрема антенних граток (АГ). Одним із таких методів є метод узагальненого розділення змінних[3]. Він дозволяє, і це підтвердилось у даному дослідженні, ефективно розв'язувати задачі синтезу двовимірних антен за заданою ДН, змінні якої не розділяються.

Метою дисертаційної роботи є розвиток методу узагальненого розділення змінних (МУРЗ) в задачах синтезу плоских прямокутних антенних граток, модифікація його для інших типів конформних двовимірних граток, його алгоритмічна та програмна реалізація, обґрунтування методу, числове дослідження застосовності методу до задач синтезу конкретних випромінюючих систем. Розглядаються плос-

---

3 Войтович Н.Н. Синтез двумерной антенной решетки с обобщенным разделением переменных // Радиотехника и электроника, 1988, т.33, № 12, с.2637.

кі прямокутні антенні гратки, плоскі гексагональні гратки та циліндричні гратки. У всіх випадках заданою є лише амплітудна ДН. І аргумент (фаза) залишається при цьому вільним.

Наукова новизна дослідження полягає в наступному:

- вперше здійснена алгоритмічна та програмна реалізація методу узагальненого розділення змінних стосовно до задач синтезу антенних граток за заданою амплітудною ДН;

- доведена можливість отримання розв'язку задачі вказаним методом за скінчене число кроків;

- метод модифіковано на випадок синтезу плоских гексагональних та циліндричних антенних граток.

Достовірність отриманих в роботі результатів визначається:

- використанням загальноприйнятих в аналогічних наукових дослідженнях математичних моделей фізичних явищ;

- застосуванням до розв'язку задач синтезу збіжних чисельних методів;

- перевіркою, де це можливо, узгодженості результатів з відомими для подібних типів антен; у загальному випадку отримані результати не суперечать існуючим фізичним концепціям.

Практична цінність роботи полягає в тому, що розроблений комплекс програм можна застосовувати при створенні автоматизованих систем проектування антен. Він вимагає невеликих затрат машинного часу для розв'язання достатньо складних задач синтезу, наочно відображає процес розв'язування, дозволяє у зручній формі представляти та аналізувати отримані результати. Програми цього комплексу були використані при синтезі конкретних випромінюючих систем.

Одержані в роботі теоретичні результати можуть використовуватись при розв'язуванні аналогічних або подібних задач синтезу та

діагностики.

Отримані числові результати можуть бути безпосередньо використані при проектуванні реальних антенних систем.

Апробація роботи і публікації. Основні результати дисертаційної роботи були представлені на міжнародному симпозіумі URSI (м. Стокгольм, 1989 р.), доповідались і обговорювались на X Всесоюзному симпозіумі по дифракції та розповсюдженню хвиль (м. Вінниця, 1990 р.), на Республіканській конференції "Застосування обчислювальної техніки та математичних методів у наукових дослідженнях" (м. Львів, 1991 р.), на щорічній конференції секції URSI (м. Клейнхойбах, ФРН, 1992 р.), на Міжнародному симпозіумі "Метод дискретних особливостей в задачах математичної фізики" (м. Харків, 1993 р.), на наукових семінарах ІПММ НАН України.

За матеріалами дисертації опубліковано шість друкованих праць, частина результатів даної роботи використана в монографії Андрийчук М.И., Войтович Н.Н., Савенко П.А., Ткачук В.П. Синтез антенн по амплитудной диаграмме направленности.- Киев: Наукова думка, 1993.

Структура і обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох глав, висновків, списку літератури і додатку. Загальний об'єм дисертації складає 155 сторінок, в тому числі 48 малюнків, 2 таблиці, список використаної літератури із 87 найменувань, 10 сторінок додатку.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтована важливість та актуальність питань, вирішенню яких присвячена дисертація. Наведено короткий огляд літе-

ратури по вибраній темі. Сформульована мета дослідження, наукова новизна, а також основні положення, які виносяться на захист. Дано короткий зміст усіх глав дисертації.

В першій главі дано постановки задач синтезу конформних антен за заданими повною ДН та амплітудною ДН (АДН), викладено метод узагальненого розділення змінних (МУРЗ) розв'язування цих задач, доведена його збіжність в сенсі монотонного спадання вихідного функціоналу, обґрунтована можливість отримання розв'язку задачі синтезу за скінчене число кроків методу.

У першому параграфі розглянуто задачу синтезу антени за заданою повною ДН. Розв'язок прямої задачі - визначення ДН $f(\varphi,\vartheta)$ за струмом $I(x,y)$ на антені - відомий і може бути представлений у вигляді

$$f = A\,I, \qquad (1)$$

де A - лінійний обмежений оператор, конкретний вигляд якого залежить від типу антени: для антен з неперервним розкривом A - інтегральний оператор, $I=I(x,y)$ - функція двох змінних (координат); для дискретних антен (антенних граток) A - так званий суматорний оператор, $I=(I_{nm})_{n=1}^{N}{}_{m=1}^{M}$ - матриця.

Класична постановка оберненої задачі (задачі синтезу) як задачі визначення $I(x,y)$ за відомою $f(\varphi,\vartheta)$ полягає в розв'язанні рівняння (1). Як відомо[4], така задача є некоректною. Вона може взагалі не мати розв'язку або цей розв'язок може бути нестійким. Використаємо варіаційну регуляризовану постановку задачі синтезу, яка полягає в мінімізації функціоналу

---

[4] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1986.

$$\sigma = \| f - A I \|_f^2 + t \| I \|_I^2, \qquad (2)$$

де f, $AI \in H_f$; $I \in H_I$; H_f, H_I – комплексні гільбертові простори діаграм і струмів відповідно (якщо розглядається антенна гратка, то H_I – евклідів простір).

В норму простору H_f може входити вагова функція $p(\varphi,\vartheta) \geq 0$, яка дозволяє покращувати наближення в певних діапазонах кутів. Другий доданок в (2) з ваговим множником $t \geq 0$ дозволяє виключати з розгляду розв'язки з великою нормою струму. Ці розв'язки характеризуються осцилюючими розподілами струму, і їх важко реалізувати на практиці.

Легко отримати рівняння Ейлера функціоналу (2):

$$A^* A I + t I = A^* f, \qquad (3)$$

де A^*– оператор, спряжений до оператора A в сенсі рівності $(AI,f)_f = (I,A^*f)_I$, $(\cdot,\cdot)_f$, $(\cdot,\cdot)_I$– скалярні добутки в просторах H_f, H_I відповідно.

Розв'язок рівняння (3) і буде розв'язком задачі синтезу. Проте на практиці його отримання пов'язане зі значними обчислювальними труднощами, а знайдений розподіл струму, який описується функцією двох змінних або великою двовимірною таблицею, важко реалізувати технічно. Тому варто було б шуканий розподіл струму представляти у деякому спрощеному наближеному вигляді.

Метод узагальненого розділення змінних полягає в тому, що розв'язок задачі синтезу шукається у вигляді суми доданків з розділеними змінними, в якій кожен доданок визначається послідовно з вимоги мінімізації відповідного функціоналу. Такий прийом раніше

використовувався для наближеної заміни ядра на вироджене[5], а також для розв'язування багатовимірних інтегральних рівнянь[6].

Представимо s-те наближення до розподілу струму $I(x,y)$ у вигляді

$$I^{(s)}(x,y) = \sum_{j=1}^{s} a^{(j)}(x)\, b^{(j)}(y) = \tag{4}$$

$$= I^{(s-1)}(x,y) + a^{(s)}(x)\, b^{(s)}(y),\ s=1,2,\ldots$$

і шукатимем поправку $a^{(s)}(x)\, b^{(s)}(y)$ при відомому розподілі $I^{(s-1)}(x,y)$ (на першому кроці вважаємо $I^{(0)}(x,y)\equiv 0$). Вимагатимем, щоб шукана поправка мінімізувала функціонал

$$\Phi_s = \| f - A I^{(s)} \|_f^2 + t \| I^{(s)} \|_I^2, \tag{5}$$

Рівняння Ейлера цього функціоналу мають вигляд

$$\begin{cases} \langle (A^*A + tE) I^{(s)}, b^{(s)} \rangle_2 = \langle A^* f, b^{(s)} \rangle_2 \\ \langle (A^*A + tE) I^{(s)}, a^{(s)} \rangle_1 = \langle A^* f, a^{(s)} \rangle_1, \end{cases} \tag{6}$$

де E - одиничний оператор; запис $\langle \cdot,\cdot \rangle_1 (\langle \cdot,\cdot \rangle_2)$ означає скалярний добуток двох елементів простору H_I, взятий лише по першій (другій) змінній, як від функції одного аргументу таким чином, що виконується $(\cdot,\cdot)_I = \langle\langle \cdot,\cdot \rangle_1,\cdot \rangle_2 = \langle\langle \cdot,\cdot \rangle_2,\cdot \rangle_1$.

---

[5] Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы.- Киев, Наук. думка, 1986.

[6] Баляш Ю.Г., Войтович Н.Н. // Интегральные уравнения в прикладном моделировании: Тез. докл. II респ. конф. Ч.2. Киев: Ин-т электродинамики АН УССР, 1986, с.23.

Перше рівняння в системі (6) є лінійним відносно $a^{(s)}$, а друге - відносно $b^{(s)}$. Розв'язок системи (6) можна отримати методом послідовних наближень, розв'язуючи рівняння системи (6) почергово як лінійні відносно однієї із функцій $a^{(s)}$ чи $b^{(s)}$ при значеннях другого невідомого з попереднього наближення. Перед першим кроком достатньо задати початкове наближення будь-якої із цих двох функцій. Показано (теорема 1), що такий процес на кожному кроці зменшує значення обмеженого знизу функціоналу (5) і, отже, послідовність значень цього функціоналу збігається.

В другому параграфі розглянуто задачу синтезу антени за заданою амплітудною ДН. Часто на практиці цікавляться лише розподілом випромінюваної антеною енергії по кутових напрямках, тобто модулем $F(\varphi,\vartheta)$ функції $f(\varphi,\vartheta)$. Фазова ДН ($\arg f(\varphi,\vartheta)$) залишається вільною. У цьому випадку потрібно розв'язати рівняння

$$| A I | = F \qquad (7)$$

Ця задача, як і (1), є некоректною. Крім того, вона є нелінійною і може мати кілька розв'язків. (Питання встановлення кількості розв'язків, дослідження їх галужень та ін. виходить за рамки даної роботи). Як і в попередньому параграфі, використовується варіаційна постановка задачі синтезу.

Наближений розв'язок задачі шукатимем у вигляді (4). Шукана поправка $a^{(s)}(x)$ $b^{(s)}(y)$ повинна мінімізувати функціонал

$$\sigma_s = \| F - | A I^{(s)} | \|_f^2 + t \| I^{(s)} \|_I^2, \qquad (8)$$

Його рівняння Ейлера мають вигляд

$$\begin{cases} \langle (A^*A + tE)I^{(s)}, b^{(s)} \rangle_2 = \langle A^*(F \exp[i \arg AI^{(s)}]), b^{(s)} \rangle_2 \\ \langle (A^*A + tE)I^{(s)}, a^{(s)} \rangle_1 = \langle A^*(F \exp[i \arg AI^{(s)}]), a^{(s)} \rangle_1 \end{cases} \tag{9}$$

Система (9) є значно складнішою, ніж система (6), оскільки містить в правій частині фазову діаграму $\exp[i \arg AI^{(s)}]$, яка залежить від невідомих $a^{(s)}$, $b^{(s)}$. Проте, як і в попередньому випадку, ліва частина першого рівняння системи (9) є лінійною відносно $a^{(s)}$, а ліва частина другого - відносно $b^{(s)}$. Систему (9) також можна розв'язати методом послідовних наближень. При цьому, на відміну від системи (6), тепер потрібно задавати значення функцій $a^{(s)}$, $b^{(s)}$ з попереднього наближення також і в правих частинах рівнянь. Такий ітераційний процес збігається в тому ж сенсі, що й для системи (6) (теорема 2).

Слід мати на увазі, що при невдалому виборі початкового наближення для $a^{(s)}$, $b^{(s)}$ ітераційний процес, на відміну від попередньої задачі, може привести до побічного, "тривіального" розв'язку $a^{(s)} \equiv 0$, $b^{(s)} \equiv 0$ системи (9). Щоб цього не відбулось, початкове наближення слід вибирати таким, щоб значення σ_s на ньому було меншим за σ_{s-1}. Цього можна досягти, якщо довільне початкове наближення $a_0^{(s)} b_0^{(s)}$ домножити на коефіцієнт c_s, обчислений за формулою

$$c_s = \Big\{ (F \exp[i \arg AI^{(s-1)}] - AI^{(s-1)}, Aa_0^{(s)} b_0^{(s)})_1 - \\ - t(I^{(s-1)}, a_0^{(s)} b_0^{(s)})_1 \Big\} \Big/ \Big\{ \|Aa_0^{(s)} b_0^{(s)}\|_1^2 + t \|a_0^{(s)} b_0^{(s)}\|_1^2 \Big\} \tag{10}$$

В третьому параграфі формули МУРЗ конкретизовано для задачі

синтезу плоскої прямокутної АГ. Розглядається АГ з лінійно поляризованих випромінювачів, розташованих у вузлах прямокутної сітки, орієнтованої паралельно до осей декартової системи координат. Як відомо, ДН такої АГ має вигляд

$$f(\varphi,\vartheta) = AI = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} I_{nm}\, f_{nm}(\varphi,\vartheta) \cdot \exp[i\, k \sin\vartheta\,(x_n \cos\varphi + y_m \sin\varphi)], \qquad (11)$$

де $I = (I_{nm})_{n=1}^{N}{}_{m=1}^{M}$, I_{nm} – струм на випромінювачі з індексами n, m; $f_{nm}(\varphi,\vartheta)$ – ДН цього випромінювача при одиничному струмі на ньому; k – хвильове число; x_n, y_m – декартові координати nm-го випромінювача.

Розподіл струму шукається у вигляді

$$I^{(s)} = I^{(s-1)} + a^{(s)\tau} b^{(s)} = \sum_{j=1}^{s} a^{(j)\tau} b^{(j)}, \quad s=1,2,\ldots, \qquad (12)$$

де $a^{(s)}=(a_1^{(s)},a_2^{(s)},\ldots,a_N^{(s)})$, $b^{(s)}=(b_1^{(s)},b_2^{(s)},\ldots,b_M^{(s)})$, символ "$\tau$" означає транспонування. Доданки в (12) визначаються послідовно. На s-му кроці шуканим є $a^{(s)\tau} b^{(s)}$. Він повинен надавати мінімум функціоналові

$$\sigma_s = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} |F(\varphi,\vartheta) - f^{(s)}(\varphi,\vartheta)|^2 p(\varphi,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta d\varphi + \frac{t}{NM}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} |I_{nm}^{(s)}|^2, \qquad (13)$$

де $F(\varphi,\vartheta)$ – задана АДН; $f^{(s)}(\varphi,\vartheta) = AI^{(s)} = AI^{(s-1)} + A\, a^{(s)\tau} b^{(s)}$, $s=1,2,\ldots$; $p(\varphi,\vartheta)$, t – вагові функція і множник.

σ_s є функцією змінних комплексних $a_n^{(s)}$ $(n=\overline{1,N})$, $b_m^{(s)}$ $(m=\overline{1,M})$. Знайдем компоненти її градієнта та прирівняємо їх до нуля (необхідна умова мінімуму). Після деяких перетворень отримується система нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{n'=1}^{N} a_{n'}^{(s)} \sum_{m=1}^{M} b_m^{(s)*} \sum_{m'=1}^{M} b_{m'}^{(s)} D_{n\,m}^{n'm'} + \frac{t}{NM}\, a_n^{(s)} \sum_{m=1}^{M} |b_m^{(s)}|^2 = \sum_{m=1}^{M} b_m^{(s)*} \times$$

$$\times \left\{ C_{nm}[F \exp(i \arg f^{(s)}) - f^{(s-1)}] - \frac{t}{NM}\, I^{(s-1)} \right\}, \quad n=1,\ldots,N, \tag{14а}$$

$$\sum_{m'=1}^{M} b_{m'}^{(s)} \sum_{n=1}^{N} a_n^{(s)*} \sum_{n'=1}^{N} a_{n'}^{(s)} D_{n\,m}^{n'm'} + \frac{t}{NM}\, b_m^{(s)} \sum_{n=1}^{N} |a_n^{(s)}|^2 = \sum_{n=1}^{N} a_n^{(s)*} \times$$

$$\times \left\{ C_{nm}[F \exp(i \arg f^{(s)}) - f^{(s-1)}] - \frac{t}{NM}\, I^{(s-1)} \right\}, \quad m=1,\ldots,M, \tag{14б}$$

де символ "*" означає комплексне спряження,

$$C_{nm}[\Phi] = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \Phi(\varphi,\vartheta)\, f_{nm}^*(\varphi,\vartheta)\, p(\varphi,\vartheta) \times$$

$$\times \exp[-i\, k \sin\vartheta\, (x_n \cos\varphi + y_m \sin\varphi)] \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi, \tag{15}$$

$$D_{n\,m}^{n'm'} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} f_{n',m'}(\varphi,\vartheta) f_{nm}^*(\varphi,\vartheta)\, p(\varphi,\vartheta) \times \tag{16}$$

$$\times \exp[i\, k \sin\vartheta\, ((x_{n'}-x_n)\cos\varphi + (y_{m'}-y_m)\sin\varphi)] \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

Система (14) є дискретним аналогом системи (9) і розв'язується описаним раніше методом послідовних наближень. Коефіцієнт c_s для початкового наближення обчислюється за формулою

$$c_s=\Bigg\{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}[F(\varphi,\vartheta)\exp(i\arg f^{(s-1)}(\varphi,\vartheta))-f^{(s-1)}(\varphi,\vartheta)]\times \tag{17}$$

$$\times g^{(s)*}(\varphi,\vartheta)p(\varphi,\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi-\frac{t}{NM}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}I_{nm}^{(s-1)}v_{nm}^{(s)*}\Bigg\}\Bigg/$$

$$\Bigg/\Bigg\{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}|g^{(s)}(\varphi,\vartheta)|^2p(\varphi,\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi+\frac{t}{NM}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}|v_{nm}^{(s)}|^2\Bigg\}\,,$$

де $v^{(s)}=a_0^{(s)T}b_0^{(s)}$, $g^{(s)}(\varphi,\vartheta)=A\,v^{(s)}$.

При розв'язуванні задачі синтезу плоскої АГ за заданою повною ДН $f(\varphi,\vartheta)$ мінімізується функціонал типу (13), в якому діаграма $F(\varphi,\vartheta)$ замінена на $f(\varphi,\vartheta)$, а синтезована ДН $f^{(s)}(\varphi,\vartheta)$ входить повністю (і модуль, і фаза). Задача мінімізації зводиться до задачі розв'язування системи типу (14) зі зміненою правою частиною: замість функції $F\exp[i\arg f^{(s)}]$ в інтегралі $C_{nm}[\Phi]$ входить функція f. Така система є дискретним аналогом системи (6).

В цьому параграфі показано також, що дискретний аналог рівняння (3) записується у вигляді

$$\sum_{m'=1}^{M}\sum_{n'=1}^{N}I_{n'm'}^{(s)}D_{n\,m}^{n'm'}+\frac{t}{NM}I_{nm}^{(s)}=C_{nm}[f\,],\quad n=\overline{1,N},\ m=\overline{1,M} \tag{18}$$

В четвертому параграфі розглянуто деякі аспекти обґрунтування МУРЗ. Зокрема показано, що у випадку синтезу АГ розподіл струму,

на якому досягається мінімум вихідного функціоналу, можна обчислити за скінчене число кроків, дещо модифікувавши описану раніше обчислювальну схему наступним чином.

Очевидно, що перші два доданки в (12) лінійно незалежні, і спосіб їх обчислення залишається без змін. При знаходженні наступних доданків розподіл струму представимо у вигляді

$$I^{(s)} = \sum_{j=1}^{s-1} c_j^{(s)} a^{(j)\tau} b^{(j)} + a^{(s)\tau} b^{(s)}, \quad s=3,4,\ldots, \qquad (19)$$

Невідомі вектори $a^{(s)}, b^{(s)}$ та коефіцієнти $c_j^{(s)}, j=1,\ldots,s-1$ визначаються з умови мінімуму того ж функціоналу σ_s.

Таким чином кожен новий обчислений доданок буде лінійно незалежним із усіма попередніми. На останньому $(N\times M)$-у кроці розв'язок буде обчислюватись у вигляді розкладу з вільними коефіцієнтами по отриманій базі $(N\times M)$-вимірного матричного простору, що гарантує завершення обчислювального процесу на цьому етапі. Знайдений розв'язок буде принаймі стаціонарною точкою функціоналу (13). При відповідному виборі початкових наближень на проміжних кроках він буде забезпечувати мінімум цьому функціоналу.

Описана обчислювальна схема служить лише для доведення збіжності методу, Як показують числові експерименти, для досягнення практичних цілей достатньо, як правило, знайти 2-3 доданки. Причому перші два кроки в обох схемах співпадають.

Друга глава присвячена чисельній реалізації МУРЗ для синтезу плоских прямокутних АГ. З метою дослідження реальних властивостей методу було розв'язано ряд конкретних задач з різними наборами вхідних даних. В главі наведено деякі із отриманих результатів.

В перших двох параграфах розглядаються плоскі прямокутні АГ,

побудовані з ідентичних випромінювачів, ДН яких $f_{nm}(\varphi,\theta)\equiv 1$, $n=\overline{1,N}$, $m=\overline{1,M}$. Вагова функція вибрана найпростішою: $p(\varphi,\theta)\equiv 1$.

Значних затрат машинного часу вимагає обчислення з достатньою точністю серії $N^2\times M^2$ інтегралів типу (16), які є елементами матриці оператора A^*A. В першому параграфі показано, що для розглядуваних АГ значення $D_{n\,m}^{n'm'}$ можна отримати аналітично. Формула (16) приймає вигляд:

$$D_{n\,m}^{n'm'}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\exp[i\,k\,\sin\theta\,((x_{n'}-x_n)\cos\varphi+(y_{m'}-y_m)\sin\varphi)]\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \qquad (20)$$

Позначимо $\rho_{n\,m}^{n'm'}=\sqrt{(x_n-x_{n'})^2+(y_m-y_{m'})^2}$. Далі, користуючись періодичністю підінтегральної функції та інтегральним представленням циліндричних функцій Бесселя, можна отримати

$$D_{n\,m}^{n'm'}=2\pi\,\frac{\sin(k\,\rho_{n\,m}^{n'm'})}{k\,\rho_{n\,m}^{n'm'}},\quad \rho_{n\,m}^{n'm'}>0;\quad D_{n\,m}^{n'm'}=2\pi,\ \rho_{n\,m}^{n'm'}=0. \qquad (21)$$

У другому параграфі обговорюються числові результати. Методом УРЗ було розв'язано ряд модельних задач синтезу АГ з різної кількості елементів (від 3×3 до 7×7) за заданою повною ДН. Одночасно для кожної з цих задач шуканий розподіл струму було знайдено як розв'язок рівняння (18). Порівняння розв'язків, отриманих двома різними способами, показує, що достатньо врахувати три-чотири доданки в розкладі (12) матриці розподілу струму, щоб обидва розв'язки співпадали в межах обчислювальної точності ЕОМ.

Розглядались також задачі синтезу за заданою амплітудною ДН. Синтезовано АГ різних розмірів: від 5×5 до 51×51 елементів. Задані АДН були симетричними та несиметричними. Для кожної задачі приведені знайдений розподіл струму та графіки заданих і синтезованих

АДН.

В наступних двох параграфах розглядаються АГ, побудовані з вузьконапрямлених випромінювачів. З їх допомогою формуються так звані контурні ДН - діаграми близькі до одиниці всередині деякого контура складної форми на нескінченно віддаленій сфері і швидко спадаючі до нуля поза цим контуром. Щоб рівномірно освітити простір всередині контура заданої АДН, кожен з випромінювачів освітлює "свій" сектор. Ті випромінювачі, сектори яких виходять за межі контура, в АГ не включаються. Напрямок максимального випромінювання елемента АГ з індексами (n,m) задано кутами $\varphi_{nm}, \vartheta_{nm}$ в сферичній системі координат:

$$\sin \vartheta_{nm} = d_{nm}, \quad \cos \varphi_{nm} = s_n/d_{nm}, \quad \sin \varphi_{nm} = s_m/d_{nm}, \tag{22}$$

де $d_{nm}=\sqrt{s_n^2 + s_m^2}$, $s_n = \sin [(n-n_c)\pi/21]$, $s_m = \sin [(m-m_c)\pi/21]$,

$n=1,\ldots,N$, $m=1,\ldots,M$, (n_c,m_c) - індекси випромінювача, напрямленого в полюс системи координат. ДН кожного випромінювача в локальній сферичній системі координат, полюс якої лежить на його напрямку максимального випромінювання, рівна $f_{nm}(\varphi,\vartheta)=\cos^2 7\vartheta$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/14$; $f_{nm}(\varphi,\vartheta)=0$ при інших значеннях ϑ.

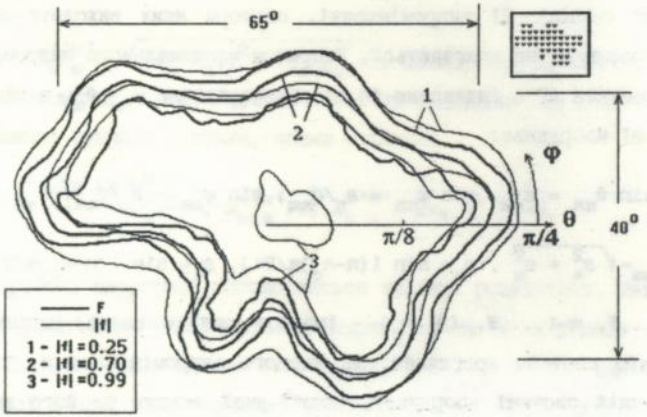
При обчисленні матриці оператора A^*A використовується той факт, що для розглядуваних АГ має місце

$$D_{n\ m}^{n'm'} = 0 \text{ при } |n-n'|>2 \text{ або } |m-m'|>2 \tag{23}$$

В наведених задачах контури заданих ДН описуються, в простішому випадку, аналітично (з допомогою спеціально підібраних функцій), або, в складнішому випадку, з допомогою кубічних сплайнів, побудованих за заданою таблицею значень.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

В однiй iз задач синтезовано АГ з 11×8 елементiв, котра створює ДН, контур якої наближено повторює форму кордонiв України. На малюнку показанi три лiнiї рiвня заданої АДН $F(\varphi,\theta)$ та модуля синтезованої ДН $f^{(5)}(\varphi,\theta)$. Максимальне значення $F(\varphi,\theta)$ рiвне одиницi. В правому верхньому кутi малюнку схематично зображена синтезована АГ.



За отриманими чисельними результатами можна зробити висновок про достатньо високу ефективнiсть МУРЗ. Щоб досягти точностi порядку 0.1-1% вiд $\|F\|_I$ у всiх розглянутих задачах було достатньо врахувати 2-3 доданки в розкладi матрицi розподiлу струму. Для обчислення одного такого доданку, як правило, потрiбно було зробити не бiльше 15-20 iтерацiй методу послiдовних наближень. Навiть при синтезi АГ з великим числом випромiнювачiв МУРЗ дозволяє отримувати стiйкi розв'язки.

В третiй главi розглядається ще один поширений тип плоских

антенних граток - гексагональні (трикутні) АГ з границею у вигляді правильного шестикутника. Показано, як потрібно модифікувати МУРЗ у випадку застосування його до задач синтезу гексагональних АГ, приведені числові результати розв'язання кількох задач.

Кожному з випромінювачів гексагональної АГ присвоїмо пару індексів (n,m) таким чином, щоб їх декартові координати задавались формулами

$$x_n = (n - n_0)\, d + (m - m_0)\, d/2 = [(n - n_0)+(m - m_0)/2]\, d$$
$$y_m = \sqrt{3}/2\ (m - m_0)\, d \qquad (24)$$

де (n_0,m_0) - індекси центрального випромінювача гратки $(m_0=n_0)$, розташованого в початку системи координат, d - відстань між двома сусідніми елементами гратки (у всіх задачах цієї глави прийнято $d=\lambda/2$, де λ - довжина хвилі).

Як і раніше, $f_{nm}(\varphi,\vartheta)$ - ДН випромінювача з індексами (n,m). Введемо позначення

$$\tilde{f}_{nm}(\varphi,\vartheta) = \begin{cases} f_{nm}(\varphi,\vartheta), & |(n+m)/(N+1)-1|<1/2, \\ 0, & \text{в протилежному випадку} \end{cases} \qquad (25)$$

Тоді формулу для обчислення ДН гексагональної АГ можна записати у вигляді

$$f(\varphi,\vartheta) = AI = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} I_{nm}\, \tilde{f}_{nm}(\varphi,\vartheta) \times \qquad (26)$$
$$\times \exp[i\, k \sin\vartheta\, (x_n \cos\varphi + y_m \sin\varphi)],$$

Як і раніше, шукатимем розподіл струму $I = (I_{nm})$ у вигляді (12), який мінімізує функціонал (13). З допомогою таких же, як в главі 1, перетворень задача мінімізації функціоналу зводиться до

задачі розв'язування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь виду (14), у якої $N=M$, $C_{nm}[\Phi]$, $D_{n\,m}^{n'm'}$ замінено відповідно на $\tilde{C}_{nm}[\Phi]$, $\tilde{D}_{n\,m}^{n'm'}$, де

$$\tilde{C}_{nm}[\Phi] = \begin{cases} C_{nm}[\Phi], & |(n+m)/(N+1)-1|<1/2, \\ 0, & \text{в протилежному випадку} \end{cases} \tag{27}$$

$$\tilde{D}_{n\,m}^{n'm'} = \begin{cases} D_{n\,m}^{n'm'}, & |(n+m)/(N+1)-1|<1/2, |(n'+m')/(N+1)-1|<1/2, \\ 0, & \text{в протилежному випадку} \end{cases} \tag{28}$$

Як і для прямокутних АГ, для гексагональних граток значення елементів матриці оператора A^*A отримуються аналітично. Для цього можна скористатись формулою (21), замінивши спосіб обчислення $\varkappa_{n\,m}^{n'm'}$ на $\varkappa_{n\,m}^{n'm'}=\sqrt{(n'-n)^2+(n'-n)(m'-m)+(m'-m)^2}$.

В другому параграфі приведено результати розв'язання задач синтезу АГ при N = 7, 15 і при різних заданих АДН. Аналіз отриманих результатів показує, що висновки про ефективність МУРЗ, зроблені в попередній главі, справедливі і в цьому випадку.

Четверта глава присвячена циліндричним антенним граткам (ЦАГ). Модифіковано МУРЗ для синтезу ЦАГ, обговорюється спосіб обчислення матриці оператора A^*A. Наведені числові результати розв'язання ряду конкретних задач.

ЦАГ являє собою систему випромінювачів, розташованих на циліндричній поверхні. Антена складається з N лінійних граток по M випромінювачів в кожній. Лінійні гратки (лінійки) розміщені вздовж твірної циліндра, m-і випромінювачі кожної з лінійок лежать в одній площині і утворюють кільцеву гратку. Нехай випромінювачі ЦАГ лінійно поляризовані (збуджуються магнітним струмом, паралельним

до осі OZ), тоді ІІ діаграма напрямленості має вигляд

$$f(\varphi,\vartheta) = AI = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} I_{nm}\, f_{nm}(\varphi,\vartheta) \times \qquad (29)$$
$$\times \exp[i\,k\,(r\,\sin\vartheta\,\cos(\varphi-\varphi_n) + z_m\cos\vartheta)],$$

де φ_n, z_m – координати nm-го випромінювача в циліндричній системі координат; kr – електричний радіус циліндра; всі інші позначення такі ж, як раніше. Формула (29) відрізняється від (11) лише виглядом експоненти. Очевидно, що всі формули МУРЗ, отримані в гл. 1 та 3 легко можуть бути перенесені на випадок ЦАГ.

Виконавши перетворення аналогічно до гл.1, легко отримати систему $N+M$ нелінійних алгебраїчних рівнянь вигляду (14а),(14б) для визначення невідомих $a_n^{(s)}(n=\overline{1,N})$, $b_m^{(s)}(m=\overline{1,M})$. Вона відрізнятиметься лише способом обчислення величин $C_{nm}[\Phi]$ та $D_{n\,m}^{n'm'}$:

$$C_{nm}[\Phi] = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \Phi(\varphi,\vartheta)\, f_{nm}^{*}(\varphi,\vartheta)\, p(\varphi,\vartheta) \times \qquad (30)$$
$$\times \exp[-i\,k\,(r\,\sin\vartheta\,\cos(\varphi-\varphi_n) + z_m\cos\vartheta)]\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi,$$

$$D_{n\,m}^{n'm'} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f_{n',m'}(\varphi,\vartheta)\, f_{nm}^{*}(\varphi,\vartheta)\, p(\varphi,\vartheta) \times \qquad (31)$$
$$\times \exp[ik(r\,\sin\vartheta(\cos(\varphi-\varphi_{n'})-\cos(\varphi-\varphi_n))+(z_{m'}-z_m)\cos\vartheta)]\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi.$$

У всьому іншому алгоритм залишається без змін. Відповідно, доведення збіжності МУРЗ, запропоноване для плоских АГ, справедливе і для ЦАГ.

В розглянутих задачах АГ були побудовані із однакових випро-

мінювачів з діаграмами напрямленості вигляду

$$f_{nm}(\varphi,\vartheta) = \begin{cases} \sin^2\vartheta \cos^2(\varphi - \varphi_n), & |\varphi - \varphi_n| < \pi/2, \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad n=\overline{1,N},\ m=\overline{1,M}, \quad (32)$$

де $\varphi_n = (n-n_0)\ \pi/kr$, (n_0,m_0) – індекси центрального випромінювача АГ. Показано, що в цьому випадку елементи матриці A^*A є дійсними і їх можна представити у вигляді збіжних знакозмінних рядів, загальні члени яких обчислюються за рекурентними формулами.

Наведено чисельні результати синтезу кількох ЦАГ із 7×7 (та 9×9) елементів, з електричним радіусом циліндра kr = 11.25 (та 15). Крок між випромінювачами гратки рівен 16° (12°) по кутовій координаті і $\lambda/2$ – по вертикальній.

Задані АДН були одно-, дво- та чотирипелюсткові з пелюстками вигляду

$$F_{\varphi_0\vartheta_0}(\varphi,\vartheta) = \begin{cases} \cos^2 4\, g_{\varphi_0\vartheta_0}(\varphi,\vartheta), & g_{\varphi_0\vartheta_0}(\varphi,\vartheta) < \pi/8, \\ 0, & \text{в іншому випадку,} \end{cases} \quad (33)$$

де $g_{\varphi_0\vartheta_0}(\varphi,\vartheta) = \arccos(\cos(\varphi - \varphi_0)\sin(\vartheta - \vartheta_0))$, кути φ_0,ϑ_0 задають напрямок пелюстків діаграми.

Отримані результати по точності та ефективності узгоджуються з отриманими раніше.

У висновках сформульовані основні результати, отримані в дисертаційній роботі:

1. Метод узагальненого розділення змінних реалізований для задач синтезу плоских прямокутних, плоских гексагональних і циліндричних антенних граток за заданою повною та амплітудною діаграмою напрямленості. На прикладах цих задач показана ефективність методу. Встановлено, що для досягнення задовільної для практики точності

достатньо зробити в цьому методі 2-3 кроки.

2. Доведена можливість отримання розв'язку задачі синтезу антенної гратки методом узагальненого розділення змінних за скінчене число кроків.

3. Для трьох типів розглянутих антенних граток розроблені комплекси програм, які можуть бути використані в САПР випромінюючих систем, які містять такі антени. Проведена апробація цих комплексів як на модельних задачах, так і на задачах, що виникають на практиці.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах

1. *Yu.G.Balyash, N.N.Voitovich, S.A.Yaroshko* Generalized Separation of Variables in Problems of Diffraction and Antenna Synthesis // The 1989 URSI International symposium on electromagnetic theory, Stockholm, 1989, pp. 650-652.

2. *Войтович Н.Н., Ярошко С.А.* Метод обобщенного разделения переменных в задачах синтеза плоских двумерных антенных решеток. // Волны и дифракция - 90. X Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн, Винница / М.: Физическое общество СССР, 1990, т.3, с. 260-263.

3. *Н.Н.Войтович, С.А.Ярошко.* Численное решение задачи синтеза двумерной антенной решетки. // Радиотехника и электроника. 1991, т.36, № 1, с.192-196.

4. *J.Jarkowski, N.Voitovich, S.Yaroshko.* Specific Examples of Antenna Design Using the Synthesis Method. // Kleinheubacher Berichte. Band 36. pp.73-77. Kleinheubach, 1992.

5. *Войтович Н.Н., Ярошко С.А.* Синтез двумерных антенных решеток методом обобщенного разделения переменных. // Тез. докл. Международного симпозиума "Метод дискретных особенностей в задачах математической физики", Харьков, 1993.

6. *Войтович Н.Н., Ярошко С.А.* Метод обобщенного разделения переменных в задачах синтеза антенных решеток. // Препринт № 1-94, Львов: ИППММ АН Украины, 1994, 22 с.

458599

Ав 30.844

Підписано до друку 21.09.94. Формат 60x84/16
Папір друк. № 1. Офсет. друк. Ум. друк. арк. 1
Ум. ф.-відб. 1. Обл.-др. арк. 0,93
Тираж 100 пр. Зам. 767-4. Безплатно

Львівська книжкова фабрика "Атлас"
290005, Львів, вул. Зелена, 20