

**НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ**

На правах рукописи

ЧЕРЕПЕННИКОВ Валерий Борисович

**МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ
ПАРАМЕТРОВ В ТЕОРИИ
ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ**

01.01.02 — дифференциальные уравнения

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Киев — 1994

ЛНБ України ім. В. Стефаника



00777690 (-)

Диссертация есть рукопись.

Работа выполнена в Иркутском вычислительном центре СО РАН

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор АЗБЕЛЕВ Н.В.,
доктор физико-математических наук,
профессор ШКИЛЬ Н.И.,
доктор физико-математических наук,
профессор ПЕЛИХ Г.П.

Ведущая организация - Санкт-Петербургский государственный университет.

Защита состоится "18" октября 1994 г. в "15" часов на заседании Специализированного совета Д 016.50.02 при Институте математики АН Украины по адресу: 252601 Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан "7" сентября 1994 года.

Ученый секретарь Специализированного совета
доктор физико-математических наук

ЛУЧКА А.В.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В начальный период развития теории дифференциальных уравнений одна из основных задач состояла в разработке аналитических методов интегрирования дифференциальных уравнений в замкнутой форме, когда для описания решения требовалось вывести аналитическую формулу, предполагающую действие конечного числа известных операций над элементарными функциями. Важность асимптотических методов в теории дифференциальных уравнений была ясно осознана математиками во второй половине XIX века после того, как французский математик Ж.Лиувиль доказал, что в замкнутой форме дифференциальные уравнения интегрируются лишь в редких случаях. Число физических задач, при решении которых такие методы используются или могут быть использованы, весьма велико и непрерывно возрастает. Сюда относятся многие вопросы механики, теории течения вязкой жидкости, упругости, теории электромагнетизма и других областей физики.

Крупные достижения в развитии теории асимптотических методов связаны с именами Л.Эйлера, Ж.Лагранжа, Ж.Лиувилля, Я.Бернулли, А.Пуанкаре, Р.Беллмана, Н.М.Крылова, Н.Н.Боголюбова, Д.А.Митропольского, И.Э.Штокало, А.М.Самойленко, В.И.Зубова, А.А.Мартынюка, А.Н.Филетова, А.Н.Панченкова и многих других зарубежных и отечественных математиков.

Один из таких методов, берущих свое начало с работ А.Пуанкаре, состоит в замене независимой переменной некоторым функциональным параметром, и решение исследуемой задачи ищется в виде ряда по степеням этого параметра. Разрабатывая данный метод, А.Пуанкаре отмечал [Дис.79]: "Ничто не доказывает, что решение, дан-

ное мною, — самое удачное; как раз весьма мало вероятно, что одно и то же решение этой задачи одинаково целесообразно во всех частных случаях. Поэтому для всякого уравнения, которое нужно будет интегрировать, следует искать решение, аналогичное тому, которое дано мною, но вообще не совпадающее с ним, стремясь всегда выбрать это решение, учитывая специальные особенности данной задачи." Таким образом, задача построения решений дифференциальных уравнений в виде рядов по степеням различных функциональных параметров с целью нахождения оптимального в некотором смысле функционального параметра является актуальной. В настоящей работе критерием оптимальности служит скорость сходимости ряда, показателем которой служит число N членов ряда, сумма которых на заданном отрезке изменения функционального параметра обеспечивает требуемую точность приближенного решения.

В диссертации рассматриваются линейные системы дифференциальных уравнений различной структуры: с аналитическими или кусочно-аналитическими коэффициентами, а также некоторые линейные системы функционально-дифференциальных уравнений. Применение метода функциональных параметров к линейным системам функционально-дифференциальных уравнений потребовало исследования вопросов разрешимости задачи Коши для таких уравнений в классе аналитических функций. Эти вопросы представляют самостоятельный интерес в качественной теории функционально-дифференциальных уравнений и, поскольку линейные системы функционально-дифференциальных уравнений имеют большое теоретическое и прикладное значение, нахождение условий существования аналитических решений представляет собой актуальную задачу.

Цель работы. Применительно к линейным системам обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими или кусочно-аналити-

ческими коэффициентами на основе асимптотического метода функциональных параметров исследовать вопросы представления решений задачи Коши в пространстве функциональных параметров.

Для некоторых линейных систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов с аналитической структурой запаздывания установить условия разрешимости начальной задачи в классе аналитических функций в окрестности как обыкновенной, так и регулярной особой точки и указать способы получения решений таких задач в пространстве функциональных параметров.

Разработать метод оценки точности приближенных решений, возникающих при обрыве рядов по степеням функциональных параметров, которыми представляются решения указанных выше систем дифференциальных уравнений.

Научная новизна. Для линейных систем дифференциальных уравнений с аналитическими или кусочно-аналитическими коэффициентами, а также для некоторых линейных систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов с аналитической структурой запаздывания обоснован и разработан асимптотический метод функциональных параметров. При этом, для рассмотренных линейных систем функционально-дифференциальных уравнений исследованы вопросы разрешимости задачи Коши в классе аналитических функций как в окрестности обыкновенной, так и регулярной особой точек.

Применительно к задаче Коши для указанных выше линейных систем дифференциальных уравнений разработан метод оценки точности приближенных решений, возникающих при обрыве рядов по степеням функциональных параметров, представляющих собой решения исследуемых задач. Оценки получены для широкого класса функцио-

нальных параметров, обобщающего ряд ранее известных функциональных параметров.

Достоверность приведенных научных результатов достигается за счет использования стандартных математических методов и рассуждений при изучении поставленных задач.

Теоретическая и практическая ценность. Проведенные исследования позволили распространить метод функциональных параметров на указанные выше системы дифференциальных уравнений. На этом пути для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений получены новые результаты о разрешимости задачи Коши в классе аналитических функций. В совокупности с разработанным методом оценки точности приближенных решений полученные в работе результаты позволяют использовать асимптотический метод функциональных параметров для решения конкретных прикладных задач, математические модели которых описываются упомянутыми выше линейными системами дифференциальных уравнений.

Основные результаты диссертации используются в ИрВЦ СО РАН при выполнении плановых тем (N 01.9.10 010132, N 01.9.10 013193) и могут быть использованы научными и отраслевыми организациями, а также при чтении специальных курсов по теории дифференциальных уравнений и прикладной математике.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались и обсуждались на Иркутском городском семинаре по асимптотическим методам (1970-1992), на математическом семинаре Ленинградского государственного педагогического института и математических конференциях Герценовские чтения ЛПИ (1980-1988), на республиканском семинаре по дифференциальным и интегральным уравнениям КГУ (Киев, 1987), на Пермском городском семинаре по функционально-дифференциальным уравнениям (1989-1992, 1994), на семинарах по

дифференциальным уравнениям (1990) и прикладной математике (1991) МГУ, на семинаре по дифференциальным уравнениям Института математики АН Украины (Киев, 1994), на Уральских региональных конференциях "Функционально-дифференциальные уравнения" (Уфа, 1986; Челябинск, 1987; Пермь, 1988), на XXIV Воронежской зимней математической школе (1991), на II Всесоюзной конференции "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике" (Киев 1985), на IV Всесоюзной конференции по качественной теории дифференциальных уравнений (Иркутск, 1986), на Всесоюзной конференции "Новые подходы к решению дифференциальных уравнений" (Дрогобыч, 1987), на Всесоюзной конференции "Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики" (Новосибирск, 1987), на XI Международной конференции по нелинейным колебаниям (Венгрия, 1987), на Международной научной школе "Метод функций Ляпунова и его приложения" (Иркутск, 1989), на I-III Международных коллоквиумах по дифференциальным уравнениям (Болгария, 1990-1992), на I Международном коллоквиуме по численным методам (Болгария, 1992).

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 35 работ. Основные результаты изложены в двух монографиях [1,6] и работах [2-5,7-22].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, выводов и списка литературы. Изложена на 301 страницах машинописного текста. Список литературы включает 184 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении дается краткий обзор асимптотических методов, основанных на представлении решений дифференциальных уравнений в виде степенных рядов. Обосновывается актуальность темы,

формулируется цель работы. Здесь же приводятся основные сведения по предельной корректности, основные определения и обозначения и краткий обзор полученных результатов.

Первая глава посвящена вопросам решения задачи Коши для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими или кусочно-аналитическими правыми частями на основе асимптотического метода функциональных параметров (МФП).

В §1.1 доказывается теорема о существовании в пространстве функциональных параметров корректного в предельном смысле относительно начального значения функционального параметра решения задачи Коши для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами.

Пусть в пространстве физического времени J задана следующая задача Коши:

$$d\bar{x}(t)/dt = \bar{\lambda}(t)\bar{x}(t) + \bar{P}(t), \quad t \in J, \quad J = [0, T], \quad \bar{x}(0) = x_0, \quad (1)$$

где $\bar{x}(t), \bar{P}(t): J \rightarrow R^1$, $\bar{\lambda}(t): J \rightarrow R^{1 \times 1}$, $x_0 \in R^1$.

Рассмотрим метод МФП как аппарат для решения искомой задачи Коши. При переходе в пространство функционального параметра J_τ и нахождения в J_τ корректного в предельном смысле решения в виде ряда по функциональному параметру неизбежно встает вопрос о существовании единственного решения рассматриваемой задачи. В связи с этим доказана следующая

Теорема 1.1. Пусть $\bar{\lambda}(t)$ и $\bar{P}(t)$ — аналитические на J функции

и

$$\bar{\lambda}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\lambda}_n t^n, \quad \bar{\lambda}_n \in R^{1 \times 1}, \quad \bar{P}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{P}_n t^n, \quad \bar{P}_n \in R^1.$$

Тогда, если τ — функциональный параметр, такой, что

$$t = \Pi \tau, \quad t(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \tau^n, \quad \tau \in J_{\tau} = (0, \tau_T].$$

Π - гооморфный аналитический на J_{τ} оператор и

$$\tau = \Pi^{-1} t, \quad \tau = \begin{cases} 0 & \text{при } t=0, \\ \tau_T & \text{при } t=T. \end{cases}$$

то задача Коши (1) корректна в предельном смысле относительно $t=0$ - и полугрупповой шкалы сращения $(t^{\alpha})_{\alpha=0}^{\infty}$ и, следовательно, имеет единственное решение в виде ряда

$$x(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \tau^n, \quad x_n \in R^1 \quad (x(\tau) = \Pi^{-1} \bar{x}(t)), \quad (2)$$

равномерно сходящегося на J_{τ} .

Результат теоремы 1.1 распространяется на класс функциональных параметров с дробно-рациональной производной. Показано, что в этот класс входят ранее известные и широко применяемые в прикладных задачах функциональные параметры. Например, $\tau_1 = qt$ - линейное преобразование переменной, $\tau_2 = 1 - \exp(-qt)$ - "малое время" [Дис. 51, 68, 34, 102, 1], $\tau_3 = qt / (1 + qt)$ [Дис. 11], $\tau_4 = (e^{qt} - 1) / (e^{qt} + 1)$ [Дис. 79], $\tau_5 = (\sqrt{1 + qt} - 1) / (\sqrt{1 + qt} + 1)$ [Дис. 30]. Здесь $q > 0 = \text{const}$, - параметр отображения, играющий важную роль в методе функциональных параметров. Его основное назначение - регулировать (улучшать) качество асимптотических разложений в конкретных задачах.

Для нахождения решения рассматриваемой задачи Коши в пространстве функционального параметра в виде ряда по степеням функционального параметра используется метод неопределенных коэффициентов, позволяющий получить рекуррентные формулы для неизвестных коэффициентов ряда. С другой стороны, проведенные исследования позволили получить формулу, выражающую зависимость произ-

вольного коэффициента ряда от начального условия. Так, для рекуррентной формулы $x_n = \sum_{t=1}^n A_n^t x_{n-t} + g_{n-1}$, $\forall n \geq 1$, где матрицы A_n^t и векторы g_n определяются правой частью задачи (1), справедлива

Теорема 1.2. Пусть задана последовательность векторов $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, порождаемая указанным соотношением. Тогда общий член последовательности определяется формулой

$$x_n = H_n x_0 + \sum_{p=0}^{n-1} H_{n-p-1} g_p, \quad H_n = \sum_{\sigma} \prod_{j=1}^n A_{n-j+1}^{\sigma} \quad (*)$$

Здесь $\sum_{h=1}^0 = 0$, $\sum_0 = 1$, а знак \sum_{σ} распространяется на все решения в целых неотрицательных числах уравнения

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_t = \sigma, \quad (**)$$

причем если некоторые из $\alpha_n = 0$, то это уравнение теряет столько слагаемых, сколько равных нулю α_n , т.е. уменьшается число t в (*) и (**).

В §1.2 рассматривается задача Коши для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-аналитическими правыми частями. Решение этой задачи потребовало введения класса псевдодифференцируемых функций. Пусть на сегменте $J = [t_0, t_n]$ задана скалярная функция $f(t)$ в виде

$$f(t) = \begin{cases} f^1(t), & t \in J_1, \\ f^2(t), & t \in J_2, \\ \dots & \dots \\ f^k(t), & t \in J_k, \end{cases} \quad \begin{matrix} \bigcup_{t=1}^n J_t = J; J_t \cap J_{t+1} = \emptyset, & t = \overline{1, k-1}, \\ J_k = [t_{k-1}, t_k], & k = \overline{1, k-1}; J_n = [t_{n-1}, t_n]. \end{matrix} \quad (3)$$

Будем считать, что функции $f^k(t)$, $t \in \overline{1, k}$, аналитические на соответствующих множествах, т.е.

$$f^i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t-t_0)^n, \quad t \in J_t^* = \bigcup_{j=1}^i J_j. \quad (4)$$

Введем ступенчатую функцию Хевисайда соотношениями

$$\eta_0 = 1, \quad \eta_t = \begin{cases} 0, & t \in J_t^*, \\ 1, & t \in J \setminus J_t^*, \end{cases}; \quad t = \overline{1, s-1}.$$

Заддим на множестве J некоторую функцию $\varphi(t)$.

Определение 1.1. Функцию $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n t^n$, аналитическую на J , будем называть сумматором функции $f(t)$.

Построим функцию $\mathcal{F}(t)$ следующим образом:

$$\mathcal{F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(t-t_0)^n, \quad (5)$$

$$\mathcal{F}_n = \varphi_n + \sum_{i=0}^{s-1} \eta_i \Delta_n^{i+1}; \quad \Delta_n^1 = f_n^1 - \varphi_n; \quad \Delta_n^k = f_n^k - f_n^{k-1}, \quad k = \overline{2, s}.$$

Обозначим через $J' \subset J$ дискретное множество точек, в которых функция $\mathcal{F}(t)$ меняет свои значения скачкообразно или некоторые ее производные терпят разрывы первого рода и $J^0 = J \setminus J'$. Из (5) вытекает, что для любого $t \in J_t^*$ $\mathcal{F}_n = f_n^i$ и $\mathcal{F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(t-t_0)^n = f^i(t)$. Кроме того, функция $\mathcal{F}(t)$ непрерывно дифференцируема на множестве J^0 , а на J' $\mathcal{F}(t)$ имеет определенную одностороннюю производную.

Определение 1.2. Функцию $\mathcal{F}(t)$ с указанными выше свойствами будем называть псевдодифференцируемой на множестве J и обозначать $\mathcal{F}(t) \in \mathcal{D}^1(J)$, а ряд, ее представляющий — псевдорядом.

Проводя аналогичные рассуждения для второй, третьей и т.д. производных, приходим к выводу, что определенная формулой (5) функция $\mathcal{F}(t) \in \mathcal{D}^{\infty}(J)$.

Рассмотрим, например, функцию $f(t)$, заданную в виде

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \leq t < t+1, \\ 0, & t+1 \leq t < t+2, \quad t=0, 2, 4, \dots \end{cases}$$

Тогда

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0 = \sum_{h=0}^{]s[} \eta_h (-1)^h, \quad t \in [0, s],$$

здесь $\varphi(t) \equiv 0$, а $]s[$ — целая часть s .

Представление кусочно-аналитических функций в виде (5) позволяет оперировать с псевдорядами как с классическими рядами и рассматривать их как решения задачи Коши с кусочно-аналитическими коэффициентами. Основной результат данного параграфа сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1.3. Пусть для задачи Коши (1) выполняются условия:

A1. Элементы матрицы $A(t)$ и вектора $B(t)$ удовлетворяют соотношениям (3);

A2. В силу теоремы 1.1 существует обратный аналитический оператор Π^{-1} , отображающий $A(t)$ и $B(t)$ в пространство J_τ ;

A3. Согласно определению 1.1 выбрана аналитическая на J функция $\varphi(t)$ — сумматор функции $x(t)$, и $\tilde{\varphi}(\tau) = \Pi^{-1}\varphi(t)$,

$$\tilde{\varphi}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varphi}_n \tau^n, \quad \tau \in J_\tau.$$

Тогда в пространстве функционального параметра задача Коши (1) корректна в предельном смысле относительно $\tau=0$ и полугрупповой шкалы сравнения $\{\tau^\alpha\}_{\alpha=0}^{\infty}$ и имеет в классе функций $\tilde{C}^{\infty}(J_\tau)$ единственное решение в виде псевдоряда

$$\tilde{x}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{x}_n \tau^n, \quad \tau \in J_\tau, \quad \tilde{x}_n = \tilde{\varphi}_n + \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{x}_n^{i+1} \tilde{\eta}_i,$$

$$\tilde{x}_n^{i+1} = \tilde{x}_n^i - \tilde{\varphi}_n, \quad \tilde{x}_n^i = \tilde{x}_n^{i-1} - \tilde{x}_n^{i-1}, \quad \tilde{x}_0^i = x_0; \quad \tilde{\eta}_i = \Pi^{-1}\eta_i.$$

Во второй главе рассматриваются линейные системы функционально-дифференциальных уравнений с такой структурой функцио-

нального аргумента, при которой он не имеет первоначального смещения. В такой постановке при $t_0=0$ начальное множество состоит из одной точки.

В §2.1 приводится краткий обзор функционально-дифференциальных уравнений и постановка задачи об аналитических решениях задачи Коши для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений упомянутого типа.

Рассматривается следующая задача Коши:

$$\dot{x}(t) + c(t)x(g(t)) = A^0(t)x(t) + \sum_{t=1}^p A^t(t)x(h_t(t)) + F(t), \quad (6)$$

$$t \in J^* = [0, t_*], \quad x(0) = x_0; \quad g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n t^n, \quad h_t(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_{t,n} t^n;$$

$$0 \leq [g(t), h_t(t)] < t, \quad t > 0, \quad t \in \overline{1, p}.$$

Здесь $x(t), F(t) : J \rightarrow R^k$; $A^t(t) : J \rightarrow R^{k \times k}$, $t \in \overline{0, p}$; $c(t) : J \rightarrow R^1$, $x_0 \in R^k$. Будем считать, что указанные функции являются аналитическими на соответствующих множествах, т.е.

$$A^t(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^t t^n, \quad A_n^t \in R^{k \times k}, \quad t \in \overline{0, p}, \quad t \in J^*;$$

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n, \quad F_n \in R^k, \quad t \in J^*; \quad c(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n, \quad t \in J = [0, t_*].$$

Пусть

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n, \quad x_n \in R^k, \quad (7)$$

- формальное решение задачи (6).

Итак, необходимо выяснить условия, при которых данная задача разрешима в классе аналитических функций.

Аналитические решения линейных систем функционально-диффе-

рениальных уравнений с линейным отклонением аргумента рассматриваются в §2.2. В разделе 2.2.1 исследуются линейные системы функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа.

Будем рассматривать задачу Коши

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^p A^i(t)x(t/s_i) + F(t), \quad t \in J \subseteq J^*, \quad x(0) = x_0, \quad (8)$$

где $x(t)$, $A^i(t)$ и $F(t)$ соответствуют обозначениям, принятым в задаче (6); $1 < s_1 < s_2 < \dots < s_p$, $s_i - \text{const}$.

Теорема 2.1. Пусть для задачи Коши (8) $A^i(t)$ и $F(t)$ — аналитические на $J \subseteq J^* = [0, \infty)$ функции. Тогда для каждого $x_0 \in R^n$ данная задача имеет в пространстве $R^n \times J$ единственное аналитическое решение, которое может быть представлено в виде ряда (7).

Раздел 2.2.2 посвящен линейным системам функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа. В этом случае будем исследовать задачу Коши, представленную в виде

$$\dot{x}(t) + \sum_{j=1}^m c^j(t)\dot{x}(t/r_j) = \sum_{i=1}^p A^i(t)x(t/s_i) + F(t), \quad (9)$$

$$t \in J \subseteq J^*, \quad x(0) = x_0, \quad 1 < r_1 < r_2 < \dots < r_m,$$

$$1 < s_1 < s_2 < \dots < s_p; \quad r_i, s_j - \text{const},$$

$$c^j(t) = \sum_{n=0}^N c_n^j t^n, \quad j = \overline{1, m}, \quad t \in J,$$

$c^j(t): J \rightarrow R^1$, а остальные обозначения соответствуют принятым в задаче (6). На основе метода неопределенных коэффициентов приходим к рекуррентным формулам для нахождения неизвестных векторов x_n ряда (7).

$$n^m \begin{cases} (\sum_{i=1}^p A_{\sigma}^i x_{\sigma} + P_0) / (1 + \sum_{j=1}^m c_j^j), & n=1; \\ [\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^p A_j^i \theta_i^{n-1} x_{n-1-j} - \sum_{\gamma=0}^{N-(n-2)} (n-1-\gamma) \sum_{k=1}^m c_k^k r^{\gamma-n-2} x_{n-1-\gamma} + P_{n-1}] / [n(1 + \sum_{j=1}^m c_j^j r^{j-n})], & \forall n \geq 2, \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{где } \theta^k(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq k, \\ k, & t > k. \end{cases}$$

Исследование вопросов существования аналитических решений задачи Коши (9) проводится на основе анализа рекуррентных соотношений (10). Обозначим

$$q(n) = 1 + \sum_{j=1}^m c_j^j r^{j-n}. \quad (11)$$

Определение 2.1. Если $q(n) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$ ($\mathbb{N}^+ = \{1\}_{i=1}^{\infty}$), то случай α называется **регулярным**.

Определение 2.2. Если $\exists n_0^* \in \mathbb{N}^+$, $n_0^* \geq 0$, $\forall n \geq n_0^*$, такие, что $q(n_0^*) = 0$, то этот случай будет называться **сингулярным**.

Первый случай изучается в пункте 2.2.2.1, где доказывается

Теорема 2.2. Пусть для задачи Коши (9) $A^i(t)$, $\sigma^j(t)$ и $P(t)$ — аналитические на $J \in \mathbb{J}^* = [0, \infty)$ функции. Тогда в регулярном случае для каждого $x_0 \in \mathbb{R}^k$ данная задача имеет в пространстве $\mathbb{R}^k \times J$ единственное аналитическое решение, которое может быть представлено в виде ряда (7).

Исследованию сингулярного случая уделено внимание в пункте 2.2.2.2 этого раздела. Пусть в соответствии с (11) $q(n) = 0$ при $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^* = \{n_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ — определено положительное совершенно упорядоченное множество, т.е. $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}^+$. Анализ формулы (10) показывает, что определить на ее основе значения векторов x_n , $n \in \mathbb{N}^*$, не пред-

ставляется возможным. Следовательно, задача Коши (9) в этом случае не обладает предельной корректностью относительно начального момента $t=0$, так как задание только начального вектора $x_0 \in R^k$ не гарантирует существования решений исследуемой задачи в классе аналитических функций.

Обозначим

$$P(n, \cdot) = \begin{cases} (\sum_{i=1}^n A_i^i x_0 + F_0) / (1 + \sum_{j=1}^m c_j^j), & n=1, \\ (\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^n A_i^j e_i^{t-n+i} x_{n-t-j} -$$

$$-\sum_{\tau=0}^n \sum_{h=1}^{n-2} (n-1-\tau) \sum_{k=1}^m c_k^k r_k^{\tau-n-2} x_{n-t-\tau} + F_{n-1}) / (n(1 + \sum_{j=1}^m c_j^j r_j^{1-n})), \quad \forall n \geq 2,$$

(12)

и для $n=n_p^*$ с учетом (11) перепишем (10) так:

$$n_p^* q(n_p^*) x_{n_p^*} = P(n_p^*, \cdot).$$

Поскольку множитель при $x_{n_p^*}$ равен нулю, это равенство имеет смысл $\forall x_{n_p^*} \in R^k$, если равна нулю его правая часть.

Справедлива следующая

Теорема 2.3. Пусть для задачи Коши (9) $A^i(t)$, $c^j(t)$ и $F(t)$ — аналитические на $J \subseteq J^* = (0, \infty)$ функции и пусть $q(n) = 0$, $n \in N^*$. Тогда данная задача имеет в пространстве $R^k \times J$ бесконечное множество аналитических решений, если

A1: при заданном начальном условии $x_0 \in R^k$ вектор-функция $P(n_p^*, \cdot) = 0$;

A2: для каждого последующего $n = n_p^* + 1, n_p^* + 2, \dots$ в пространстве

R^h найдутся векторы $x_{n_i}^*$ такие, что $P(n_i^*, \cdot) \neq 0$.

и не имеет ни одного аналитического решения, если $\exists n_i^* \in N^+$, $t \in [1, \infty]$, при котором $P(n_i^*, \cdot) = 0$.

С л е д с т в и е 2.1. Так как вектор $x_{n_p}^*$ может быть представлен в виде

$$x_{n_p}^* = \frac{1}{n_p!} \left. \frac{d^{n_p} x(t)}{dt^{n_p}} \right|_{t=0}$$

множество решений задачи (9) с заданным начальным вектором $x_0 \in R^h$ образуют в пространстве $R^h \times J$ пучок траекторий, исходящих из точки $(x_0, 0)$ и имеющих при $t=0$ не менее $n_p^* - 1$ одинаковых последовательных производных.

Из теоремы 2.3 и следствия 2.1 вытекает справедливость следующей теоремы существования единственного аналитического решения исследуемой задачи Коши:

Теорема 2.4. В условиях теоремы 2.3 задача Коши (9) имеет в пространстве $R^h \times J$ единственное аналитическое решение, удовлетворяющее фиксированному начальному вектору $x_0 \in R^h$, если при $t=0$ однозначно определены значения производных $d^{n_i^*} x(t)/dt^{n_i^*}$, $t=1, \bar{n}$.

В §2.3 исследуются вопросы существования аналитических решений задачи Коши для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с аналитической структурой функционального аргумента.

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^p A^i(t)x(h_i(t)) + F(t), \quad t \in J^* = [0, t_0], \quad t_0 < 1, \quad (13)$$

$$x(0) = x_0; h_t(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_{t,n} t^n; 0 < h_t(t) < t, t > 0, t \in \overline{1, \rho},$$

где $x(t), P(t) \in J \cdot R^k$; $A^t(t) \in J \cdot R^{k \times k}$, $t \in \overline{1, \rho}$; $x_0 \in R^k$. Полагая, что $A^t(t)$ и $P(t)$ - аналитические на J^* функции, т.е.

$$A^t(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^t t^n, t \in \overline{1, \rho}; P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n, t \in J^*. \quad (14)$$

В дальнейшем нам понадобится следующий результат. Пусть $h(t) = \sum_{t=1}^{\infty} h_t t^t$ - аналитическая на J^* функция. Тогда

$$h^n(t) = t^n \left(\sum_{t=0}^{\infty} h_{t+1} t^t \right)^n = t^n \sum_{t=0}^{\infty} \bar{h}_{t+1}^n t^t,$$

где при $n \geq 2$

$$\bar{h}_i^n = (h_i)^n, \quad \bar{h}_{m+1}^n = \sum_{k=0}^m h_{k+1} h_{m+1-k}^{n-1}, \quad \forall m \geq 1.$$

Лемма 2.1. Если для функции $h(t) = \sum_{t=1}^{\infty} |h_t| < 1$, то:

а) $\sum_{t=1}^{\infty} |\bar{h}_t^n| < 1, \forall n \geq 2$; б) первый не нулевой коэффициент h_t в последовательности $\{\bar{h}_t^n\}_{t=1}^{\infty}$ больше нуля.

Основной результат параграфа содержит

Теорема 2.6. Пусть для задачи Коши (13) выполнены условия леммы 2.1 и (14). Тогда для каждого $x_0 \in R^k$ основная задача имеет в пространстве $R^k \cdot J$ единственное аналитическое решение, определяемое рядом (7).

Следующий §2.4 посвящен линейным системам функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа с аналитической структурой запаздывания.

Будем рассматривать задачу Коши

$$\dot{x}(t) + c(t)\dot{x}(g(t)) = A(t)x(t) + F(t), \quad t \in \omega^* = [0, t_*], \quad (15)$$

$$t_* < (1 + \sigma^*)^{-1}, \quad x(0) = x_0; \quad g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n t^n; \quad 0 \leq g(t) < t, \quad t > 0.$$

Вдось $A(t): J-R^{k \times k}$, $F(t): J-R^k$, $\sigma(t): J-R^1$ — аналитические на соответствующих множествах функции, т.е.

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n, \quad A_n \in R^{k \times k}, \quad t \in J^*; \quad F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n, \quad F_n \in R^k, \quad t \in J^*; \quad (16)$$

$$\sigma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n t^n, \quad t \in \hat{J} = [0, \hat{t}], \quad \hat{t} > 1, \quad \sigma^* = \sum_{n=0}^{\infty} |\sigma_n|, \quad (17)$$

Рекуррентная формула для коэффициентов формального ряда (7)

имеет вид

$$n(1 - |\sigma_0| g_1^{n-1}) x_n = P(n, \cdot), \quad (18)$$

где

$$P(n, \cdot) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} A_i x_{n-i-1} - \sigma_1 (n-1) x_1 + F_{n-1}, & n=1, 2, \\ \left(\sum_{i=0}^{n-1} A_i x_{n-i-1} - \sum_{j=2}^{n-1} j x_j \sum_{k=0}^{n-j} \sigma_k g_{n-j-k+1}^{j-1} \right) x_1 + F_{n-1}, & \forall n \geq 3, \end{cases}$$

Анализ этих формул, определяющих решение задачи Коши (15), показывает, что имеют место регулярный и сингулярный случаи. Регулярные решения рассматриваются в разделе 2.4.1. Вдось основной результат о существовании единственного аналитического решения сформулирован в следующей теореме.

Теорема 2.3. Пусть для задачи Коши (15) выполнены условия леммы 2.1, (16) и (17). Тогда в регулярном случае для каждого $x_0 \in R^k$ эта задача имеет в пространстве $R^k \times J$ единственное аналитическое решение, определяемое рядом (7).

Содержание раздела 2.4.2 посвящено сингулярному случаю. Вдось доказаны две теоремы.

Теорема 2.9. Пусть для задачи Коши (15) выполнены условия леммы 2.1, (16), (17); $\sigma_0 < 0$ и существует $n^* \in \mathbb{N}^+$ такое, что $1 - |\sigma_0| |\mathcal{B}_1^{n^*}|^{-1} = 0$. Тогда данная задача имеет в пространстве $R^k \times J$ бесконечное множество аналитических решений, если при заданном начальном условии $x_0 \in R^k$ вектор-функция $P(n^*, \cdot) = 0$, и не имеет ни одного аналитического решения, если $P(n^*, \cdot) \neq 0$.

С л е д с т в и е 2.2. Поскольку вектор x_{n^*} может быть представлен в виде

$$x_{n^*} = \left. \left(\frac{d^{n^*} x(t)}{dt^{n^*}} \right) \right|_{t=0} / n^*!$$

множество решений задачи Коши (15) с заданным начальным вектором $x_0 \in R^k$ образует в пространстве $R^k \times J$ пучок траекторий, исходящих из точки $(x_0, 0)$ и имеющих при $t=0$ n^*-1 одинаковых последовательных производных.

Опираясь на результат теоремы 2.9 и следствие 2.2, формулируем теорему существования единственного аналитического решения задачи (15) в сингулярном случае.

Теорема 2.10. Пусть для задачи Коши (15) выполнены условия теоремы 2.9. Тогда при заданном начальном условии $x_0 \in R^k$ данная задача имеет в пространстве $R^k \times J$ единственное аналитическое решение, если при $n=n^*$ вектор-функция $P(n^*, \cdot) = 0$ и при $t=0$ однозначно определено значение производной $d^{n^*} x(t)/dt^{n^*}$.

Раздел 2.4.3 данной главы связан с изучением аналитических решений линейных систем функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа с матричным коэффициентом при производной. Здесь также рассматриваются регулярный и сингулярный случаи. Первому посвящен пункт 2.4.3.1, где приводится теорема 2.11 о

существовании единственного аналитического решения данной задачи. Сингулярный случай изучается в пункте 2.4.3.2 раздела. Основной результат содержится в теореме 2.12 об условиях разрешимости исследуемой задачи Коши в классе аналитических функций.

Раздел 2.4.4 обобщает результаты §2.3 и разделов 2.4.1, 2.4.2. В пункте 2.4.4.1 рассматривается регулярный случай и доказывается теорема о существовании единственного аналитического решения исследуемой задачи Коши, а в пункте 2.4.4.2 для сингулярного случая приводятся теоремы 2.14 и 2.15 об условиях разрешимости задачи Коши в классе аналитических функций и условиях выделения из пучка аналитических решений единственного аналитического решения.

Содержание §2.5 посвящено аналитическим решениям линейных систем функционально-дифференциальных уравнений в пространстве функциональных параметров. Целесообразность применения метода функциональных параметров (МФП) для решения линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений обсуждалась в главе 1, но распространение идей МФП на линейные системы функционально-дифференциальных уравнений встречается со значительными трудностями в вопросе отображения исходной задачи в пространство функционального параметра. В этом параграфе показано, что каждой задаче Коши для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений, имеющей единственное аналитическое решение, соответствует модельная задача Коши для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющая тождественное решение. Применение теперь МФП к модельной задаче позволяет получить решение искомой задачи Коши для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений в пространстве функционального параметра

Третья глава диссертации содержит результаты исследований решений линейных систем функционально-дифференциальных уравнений в окрестности регулярной особой точки. Результаты, полученные в этой области для обыкновенных дифференциальных уравнений, отражены во многих публикациях. Для функционально-дифференциальных уравнений вопросы существования и поведения решений в окрестности особой точки до сих пор оставались открытыми.

В §3.1 приводится постановка задачи об аналитических решениях задачи Коши для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с аналитической структурой запаздывания, при которой функциональный аргумент не имеет первоначального смещения.

Рассмотрим задачу Коши для следующей линейной системы функционально-дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(h(t)) + F(t), \quad t \in J = [0, t_*], \quad t_* < 1, \quad (19)$$

$$x(0) = x_0; \quad h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n t^n; \quad 0 \leq h(t) < t, \quad t > 0.$$

Здесь $x(t), F(t): J \rightarrow R^b$, $A(t): J \rightarrow R^{b \times b}$, $x_0 \in R^b$. Будем считать, что $A(t)$ и $F(t)$ — аналитические на J^* функции, т.е.

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n, \quad A_n \in R^{b \times b}, \quad t \in J^*, \quad F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n, \quad F_n \in R^b, \quad t \in J^*. \quad (20)$$

Пусть

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n, \quad x_n \in R^b. \quad (21)$$

Формальное решение исследуемой задачи. Методом неопределенных коэффициентов приходим к формулам для нахождения неизвестных векторов x_n .

$$0 = A_0 x_0 + P_0, \quad (E - A_0 h_1) x_1 = A_1 x_0 + P_1,$$

$$(E_n - A_0 h_1^n) x_n = \sum_{s=1}^n A_s \sum_{j=0}^{n-s} x_{n-s-j} h_{j+1}^{n-s-j} + A_0 \sum_{j=1}^{n-1} x_{n-j} h_{j+1}^{n-j} + P_n, \quad \forall n \geq 2.$$

Здесь $E \in R^{k \times k}$ — единичная матрица.

Анализ первого равенства показывает, что оно верно, если:

A1: $A_0 = P_0 = 0$. При этом равенство справедливо $\forall x_0 \in R^k$. Кроме того, согласно (20) особая точка в задаче (19) устраняется, поскольку в правой части независимая переменная t как множитель выносится за скобки и сокращается с множителем t в левой части этого равенства. В такой постановке вопрос об аналитических решениях задачи (19) исследован в главе 2;

$$A2: A_0 x_0 = -P_0.$$

Будем считать, что условие A2 выполняется. При решении задачи Коши (19) будем рассматривать два случая.

Определение 3.1. Если $\det(E_n - A_0 h_1^n) \neq 0, \forall n \in N^+$, то такой случай назовем *регулярным*.

Определение 3.2. Если $\exists n_0^* \in N^+, n_0^* \geq 0, s = \overline{1, n_0^*}$, такие, что $\det(E_{n_0^*} - A_0 h_1^{n_0^*}) = 0$, то этот случай *сингулярный*.

В регулярном случае исследование вопросов разрешимости задачи Коши (19) в классе аналитических функций составляет содержание §3.2. В разделе 3.2.1 доказывается

Теорема 3.1. Пусть для задачи Коши (19) выполнены условия:

- $A(t)$ и $P(t)$ — аналитические на J^* функции;
- $\det(E_n - A_0 h_1^n) \neq 0, \forall n \in N^+$;
- функция $h(t)$ удовлетворяет лемме 2.1.

Тогда в сечении пространства $R^k \times J$ при $t=0$ существует единственная точка $(x_0, 0)$, $x_0 = A_0^{-1} P_0$, через которую проходит единственное аналитическое решение данной задачи, и это решение

определяется рядом (21).

Материалы раздела 3.2.2 посвящены сингулярному случаю. Здесь в пунктах 3.2.2.1-3.2.2.4 изучены условия, при которых последовательность, составленная из коэффициентов ряда, представляющего собой формальное решение, определяется однозначно. Это в свою очередь позволило доказать следующую теорему.

Теорема 3.2. Пусть для задачи Коши (19) выполнены условия:

а) $A(t)$ и $F(t)$ — аналитические на J^* функции;

б) функция $h(t)$ удовлетворяет лемме 2.1;

в) существует $x_0 \in R^h$ такое, что последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ определяется однозначно и ряд (21) формально удовлетворяет задаче (19).

Тогда этот ряд сходится равномерно $\forall t \in J \setminus J^*$ и представляет собой единственное аналитическое решение данной задачи, проходящее в сечении пространства $R^h \times J$ при $t=0$ через точку $(x_0, 0)$.

В §3.3 рассматривается задачи Коши для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа с линейной структурой запаздывания и с постоянной матрицей в окрестности регулярной особой точки

$$t\dot{x}(t) + \alpha \dot{x}(t/\alpha) = Ax(t) + F(t), \quad t \in J \subset [0, \infty), \quad x(0) = x_0. \quad (22)$$

Здесь $x(t)$, $F(t): J \rightarrow R^h$, $A \in R^{h \times h}$ — постоянная вещественная невырожденная матрица; α и $\alpha > 1$ — const, $x_0 \in R^h$. Будем считать, что $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n t^n$, $P_n \in R^h$ — аналитическая на J функция.

Содержание §3.4 связано с исследованием аналитических решений задачи Коши для однородных линейных систем функционально-дифференциальных уравнений указанного в §3.3 типа. Результаты, полученные в разделе 3.4.1, отражает

Теорема 3.3. Пусть матрица $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ однородной задачи Коши (22) такова, что $\det(A - nE) \neq 0, \forall n \geq 0$. Тогда в пространстве $\mathbb{R}^k \times J$ для любого не нулевого начального вектора $x_0 \in \mathbb{R}^k$ эта задача неразрешима в классе аналитических функций.

Таким образом, единственным аналитическим решением данной задачи будет тривиальное решение $x(t) = 0$.

В разделах 3.4.2 - 3.4.4 изучены условия, при которых однородная задача Коши разрешима в классе аналитических функций. Здесь приводятся доказательства теорем существования для следующих случаев: простой спектр матрицы состоит из целых положительных чисел (теорема 3.4); простой вещественный спектр содержит целые положительные характеристические числа (теорема 3.5); спектр матрицы состоит из вещественных кратных характеристических чисел, среди которых имеются целые положительные (теорема 3.6).

В случае произвольного спектра справедлива

Теорема 3.7. Пусть матрица $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ имеет произвольный спектр $\sigma(A)$, среди характеристических чисел которого имеются целые положительные. Тогда в сечении пространства $\mathbb{R}^k \times J$ при $t=0$ существует многообразие $M \subset \mathbb{R}^{r_1 + r_2}$, где r_1 и r_2 - соответственно числа простых и кратных целых положительных чисел $\sigma(A)$, такое, что для каждого начального вектора $x_0 \in M$ однородная задача Коши (22) имеет в пространстве $\mathbb{R}^k \times J$ единственное аналитическое решение в виде полинома степени не выше λ_{\max} , где λ_{\max} - наибольшее целое положительное характеристическое число $\sigma(A)$.

Последний §3.5 этой главы посвящен вопросам существования аналитических решений неоднородной задачи Коши для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа в окрестности регулярной особой точки. В разделе 3.5.1 рассматри-

ваются общие случаи, анализ которых проводится без учета свойств спектра матрицы изучаемой системы. В том случае, когда неоднородная часть представляет собой полином, в пунктах 3.5.1.1 и 3.5.1.2 доказаны две теоремы.

Теорема 3.8. Пусть $A \in R^{h \times h}$ и вектор $F(t): J \rightarrow R^h$ — матрица и полином степени k задачи Коши (22). Тогда если

$$A1. \det(A - \lambda E) \neq 0, \forall \lambda \in \mathbb{C};$$

A2. при заданном начальном векторе $x_0 \in R^h$

$$F_m = (kE - A) \left\{ \frac{\alpha}{z! \sigma^m} \prod_{j=1}^m [A - (k-j)E] x_0 + \right. \\ \left. + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{z! \alpha^{\frac{m(m-1)-l(l-1)}{2}}}{z! \sigma^{m-l}} \prod_{j=1}^{m-l-1} [A - (k-j)E] F_l \right\},$$

то в пространстве $R^{h \times J}$ данная задача неразрешима в классе аналитических функций.

Теорема 3.9. Пусть $A \in R^{h \times h}$ — произвольная матрица задачи Коши (22) и пусть \mathbb{P}_M — множество векторных полиномов степени M .

Тогда $\forall x_0 \in R^h$ в пространстве $R^{h \times J}$ существует бесконечное множество векторов $F(t) \in \mathbb{P}_M$ таких, что каждому вектору $F(t)$ соответствует единственное решение задачи (22) в виде полинома

$$x(t) = \sum_{n=0}^M x_n t^n, \quad t \in J.$$

Содержание пункта 3.5.1.3 связано с вопросом существования решения в виде бесконечного ряда. Показано, что для каждой аналитической функции, удовлетворяющей при $t=0$ начальному условию данной задачи Коши, найдется такая аналитическая функция, представляющая собой неоднородную часть задачи, что никакая

Функция будет аналитическим решением этой задачи.

Материалы раздела 3.5.2 освещают специальные случаи. Исследование существования аналитических решений опирается на анализ структуры спектра матрицы. В пунктах 3.5.2.1–3.5.2.3 изучены условия разрешимости неоднородной задачи Коши в классе аналитических функций. Соответствующие теоремы существования доказаны для следующих случаев: простой вещественный спектр содержит целые положительные характеристические числа (теоремы 3.10–3.12); спектр матрицы состоит из вещественных кратных характеристических чисел, среди которых имеются целые положительные (теорема 3.13).

В более общем случае справедлива

Теорема 3.14. Пусть матрица $A \in R^{k \times k}$ имеет произвольный спектр $\sigma(A)$, среди характеристических чисел которого имеются целые положительные λ_{p_j} , $p_j \in [1, k]$, $j = \overline{1, s}$, $s < k$, и пусть $\overline{W}_{\lambda_{\max} - 1}$ — множество векторных полиномов степени не выше $\lambda_{\max} - 1$ ($\lambda_{\max} = \max_p \lambda_{p_i}$, $i = \overline{1, s}$). Тогда существует подмножество $V \subset \overline{W}_{\lambda_{\max} - 1}$ и в сечении пространства $R^k \times J$ при $t=0$ — многообразие $M \subset R^q$ такие, что для каждого вектора $F(t) \in V$ и каждого начального вектора $x_0 \in M$ задача Коши (22) имеет в пространстве $R^k \times J$ единственное аналитическое решение в виде полинома степени не выше λ_{\max} .

В четвертой главе исследуются вопросы оценки точности приближенных решений линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве функциональных параметров.

В §4.1 приводится анализ погрешностей, возникающих в процессе решения задач. Основное внимание в данной главе уделяется погрешностям IV группы — погрешностям метода. Причина появления этих погрешностей состоит в том, что многие математические уравнения можно решить, описав бесконечные процессы, пределы которых

и являются искомыми решениями. Поскольку бесконечный процесс не может быть завершен, возникает необходимость его остановки. Полученный при этом результат рассматривается как приближение к искомому решению.

Итак, пусть

$$x(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \tau^n, \quad \tau \in J_{\tau} = [0, \tau_T], \quad (23)$$

и

$$\tilde{x}(\tau) = \sum_{n=0}^N x_n \tau^n, \quad \tau \in J_{\tau_t} \subset J_{\tau}, \quad J_{\tau_t} = [0, \tau_t], \quad \tau_t = \tau / t = t^* \quad (24)$$

— соответственно точное и приближенное решения в пространстве функционального параметра задачи Коши для любой из рассмотренных выше линейных систем дифференциальных уравнений.

Введем норму вектора $\|x\|$ и согласованную с ней норму матрицы $\|A\|$ известным способом: $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Тогда в качестве основной сформулируем следующую задачу:

Основная задача. *Определить (или оценить) число N членов ряда (23), представляющего собой решение искомой задачи, сумма которых на рассматриваемом сегменте изменения функционального параметра $J_{\tau_t} \subset J_{\tau}$ обеспечивает требуемую точность в приближенном решении (24), т.е.*

$$\|x(\tau) - \tilde{x}(\tau)\| = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} x_n \tau^n \right\| \leq \epsilon, \quad \tau \in J_{\tau_t}. \quad (25)$$

Исследование задачи о точности приближенных решений, возникающих при обрыве ряда, основано на изучении введенных специальным образом скалярных последовательностей, мажорирующих нормированную последовательность векторных коэффициентов ряда по степеням функционального параметра. Методы построения мажорирующих последовательностей в целом одинаковы для всех типов диффе-

ренциальных уравнений, рассмотренных в главах 1-3. Поэтому в качестве исходной возьмем задачу Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами. Выделим класс функциональных параметров, где $p(\tau) = dt(\tau)/d\tau$ - дробно-рациональная функция, т.е.

$$p(\tau) = m(\tau)/b(\tau); m(\tau) = \sum_{n=0}^{\mu} m_n \tau^n; b(\tau) = \sum_{n=0}^{\beta} b_n \tau^n, b(\tau) \neq 0, \tau \in J_{\tau}$$

полиномы с постоянными коэффициентами m_n, b_n .

Тогда в пространстве функционального параметра задача Коши (1) запишется в виде

$$\left(\sum_{n=0}^{\beta} b_n \tau^n \right) dx(\tau)/d\tau = \left(\sum_{n=0}^{\mu} m_n \tau^n \right) \left[\left(\sum_{n=0}^{\lambda} A_n \tau^n \right) x(\tau) + \sum_{n=0}^{\kappa} F_n \tau^n \right], \tau \in J_{\tau}, x(0) = x_0. \quad (26)$$

Здесь λ, κ - конечные или бесконечные пределы.

Как показано в главе 1, для определяемых коэффициентов ряда (23) справедлива формула

$$x_n = \sum_{i=1}^{\sigma(n)} A_n^i x_{n-i} + g_{n-1}, \quad \forall n \geq 1, \quad (27)$$

где

$$\sigma = \begin{cases} \mu + \lambda + 1, & \text{если } \mu + \lambda \geq \beta; \\ \beta, & \text{если } \mu + \lambda < \beta. \end{cases}$$

Прямые мажорирующие последовательности. Введем последовательности $(\xi_n^0)_{n=0}^{\infty}$ и $(\xi_n^1)_{n=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$\xi_n^0 = \begin{cases} |x_n|, & 0 \leq n < k; \\ \sum_{i=1}^{\sigma(n)} \alpha_n^i \xi_{n-i}^0 + f_{n-1}, & \forall n \geq k+1; \end{cases}$$

$$\xi_n^2 = \begin{cases} \xi_n^0, & 0 \leq n \leq k, \\ \xi_n^1, & k+1 \leq n \leq n_*, \\ O_1 p \xi_{n-1}^2 + O_2 (1-p) \xi_{n-(p+1)}^2 + \dots + \\ + O_m \delta(\mu+\lambda) \xi_{n-(u+1)}^2 + f_{n-1}^j, & \forall n \geq n_*+1. \end{cases}$$

Здесь

$$\delta(\mu+\lambda) = \begin{cases} m(n(\lambda+\mu+1-u, n_*)), & \text{если } \lambda < \infty, \\ n_*, & \text{если } \lambda = \infty. \end{cases}$$

Лемма 4.3. Пусть $\max_i |A_i| = a < \infty$, $l = \overline{1, \lambda}$, $\mu + \lambda > \beta$ и O_m определены согласно (29). Тогда если

- 1) $\alpha'_n \geq 1, \forall n \geq 1$;
- 2) $n_* \geq \begin{cases} \max(k+u+1, \beta+1) & \text{при } \lambda = \infty, \\ \max(k+1, \lambda+\mu) & \text{при } \lambda < \infty; \end{cases}$
- 3) $\xi_{n_*-u}^2 \geq \max_i \xi_i^0, \quad i = \overline{1, k}$,

то

$$|x_n| \leq \xi_n^2, \quad \forall n \geq 0.$$

Определение 4.4. Последовательность $(\xi_n^2)_{n=0}^\infty$ будем называть укороченной мажорирующей последовательностью (УМП).

Мажорирующие последовательности на основе производящих функций. Пусть в (26) $\lambda = \infty$. Перепишем (27) следующим образом:

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{nb_0} \left\{ \sum_{s=0}^{n-1} [r_s - (n-s-1)b_{s+1}] x_{n-s-1} + g_{n-1} \right\}, & 1 \leq n \leq \beta, \\ \frac{1}{nb_0} \left\{ \sum_{s=0}^{\beta-1} [r_s - (n-s-1)b_{s+1}] x_{n-s-1} + \sum_{s=\beta}^n r_s x_{n-s-1} + g_{n-1} \right\}, & \forall n > \beta, \end{cases} \quad (30)$$

где с учетом (26) $r_s \in R^1 \cdot R^1$, $g_s \in R^1$ имеют вид

$$r_t = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\delta^{\mu}(t)} m_j A_{t-j}, & 0 \leq t \leq \lambda, \\ \sum_{j=0}^{\lambda+\mu-t} m_{t-\lambda+j} A_{\lambda-j}, & \lambda < t \leq \lambda+\mu, \end{cases} \quad g_t = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\delta^{\mu}(t)} m_j F_{t-j}, & 0 \leq t \leq \infty, \\ \sum_{j=0}^{\mu} m_{t-\infty+j} A_{\infty-j}, & \infty < t \leq \infty+\mu. \end{cases} \quad (31)$$

Лемма 4.4. Последовательность $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$, порождаемая производящей функцией $\xi(\eta)$, которая удовлетворяет задаче Коши

$$b^*(\eta) d\xi(\eta)/d\eta = m^*(\eta) a^*(\eta) \xi(\eta) + g^*(\eta), \quad |\eta| \leq \eta_0, \quad \xi(0) = |x_0|, \quad (32)$$

мажорирует последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, определенную соотношением (30), т.е. $|x_n| \leq \xi_n$, $\forall n \geq 0$, при этом функция $\xi(\eta)$ является верхней границей решения задачи (1) на сегменте $0 \leq t \leq \eta_0$.

Здесь согласно (31)

$$b^*(\eta) = b_0^* - \sum_{t=1}^{\infty} b_t^* \eta^t; \quad m^*(\eta) = \sum_{t=0}^{\infty} m_t^* \eta^t; \\ a^*(\eta) = \sum_{t=0}^{\infty} a_t^* \eta^t; \quad g^*(\eta) = \sum_{t=0}^{\infty} g_t^* \eta^t, \quad G = \infty + \mu,$$

где $b_t^* = |b_t|$, $m_t^* = |m_t|$, $a_t^* = |a_t|$,

$$g_t^* = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\delta^{\mu}(t)} |m_j f_{t-j}|, & 0 \leq t \leq \infty, \\ \sum_{j=0}^{G-t} |m_{t-\infty+j} f_{\infty-j}|, & \infty < t \leq G. \end{cases}$$

Пологая $\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n t^n$, из (32) методом неопределенных коэффициентов получаем

$$\xi_n = \begin{cases} \frac{1}{nb_0} \left\{ \sum_{\sigma=0}^{n-1} [r_\sigma^* + (n-\sigma-1)b_{\sigma+1}^*] \xi_{n-\sigma-1} + g_{n-1}^* \right\}, & i \leq n \leq \beta, \\ \frac{1}{nb_0} \left\{ \sum_{\sigma=0}^{\beta-1} [r_\sigma^* + (n-\sigma-1)b_{\sigma+1}^*] \xi_{n-\sigma-1} + \sum_{\sigma=\beta}^n r_\sigma^* \xi_{n-\sigma-1} + g_{n-1}^* \right\}, & \forall n > \beta, \end{cases} \quad (33)$$

$$r_i^* = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\sigma^{\mu}(i)} m_j^* \alpha_{i-j}^*, & 0 \leq i \leq \alpha, \\ \sum_{j=0}^{\lambda+\mu-i} m_{i-\lambda+j}^* \alpha_{\lambda-j}^*, & \lambda < i \leq \alpha + \mu. \end{cases}$$

Определение 4.5. Последовательность $(\xi_n)_{n=0}^{\infty}$, определенную формулой (33), будем называть мажорирующей последовательностью на основе производящих функций (МППФ)¹⁾.

Целесообразность введения МППФ связана с тем, что для широкого класса задач удается снять ряд ограничений, существующих при построении ПМП и УМП, что в конечном счете приводит к более точным оценкам приближенного решения исследуемых задач.

Третий параграф этой главы посвящен оценкам точности приближенных решений задачи Коши для линейных систем дифференциальных уравнений в пространстве функциональных параметров.

Из результатов предыдущего параграфа следует

$$|\xi_n| \leq \xi_n^t = D_1^t \xi_{n-1}^t + D_2^t \xi_{n-2}^t + \dots + D_\sigma^t \xi_{n-\sigma}^t + g_{n-1}^t, \quad \forall n > 0, \quad t = \overline{1, 3},$$

где постоянные коэффициенты D_j^t и g_h^t находятся в зависимости от применяемого способа построения мажорирующих последовательностей. Спуская верхние индексы, для $n > n_0 > \sigma$ получим

$$\xi_n = D_1 \xi_{n-1} + D_2 \xi_{n-2} + \dots + D_\sigma \xi_{n-\sigma} \quad (34)$$

¹⁾ В этом разделе построена также МППФ $(\xi_n^3)_{n=0}^{\infty}$, порождаемая формулами типа (33), но с постоянными коэффициентами, и доказана лемма 4.6 о том, что $\xi_n^3 > \xi_n > |\xi_n|$, $\forall n > 0$.

Здесь параметр ϵ определяется типом мажорирующей последовательности

В силу применяемых приемов построения мажорирующих последовательностей уравнение (34) всегда имеет конечное число слагаемых, при этом $|D_i| < \infty$. Таким образом, уравнение (34) можно рассматривать как однородное разностное уравнение порядка ν .

Как известно, единственность решения уравнения (34) задается начальными условиями, которые для $n_* \gg \nu$ можно найти по формуле

$$\xi_{n_*-i} = \xi_{n_*-i}^0, \quad i = \overline{1, \nu}. \quad (35)$$

Решение разностного уравнения (34) связано с нахождением корней характеристического уравнения

$$k^\nu - D_1 k^{\nu-1} - D_2 k^{\nu-2} - \dots - D_\nu = 0. \quad (36)$$

В разделах 4.3.1, 4.3.2 и 4.3.3 рассматриваются соответственно случаи простых, комплексных и кратных корней характеристического уравнения. Полученные здесь результаты оформлены в виде локальных теорем об оценках согласно сформулированной основной задаче. Так, например, случаю комплексных корней характеристического уравнения, которое при этом переписется в виде

$$(k^2 + b_1 k + c_1)(k^2 + b_2 k + c_2) \dots (k^2 + b_r k + c_r) = 0, \quad 2r = \nu.$$

соответствует

Теорема 4.3. Пусть выполняются условия:

1. Корни характеристического уравнения комплексные;
2. В силу (34) $n_* > \max\{\nu, c\}$;
3. $\beta_i, \tau_i \leq \tau_* < 1$; $\beta_i > \max\{\beta_i, \tau_i - \sqrt{c}\}$, $\beta_i > 0$.

Тогда для числа N ($N > n_*$) членов ряда (23), сумма которых обеспечивает требуемую точность ϵ приближенного решения задачи

Коши (26) на сегменте $J_{\tau_t} \subset J_{\tau^*}$, справедлива следующая оценка:

$$\tau_t^{n_* - \sigma/2} \sum_{p=1}^{\infty} (|W_{2p-1}| + |W_{2p}|) \frac{(\beta_p \tau_t + 1)(\beta_p \tau_t)^{N - n_* + \sigma + 1}}{1 + b_p \tau_t + (\beta_p \tau_t)^2} \ll \dots$$

Здесь W_t - константы, определяемые из начальных данных для резонансного уравнения (35).

Для предварительного анализа числа N полезна следующая

Теорема 4.4. Если выполняются условия теоремы 4.3, то для числа N ($N > n_*$) членов ряда (23), сумма которых обеспечивает требуемую точность в приближенном решении задачи Коши (26) на сегменте $J_{\tau_t} \subset J_{\tau^*}$, имеет место оценка

$$N \geq \lceil (\ln(\beta_1 \tau_t))^{-1} \ln(\epsilon \tau_t^{\sigma - n_*} \left[\sum_{p=1}^{\sigma/2} \frac{(|W_{2p-1}| + |W_{2p}|)(\beta_p \tau_t + 1)}{1 + b_p \tau_t + (\beta_p \tau_t)^2} \cdot (\beta_p / \beta_1)^{\sigma + 2} \right]^{-1}) \rceil + n_* - \sigma,$$

где $\lceil a \rceil$ - целая часть числа a .

Опираясь на полученные результаты, в разделе 4.3.4 приводится теорема об оценках в случае произвольных корней характеристического уравнения.

Теорема 4.6. Пусть выполняются условия:

1. В соответствии с (34) $n_* > \max(\sigma, \sigma)$;
2. $\alpha_{\max} \tau_t \leq \tau_* < 1$,

$$\alpha_{\max} = \max(|\alpha_t|, |\beta_j|, |\gamma_k|), (t, j, k: 1:m_1, 1:m_2, 1:m_3).$$

Тогда для числа N ($N > n_*$) членов ряда (23), сумма которых обеспечивает требуемую точность в приближенном решении задачи Коши (26) на сегменте $J_{\tau_t} \subset J_{\tau^*}$, справедлива оценка

$$\tau_t^{n_*-s} \left\{ \sum_{t=1}^{m_1} (1-\alpha_t \tau_t)^{-1} V_t (\alpha_t \tau_t)^{N_*} + \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^{m_2} (|W_{2p-1}| + |W_{2p}|) \frac{(\beta_p \tau_t + 1)(\beta_p \tau_t)^{N_*}}{1 + b_p \tau_t + (\beta_p \tau_t)^2} + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{m_3} \frac{|\gamma_l \tau_t|^{N_*}}{1 - \gamma_l \tau_t} \sum_{k=0}^{r_l-1} |B_k^l| \sum_{\sigma=0}^k D_k^\sigma \frac{\sigma! |\gamma_l \tau_t|^\sigma}{(1 - \gamma_l \tau_t)^\sigma} \prod_{\varphi=1}^{k-\sigma} (N_* + 1 - \varphi) \right\} \ll \varepsilon.$$

Здесь $N_* = N - n_* + s + 1$, а V_t , W_t , B_k^l — константы, определяемые из начальных данных для разностного уравнения (35).

Изложенные выше способы построения оценок точности приближенных решений для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами могут быть перенесены на исследование приближенных решений линейных систем дифференциальных уравнений иного вида. Раздел 4.3.5 посвящен особенностям построения оценок точности приближенных решений задачи Коши для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-аналитическими коэффициентами (п.4.3.5.1) и для некоторых линейных систем функционально-дифференциальных уравнений (п.4.3.5.2).

Пятая глава диссертации носит прикладной характер. На основе асимптотического метода в пространстве малого времени (ПМВ), являющегося одним из вариантов метода функциональных параметров, исследуются приближенные решения задачи Коши для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами.

В первом параграфе главы оператор Π , осуществляющий отображение временного полусегмента $J \subset [0, \infty)$ в полусегмент $J_\tau \subset (0, 1)$,

вводит малое время соотношением $\tau = 1 - \exp(-qt)$, $q > 0 - \text{const}$, $\tau \in J_{\tau}$. Отмечается обоснованность такого функционального параметра для решения задач, описывающих асимптотически устойчивые процессы.

Построению решения исходной задачи в виде ряда по степеням малого времени уделено внимание в §5.2. Здесь рассматриваются линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными (раздел 5.2.1) и переменными (раздел 5.2.2) коэффициентами. Приводятся конкретные рекуррентные формулы для данного функционального параметра. Поскольку постановка исходной задачи в ПМВ предполагает отображение заданных функций времени в ПМВ, в разделе 5.2.3 рассматриваются некоторые подходы к решению этого вопроса и приведены примеры.

В §5.3, основываясь на результатах главы 4, строятся оценки точности приближенных решений задачи Коши для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве малого времени. Раздел 5.3.1 посвящен оценкам точности приближенных решений задачи Коши с постоянными коэффициентами. Используются два подхода: прямой и спектральный. Последний связан со спектром постоянной матрицы. Основные результаты об оценках сформулированы здесь в виде теорем 5.1-5.4. В разделе 5.3.2, для метода ПМВ вводятся мажорирующие последовательности, соответствующие рассмотренным в §4.2 (в пункте 5.3.2.1- прямые и укороченные мажорирующие последовательности, а в пункте 5.3.2.2- мажорирующие последовательности на основе производящих функций). При построении мажорирующих последовательностей на основе производящих функций показано, что в некоторых случаях существенные затруднения возникают в силу неоднородной задачи Коши для производящей функции. В ряде случаев эти трудности удается преодолеть путем приведения неоднородной задачи Коши для производящей функции к

однородной форме. Этому вопросу уделяется внимание в пункте 5.3.2.3. Последний раздел 5.3.3 параграфа посвящен построению оценок точности приближенных решений задачи Коши для некоторых нестационарных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве малого времени. Здесь на конкретных примерах иллюстрируется техника применения предложенного метода оценок точности приближенных решений.

Выводы

1. Обосновано применение метода функциональных параметров для исследования линейных систем дифференциальных уравнений с аналитическими или кусочно-аналитическими правыми частями, а также для некоторых линейных систем функционально-дифференциальных уравнений.

2. Доказана теорема разрешимости задачи Коши для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими правыми частями в пространстве функциональных параметров в виде ряда по степеням функционального параметра.

3. Введен класс псевдодифференцируемых функций, что позволило исследовать решения задачи Коши для линейных систем дифференциальных уравнений с кусочно-аналитическими правыми частями. Доказана теорема о существовании единственного решения указанной задачи в пространстве функциональных параметров в виде псевдоряда по степеням функционального параметра.

4. Получены условия однозначной разрешимости в классе аналитических функций задачи Коши для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с линейной структурой функционального аргумента. Результаты сформулированы в виде теорем существования и единственности.

5. Установлены условия существования аналитических решений задачи Коши для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа с линейной структурой функционального аргумента. Приведены теоремы существования как пучка аналитических решений, так и единственного аналитического решения данной задачи.

6. Для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с аналитической структурой запаздывания при отсутствии начального смещения функционального аргумента изучена задача Коши. В виде теорем существования приводятся условия разрешимости этой задачи в классе аналитических функций.

7. Исследована задача Коши для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа с указанной в п.6 структурой функционального аргумента. В регулярном случае получена теорема существования единственного аналитического решения этой задачи. В сингулярном случае доказаны теоремы существования пучка аналитических решений и теоремы о выделении из пучка единственного аналитического решения.

8. Найдены условия существования аналитических решений задачи Коши для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа в окрестности регулярной особой точки с указанной в п.6 структурой запаздывания.

9. Рассмотрена задача Коши для линейных систем функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа в окрестности регулярной особой точки с линейной структурой запаздывания. Изучены однородная и неоднородная задача. Доказаны теоремы существования аналитических решений различной структуры (тривиальных, полиномиальных или в виде ряда).

10. Решена задача об оценке точности приближенных решений

задачи Коши для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими правыми частями в пространстве функциональных параметров. Основные результаты, сформулированные в виде теорем, представлены формулами, допускающими реализацию на ЭВМ. Рассмотрены вопросы применения разработанного метода оценок для исследования приближенных решений линейных систем с кусочно-аналитическими правыми частями, а также для некоторых линейных систем функционально-дифференциальных уравнений.

Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Кузнецов Н.Г., Орлов Ю.Ф., Черепенников В.Б., Шлаустас Р.Ю. Регулярные асимптотические алгоритмы в механике.- Новосибирск: Наука, 1989.
2. Черепенников В.Б. Метод функциональных параметров в теории нестационарных процессов//Мат.Физика.- 1980. Вып.27.- С.56-61.
3. Черепенников В.Б. Об оценках точности приближенных решений для нестационарных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений// Методы возмущений в механике.- Новосибирск: Наука, 1982.- С.84-93.
4. Черепенников В.Б. Оценки точности приближенных решений обыкновенных дифференциальных уравнений на основе методе функциональных параметров // Мат. Физика.- 1983. Вып. 34.- С.45-51.
5. Черепенников В.Б., Борисюк М.Н. Приближенное интегрирование нестационарных линейных систем дифференциальных уравнений методом функциональных параметров // Асимптотические методы в механике.- Новосибирск: Наука, 1983.- С.165-175.
6. Черепенников В.Б. Метод функциональных параметров в теории

- обыкновенных дифференциальных уравнений. - Новосибирск: Наука, 1983.
7. Черепенников В.В. Приближенное интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений в пространстве малого времени // Некорректные задачи теории возмущений. - Новосибирск: Наука, 1984. - С.199-214.
 8. Черепенников В. В. Исследование решений одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Асимптотические методы в динамике систем. - Иркутск: ВОО СО АН СССР, 1985. - С.38-44.
 9. Черепенников В.В. Об одном методе интегрирования линейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // Асимптотические методы. Прикладные задачи механики. - Новосибирск: Наука, 1986. - С.153-170.
 10. Черепенников В.В. Метод функциональных параметров в теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Тезисы докл. VI Всесоюзной конференции "Качественная теория дифференциальных уравнений". Иркутск, 1986. - С.199.
 11. Черепенников В.В. Аналитические решения одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Мат. физика. - Ленинград: Изд. Ленинградского госпединститута, 1987. - С.74-77.
 12. Черепенников В.В. Метод функциональных параметров в теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений // Асимптотические методы. Задачи и модели механики. - Новосибирск: Наука, 1987. - С.63-94.
 13. Черепенников В.В. Об одном методе решения некоторых систем дифференциальных уравнений // Тезисы докл. Всесоюзной конференции "Новые подходы к решению дифференциальных уравне-

ний". - М., 1987. - С.120.

14. Черепенников В.Б. Метод функциональных параметров в теории дифференциальных уравнений // Труды XI Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. - Будапешт. Венгрия. 1987. - С.17-23.
15. Черепенников В.Б. Приближенное интегрирование одного класса функционально-дифференциальных уравнений // Асимптотические методы. Задачи механики. - Новосибирск: Наука, 1988. - С.176-183.
16. Черепенников В.Б. Аналитические решения линейных систем функционально-дифференциальных уравнений // Тезисы докл. I Международного коллоквиума по дифференциальным уравнениям. Пловдив. Болгария, 1990. - С.5.
17. Черепенников В.Б. Об аналитических решениях некоторых систем функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. - 1990. 26, №6. - С.1094-1095.
18. Черепенников В.Б. Аналитические решения некоторых систем функционально-дифференциальных уравнений // Тезисы докл. II Международного коллоквиума по дифференциальным уравнениям. - Пловдив. Болгария. 1991. - С.61.
19. Черепенников В.Б. Метод функциональных параметров в теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Тезисы докл. II Международного коллоквиума по дифференциальным уравнениям. Пловдив. Болгария, 1991. - С.62.
20. Черепенников В.Б. О разрешимости линейных систем функционально-дифференциальных уравнений в классе аналитических функций // Тезисы докл. III Северо-Кавказской региональной конференции по функционально-дифференциальным уравнениям. Махачкала, 1991. - С.174.
21. Черепенников В.Б. Оценки точности приближенных решений некоторых линейных систем дифференциальных уравнений // Тези-

сы докл. III Международного коллоквиума по дифференциальным уравнениям. Пловдив. Болгария, 1992.- С.30.

- 22 Черепенников В.Б. Разрешимость некоторых линейных систем функционально-дифференциальных уравнений в классе аналитических функций // Тезисы докл. III Международного коллоквиума по дифференциальным уравнениям. Пловдив. Болгария, 1992.- С.31.

З. Шин

Подп. в печ. 30.04.94. Формат 60x84/16. Бумага тип. Офс. печать.
Усл. печ. л. 2,56. Усл. кр.-отт. 2,56. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж
100 экз. Зак. 110 Бесплатно.

Отпечатано в Институте математики АН Украины
252601 Киев 4, ГСП, ул. Терещенковская, 3.

458591

AV 30.848

AV 30.848