ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ІВ. ФРАНКА

На правах рукопису

Паук Наталія Миронівна

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОВИМІРНОЇ СТАТИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ГІБРИДНИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ТА СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Спеціальність 05.13.16 - застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання і математичних методів у наукових дослідженнях

А в т о р е ф е р а т

дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук

ЛЬВІВ - 1994

Ав 30.849

ЛННБ України ім.В.Стефаника
00777619 (·)

Дисертацією є рукопис

Робота виконана на кафедрі прикладної математики Львівського державного університету ім. І. Франка

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор Я.Г. САВУЛА

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, М.В. Хай, кандидат фізико-математичних наук, доцент В.А. Пучка

Ведуча організація: Київський державний університет ім. Т.Г. Шевченка

Захист відбудеться "12" жовтня 1994 року о 15.00 годин на засіданні спеціалізованої ради К 04.04.05 у Львівському державному університеті ім. І. Франка (290602, м. Львів, вул. Університетська, 1, ЛДУ, ауд. 261).

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Львівського державного університету ім. І. Франка.

Автореферат розісланий "9" вересня 1994 року.

Вчений секретар
спеціалізованої ради Б.А. Остудін

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність проблеми. Серед сучасних обчислювальних методів розв'язування крайових задач математичної фізики найбільш поширеними є методи скінченних (МСЕ) та граничних елементів (МГЕ). Діапазон застосовності МСЕ, його ефективність, універсальність і порівняна легкість, з якою можуть бути враховані реальні граничні умови, надає йому значних переваг перед іншими числовими методами. Проте МГЕ є заслуговуючою на увагу альтернативою і доповненням до МСЕ та інших чисельних методів.

Суть МГЕ полягає в перетворенні вихідного диференціального рівняння в часткових похідних, що описує поведінку невідомої функції всередині і на границі області, в інтегральне рівняння, що визначає лише граничні значення, а потім відшуканні чисельного розв'язку цього рівняння. Якщо потрібно знайти значення невідомих функцій у внутрішніх точках області, то їх можна обчислити, використовуючи відомі розв'язки на границі. Оскільки всі зумовлені чисельними розрахунками наближення пов'язані лише з границею, розмірність задачі зменшується на одиницю і одержана система рівнянь виявляється меншою у порівнянні з вихідною системою диференціальних рівнянь.

В останній час появилась велика кількість робіт, в яких розглядаються теоретичні і прикладні аспекти використання методу граничних інтегральних рівнянь і МГЕ . Відмітимо вклад таких науковців, як О.Я.Александров, С.І.Бешенков, Ю.В.Верюжський, Р.В.Гольдштейн, І.І.Дияк, Г.С.Кіт, М.І.Лазарев, Й.В.Людкевич, Ю.А.Мельніков, Б.А.Остудін, В.В.Панасюк, В.А.Пучка, В.А.Толок, А.Г.Угодчіков, Р.С.Хапко, М.В.Хай, І.М.Хуторянський.

Серед закордонних вчених слід відзначити роботи M.H.Aliabadi, P.K.Banerjee, C.A.Brebbia, R.Butterfield, T.A.Cruse, D.J.Danson, R.T.Fenner, M.Guiggiani, S.M.Holzer, G.W.Mustoe, P.Parreira, P.C.Riccardella, F.J.Rizzo, R.P.Shaw, D.J.Shippy, Y.C.Telles, S.Walker, J.O.Watson, W.L.Wendland.

Аналіз переваг і недоліків обох груп методів наводить на думку про доцільність розробки комбінованих чисельних методів. Відповідні комбіновані розв'язки часто називають гібридними розв'язками. Починаючи з роботи O.C. Zienkiewicz про "модний шлюб" ("marriage a' la mode") двох методів, велика кількість досліджень присвячена різноманітним аспектам як теорії, так і чисельної реалізації об'єднаного підходу. Слід відзначити роботи G. Beer, T. Belytschko, K.C. Chang, C.K.Choi, A. Deb, Q. Du, M. Costabel, H. Hofstetter, J. Johson, D.W. Kelly, Y.Y. Lu, H.A. Mang, G.G.W. Mustoe, R.P. Shaw, J.C.Simo,G. Swoboda, R.L. Taylor, J.O. Watson, A.I. Wanderlingh, J.L. Wearing.

Використання об'єднаного підходу у багатьох випадках є ефективнішим, ніж кожного методу зокрема. Такі задачі, як :

- взаємодія між конструкцією скінченного розміру і масивним тілом,
- взаємодія між конструкцією і рідиною, в яку вона поміщена;
- врахування локальної нелінійної поведінки конструкцій;
- теорії тріщин ;
- врахування нескінченних областей ;
- знаходження оптимальних геометричних розмірів конструкцій,

постійно привертають увагу багатьох спеціалістів (R.B. Wilson, J.R. Osias, L.A. Seitelman, O.C.Zienkiewicz,C.A. Brebbia, R. Butterfield, P. Georgiou, S. Walker, A. Wexler, R.P. Shaw), що розробили алгоритми комбінованих диференціальних та інтегральних методів.

Дана робота присвячена побудові об'єднаного підходу МГЕ та МСЕ для розв'язання двовимірної статичної задачі теорії пружності на основі комбінованої математичної моделі типу "пружне тіло - оболонка типу Тимошенка". Побудова і розв'язання комбінованих математичних моделей такого типу - один з сучасних напрямків наукових досліджень. Є ряд робіт, в яких ця проблема викладена, зокрема це праці Я.Г. Савули, І.І. Дияка, А.В. Дубовика, О.С. Коссак, P.G. Ciarlet. Необхідність у використанні таких моделей виникає при розрахунку напружено- деформованого стану конструкцій, що включають в себе масивні і тонкостінні фрагменти. У рамках таких моделей у одній частині пружного тіла використовуються співвідношення теорії пружності, а в іншій частині - теорії оболонок.

Застосування співвідношень теорії оболонок дає можливість понизити розмірність вихідних диференціальних рівнянь, прийнявши додаткові обмеження на характер деформування тонкостінних тіл, та уникнути ті труднощі обчислювального характеру, які виникають при використанні чисельних методів безпосередньо до рівнянь теорії пружності. Однак, при дослідженні оболонок одержуються неадекватні результати у зонах крайових впливів, концентрації напружень та їх локальної зміни. Подолати вище вказані недоліки дозволяє використання комбінованих математичних моделей.

Ключовим для таких моделей є питання спряження фрагментів конструкцій, що описуються різними теоріями. Скінченноелементні дослідження з'єднання конструкцій потребують задання умов зв'язку на переміщеннях у вузлах спряження. Найбільш розповсюдженими є наступні алгоритми: метод виключення, метод Лагранжових множників, метод штрафних функцій і метод комбінованих розв'язків.

У праці С.А. Капустіна, А.М. Паутова, Д.М. Шуваєва питання про спряження фрагментів, що описується різними теоріями, розв'язується шляхом введення спеціальних умов спряження. Ці співвідношення представляють собою умови нерозривності переміщень і умови статичної рівноваги на поверхні спряження фрагментів. При такому підході комбінована модель може бути записана у вигляді замкнутої системи диференціальних рівнянь з деякими граничними умовами на границі області і умовами спряження на поверхні спряження.

Я.Г. Савулою була запропонована крайова задача для комбінованої математичної моделі типу "пружне тіло - оболонка типу Тимошенка". У працях Я.Г.Савули і А.В.Дубовика був побудований і досліджений функціонал потенціальної енергії зі штрафом, мінімізація якого еквівалентна розв'язку крайової задачі для комбінованої моделі. На основі чисельних схем МСЕ розв'язані задачі статики тонкостінних просторових конструкцій. У роботі О.С. Коссак побудований варіант комбінованої моделі для дослідження частот і форм вільних коливань складових тіл обертання.

Виходячи з вище сказаного, можна стверджувати, що проблема побудови гібридних розв'язків на основі поєднання МГЕ і МСЕ є актуальною задачею.

Мета даної роботи полягала у :

- розробці нового ефективного підходу для чисельного розв'язання двовимірних статичних задач теорії пружності на основі застосування комбінованої математичної моделі типу "пружне тіло - оболонка типу Тимошенка" і чисельної схеми гібридного методу граничних та скінченних елементів ;

- чисельній реалізації запропонованого підходу і створенні на його основі програмного комплексу, що дозвояє проводити дослідження напружено- деформованого стану інженерних конструкцій.

Наукова новизна. У дисертаційній роботі розвинуто новий оригінальний підхід для дослідження двовимірних статичних задач теорії пружності. Такий підхід реалізованний на основі застосування об'єднаної схеми гранично-скінченно-елементних апроксимацій.

Відповідно до цього у дисертаційній роботі :

- записані співвідношення крайової задачі для комбінованої моделі типу "пружне тіло - оболонка типу Тимошенка";
- побудовані і досліджені функціонали комбінованої моделі без штрафу і зі штрафом; одержані рівняння Ейлера відповідних функціоналів;
- для випадку плоскої деформації двовимірного пружного тіла, спряженого з пластиною типу Тимошенка, доведена додатня визначеність оператора комбінованої моделі без штрафу і зі штрафом, а також збіжність розв'язку задачі зі штрафом до розв'язку комбінованої моделі без штрафу;
- побудована схема поєднання методу граничних елементів і методу скінченних елеметів; реалізовано умови пружного спряження комбінованої моделі;
- запропонований алгоритм реалізований у вигляді комплексу прикладних програм для ПЕОМ, на ряді задач досліджені питання точності та межі застосовності побудованої схеми гібридного методу граничних і скінченних елементів, дані практичні рекомендації по використанню комбінованої моделі до розрахунку інженерних конструкцій.

Достовірність наукових результатів забезпечується математичним обгрунтуванням запропонованого підходу; доведенням наведених теорем; порівнянням одержаних розв'язків для тестових задач з аналітичними розв'язками; аналізом наближених розв'язків, одержаних на різних сітках розбиття; співставленням результатами, одержаними на основі використання інших математичних моделей та методів, а також дослідженнями інших авторів.

Практична цінність роботи полягає в розробці та реалізації на ПЕОМ ефективного підходу на основі об'єднання МГЕ і МСЕ для дослідження напружено-деформованого стану інженерних конструкцій.

Дисертація виконана в рамках планів наукових досліджень, держбюджетної тематики кафедри прикладної математики Львівського університету ім. Ів. Франка, а саме: республіканської комплексної науково-технічної програми "Розробка схем, алгоритмів і пакетів програм для розв'язування початково- крайових задач математичної фізики на основі комбінованих методів граничних і скінченних елементів", затвердженої постановою Міністерства Освіти України № 68 від 31.03.92 р.

Можливе впровадження програмного комплексу на Запоріжському ВО "Перетворювач", Інституті зварки АНУ та інших проектно-конструкторських організаціях.

Апробація роботи . Результати роботи доповідались на : II Всесоюзній конференції "Нові підходи до розв'язку диференціальних рівнянь" (Дрогобич, 1989 р.); Міжреспубліканській науково- практичній конференції творчої молоді "Актуальні проблеми інформатики: математичне, програмне і інформаційне забезпечення" (Мінськ, 1992 р.) ; Республіканській науково-методичній конференції, присвяченій 200-літтю з дня народження М.І.Лобачевського (Одеса, 1992 р.); Українській міжнародній конференції "Моделювання і дослідження стійкості систем" (Київ, 1993 р.).

Дисертаційна робота в цілому обговорювалася на науковому семінарі кафедри прикладної математики Львівського університету ім. Ів. Франка та Технічного Університету Відня.

Публікації. Основний зміст дисертаційної роботи відображено у 8 статтях і тезах доповідей конференцій.

Структура та об'єм роботи.

Дисертаційна робота включає вступ, три розділи, загальні висновки. Вона містить 135 сторінок тексту, в тому числі 24 рисунки, 6 таблиць і бібліографічний список, що складається з 152 найменувань літературних джерел.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі коротко характеризується сучасний стан проблем розв'язку крайових задач математичної фізики, подано огляд праць за темою дисертації, обґрунтовується актуальність вибраної теми. Викладені основні результати, що виносяться на захист. Подана аннотація дисертації по розділах.

<u>У першому розділі</u> сформульовані постановки задач комбінованої математичної моделі типу "пружне тіло - оболонка типу Тимошенка". Розглядається задача про плоску деформацію пружного тіла, поперечний переріз якого займає область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (Рис.1), яка складається з двох частин $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, де Ω_1 - довільна двовимірна область з Ліпшицевою границею $\Gamma_1 = \bigcup_{l=1}^{4} \Gamma_1^{(l)}$, а Ω_2 - область, що в ортогональних криволінійних координатах α_1, α_3 має вигляд $\Omega_2 = \left\{ \alpha_1, \alpha_3 : \alpha_1^{o} \le \alpha_1 \le \alpha_1^{e}, -\frac{h}{2} \le \alpha_3 \le \frac{h}{2} \right\}$. Тоді крайова задача запропонованої комбінованої моделі включає в себе наступні співвідношення:

- лінійної двовимірної теорії пружності, що діють в області Ω_1

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_j^{(1)}}{\partial x_j \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial x_j \partial x_j} + \varphi_i^{(1)} = 0 , \quad i,j = 1,2. \qquad (1)$$

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\,\delta_{ij}\,\varepsilon_{kk}^{(1)} + 2\mu\,\varepsilon_{ij}^{(1)} , \quad i,j,k = 1,2 , \qquad (2)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i} \right). \quad i,j = 1,2. \qquad (3)$$

Тут $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}$ - переміщення точок тіла в декартовій системі координат x_1, x_2; $\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}$ - густини масових сил; λ і μ - сталі Ламе, що пов'язані з модулем Юнга E і коефіцієнтом Пуассона ν співвідношеннями $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$. $\sigma_{ij}^{(1)}$ і $\varepsilon_{ij}^{(1)}$ - компоненти тензорів напружень і деформацій; δ_{ij} - символ Кронекера.

- співвідношення теорії оболонок та плоских криволінійних стрижнів типу Тимошенка, що діють в області Ω_2

$$\frac{B}{A_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{d^2 u_1^{(2)}}{d\alpha_1^{\,2}} + K_1 \frac{dw^{(2)}}{d\alpha_1} \right) + G\,K_1\left(-K\,u_1^{(2)} + \frac{1}{A_1}\frac{dw^{(2)}}{d\alpha_1} + \gamma_1^{(2)} \right) + p_1^{(2)} = 0,$$

$$\frac{G}{A_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{d^2 w^{(2)}}{d\alpha_1^{\,2}} - K_1 \frac{du_1^{(2)}}{d\alpha_1} + \frac{d\gamma_1^{(2)}}{d\alpha_1} \right) - B\,K_1\left(\frac{1}{A_1}\frac{du_1^{(2)}}{d\alpha_1} + K_1 w^{(2)} \right) + p_n^{(2)} = 0,$$

$$\frac{D}{A_1}\,\frac{1}{A_1}\,\frac{d^2\gamma_1^{(2)}}{d\alpha_1^{\,2}} - G\left(-K_1 u_1^{(2)} + \frac{1}{A_1}\frac{dw^{(2)}}{d\alpha_1} + \gamma_1^{(2)} \right) + m_1^{(2)} = 0. \qquad (4)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}\frac{du_1^{(2)}}{d\alpha_1} + K_1 w^{(2)}, \qquad \varepsilon_{13} = -K_1 u_1^{(2)} + \frac{1}{A_1}\frac{dw^{(2)}}{d\alpha_1} + \gamma_1^{(2)},$$

$$\varkappa_1 = \frac{1}{A_1}\frac{d\gamma_1^{(2)}}{d\alpha_1}; \qquad (5)$$

$$T_1^{(2)} = B\,\varepsilon_1, \quad Q_1^{(2)} = G\,\varepsilon_{13}, \quad M_1^{(2)} = D\,\varkappa_1. \qquad (6)$$

$$\sigma_{11} = \frac{1}{h}\left[T_1^{(2)} + \alpha_3 \frac{12M_1^{(2)}}{h^2} \right], \quad \sigma_{13} = \frac{Q_1^{(2)}}{hK'} = \frac{6Q_1^{(2)}}{5h}. \qquad (7)$$

Тут A_1, K_1 - коефіцієнт Ляме і головна кривина оболонки; B, G, D - константи, що характеризують пружні властивості оболонки

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad G = K'G'h, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

для ізотропних оболонок $G' = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $K' = \frac{5}{6}$;
$p_1^{(2)}, p_n^{(2)}, m_1^{(2)}$ - густини приведених зовнішніх сил і моменту, які виражаються через густину масових та поверхневих сил.
- граничні умови

$$\sigma_{\nu\nu}^{(1)} = \bar{p}_\nu^{(1)}, \quad \sigma_{\nu\tau}^{(1)} = \bar{p}_\tau^{(1)}, \quad x_1, x_2 \in \Gamma_1^{(1)}, \qquad (8)$$

$$u_\nu^{(1)} = \bar{u}_\nu^{(1)}, \quad u_\tau^{(1)} = \bar{u}_\tau^{(1)}, \quad x_1, x_2 \in \Gamma_1^{(2)}, \qquad (9)$$

$$u_\nu^{(1)} = \bar{u}_\nu^{(1)}, \quad x_1, x_2 \in \Gamma_1^{(3)}, \qquad (10)$$

$$\sigma_{\nu\tau}^{(1)} = \bar{p}_\tau^{(1)}, \quad x_1, x_2 \in \Gamma_1^{(3)}. \qquad (11)$$

Тут $u_\nu^{(1)}$, $u_\tau^{(1)}$ - нормальне і дотичне переміщення; $\sigma_{\nu\nu}^{(1)}$, $\sigma_{\nu\tau}^{(1)}$ - нормальне і дотичне напруження; $\bar{u}_\nu^{(1)}$, $\bar{u}_\tau^{(1)}$, $\bar{p}_\nu^{(1)}$, $\bar{p}_\tau^{(1)}$ - складові переміщень і зовнішніх сил, заданих на границі з зовнішньою нормаллю $\bar{\nu}$ і по заданому напрямку $\bar{\tau}$. Складові переміщень і напружень визначаються за формулами $u_\nu^{(1)} = u_i^{(1)}\nu_i = u_1^{(1)}\nu_1 + u_2^{(1)}\nu_2$, $u_\tau^{(1)} = u_i^{(1)}\tau_i = -u_1^{(1)}\nu_2 + u_2^{(1)}\nu_1$, $\sigma_{\nu\nu}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(1)}\nu_i\nu_j = \sigma_{11}^{(1)}\nu_1^2 + \sigma_{22}^{(1)}\nu_2^2 + 2\sigma_{12}^{(1)}\nu_1\nu_2$, $\sigma_{\nu\tau}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(1)}\nu_i\tau_j = \sigma_{12}^{(1)}(\nu_1^2 - \nu_2^2) + (\sigma_{22}^{(1)} - \sigma_{11}^{(1)})\,\nu_1\nu_2$,
де $\nu_i = \cos(x_i, \nu)$, $\tau_i = \cos(x_i, \tau)$, $i=1,2$ - напрямні косинуси вектора нормалі $\bar{\nu}$ і вектора дотичної $\bar{\tau}$ ($\tau_1 = -\nu_2$, $\tau_2 = \nu_1$).

Нехай на краю оболонки $\alpha_1 = \alpha_1^*$ задаються граничні умови одного з типів : жорстке защемлення $u_1^{(2)} = w^{(2)} = \gamma_1^{(2)} = 0$; шарнірно опертий край $u_1^{(2)} = w^{(2)} = 0$, $M_1^{(2)} = 0$; вільний край $Q_1^{(2)} = M_1^{(2)} = T_1^{(2)} = 0$; симетрія $u_1^{(2)} = \gamma_1^{(2)} = 0$, $Q_1^{(2)} = 0$. (12)

- граничні умови спряження на частині границі $\Gamma_1^{(4)} = (\alpha_1 = \alpha_1^{\circ}$, $-\frac{h}{2} \le \alpha_3 \le \frac{h}{2}$)

$$u_{\nu}^{(1)} = u_1^{(2)}(\alpha_1^{\circ}) + \alpha_3\gamma_1^{(2)}(\alpha_1^{\circ}), \qquad u_{\tau}^{(1)} = w_1^{(2)}(\alpha_1^{\circ}), \tag{13}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\nu\nu}^{(1)}\, d\alpha_3 = T_1^{(2)}(\alpha_1^{\circ}), \quad \int_{-h/2}^{-h/2} \sigma_{\nu\nu}^{(1)}\, \alpha_3 d\alpha_3 = M_1^{(2)}(\alpha_1^{\circ}),$$

$$\int_{-h/2}^{-h/2} \sigma_{\nu\tau}^{(1)}\, d\alpha_3 = Q_1^{(2)}(\alpha_1^{\circ}) . \tag{14}$$

Сформульовані варіаційні постановки крайової задачі, що полягають у мінімізації функціоналу повної потенціальної енергії

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left\{\lambda\left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right)^2 + 2\mu\left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_1} \right)^2 + 2\mu\left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_2} \right)^2 + \mu\left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} \right)^2 \right\} d\Omega_1 + \frac{1}{2}\int_{\alpha^{\circ}}^{\alpha_1^*} \left\{ B\left(\frac{1}{A_1}\frac{du_1^{(2)}}{d\alpha_1} + K_1 w^{(2)} \right)^2 + G\left(\frac{1}{A_1}\frac{dw^{(2)}}{d\alpha_1} + \gamma_1^{(2)} - K_1 u_1^{(2)} \right)^2 + \frac{D}{A_1^2}\left(\frac{d\gamma_1^{(2)}}{d\alpha_1} \right)^2 \right\} A_1 d\alpha_1 - \int_{\Omega} \left\{ \varphi_1^{(1)} u_1^{(1)} + \varphi_2^{(1)} u_2^{(1)} \right\} d\Omega_1 - \int_{\alpha_1^{\circ}}^{\alpha_1^*} \left(p_1^{(2)} u_1^{(2)} + p_2^{(2)} w^{(2)} + m_1^{(2)} \gamma_1^{(2)} \right) A_1 d\alpha_1 . \tag{15}$$

Мінімізація функціоналу (15) здійснюється на множині функцій

$$u \in V_0 = \left\{ u = (u^{(1)}, u^{(2)})^T,\ u^{(1)} = (u_1^{(1)}, u_2^{(1)})^T,\ u^{(2)} = (u_1^{(2)}, w^{(2)}, \gamma_1^{(2)})^T,\ u^{(1)} \in \left[W_2^{(1)}(\Omega_1) \right]^2,\ u^{(2)} \in \left[W_2^{(1)}(\Omega_2) \right]^3 \right\},$$

що задовільняють кінематичні граничні умови (9),(10),(12) і кінематичні умови спряження (13).

Задача мінімізації функціоналу потенціальної енергії (15) пов'язана зі значними труднощами обчислювального характеру.

викликаними необхідністю врахування обмеження (13) на множині достатньо гладких функцій. Тому розглядалась ще одна варіаційна постановка крайової задачі зі штрафом, яка не потребує врахування головних граничних умов спряження (13). Для цієї задачі функціонал зі штрафом

$$F_\varepsilon(u) = F(u) + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{-h/2}^{h/2} \left\{\left[u_\tau^{(1)}(\alpha_3) - w_1^{(2)}(\alpha_1^\circ)\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[u_\nu^{(1)}(\alpha_3) - u_1^{(2)}(\alpha_1^\circ) - \alpha_3\gamma_1^{(2)}(\alpha_1^\circ)\right]^2\right\} d\alpha_3 , \qquad (16)$$

визначений на множині функцій $u \in V_0$, що задовільняють лише головні граничні умови (9),(10),(12). Позначимо цей простір функцій через V.

Для функціоналів (15),(16) одержані рівняння Ейлера. На основі аналізу цих рівнянь показано, що крайова задача для комбінованої моделі еквівалентна задачі мінімізації функціоналу без штрафу безумовно, а функціоналу зі штрафом при додатковій умові прямування до нуля параметра штрафа ε.

Мають місце наступні теореми.

Теорема 1. Білінійна форма $A_\varepsilon(u,u)$ задовольняє подвійну нерівність $m^2 \|u\|^2_{1,\Omega} \le A_\varepsilon(u,u) \le M^2_\varepsilon \|u\|^2_{1,\Omega}$, $\forall u \in V$. Тут

$$\|u\|^2_{1,\Omega} = \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{2}\left[u_i^{(1)}\right]^2 + \sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j}\right)^2\right] d\Omega_1 +$$

$$+ \int\limits_{\alpha^\circ}^{\alpha_1^\bullet}\left[u_1^{(2)2} + w^{(2)2} + \gamma_1^{(2)2} + \left[u_1'^{(2)}\right]^2 + \left[w'^{(2)}\right]^2 + \left[\gamma_1'^{(2)}\right]^2\right] d\alpha_1 .$$

Наслідок. З доведеної теореми 1 випливає, оскільки $\|u\|^2_{1,\Omega} \ge \|u\|^2_{0,\Omega}$, то оператор комбінованої математичної моделі зі штрафом додатно визначений, тобто $A_\varepsilon(u,u) \ge m^2 \|u\|^2_{0,\Omega}$, де

$$\|u\|^2_{0,\Omega} = \int_{\Omega_1}\sum_{i=1}^{2} u_i^{(1)2}\, d\Omega_1 + \int\limits_{\alpha_1^\circ}^{\alpha_1^\bullet}\left[u_1^{(2)2} + w^{(2)2} + \gamma_1^{(2)}\right] d\alpha_1 .$$

Теорема 2. Нехай $e^\varepsilon = u^\varepsilon - u^*$. Послідовність u^ε збігається при $\varepsilon \to 0$ до узагальненого розв'язку u^*, тобто $\|e^\varepsilon\|_{1,\Omega} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

Другий розділ присвячений розробці алгоритму комбінованого підходу на основі прямого методу граничних елементів та методу скінченних елементів до розглянутої комбінованої моделі. Він містить виклад чисельної схеми ПМГЕ стосовно до двовимірних статичних задач теорії пружності. Записані фундаментальні розв'язки для переміщень, деформацій та напружень. На основі теореми взаємності співвідношення крайової задачі теорії пружності зводяться до граничного інтегрального рівняння. Приведені основні співвідношення для знаходження шуканих функцій переміщень, деформацій та напружень на границі області та в довільній внутрішній точці. На основі методу Бубнова-Гальоркіна записана дискретна постановка задачі.

Розглянута повна всестороння схема обчислення сильно і слабо сингулярних інтегралів, що передбачає використання лише стандартних квадратурних формул Гауса. Методику обчислення сингулярних інтегралів апробовано на тестових прикладах.

У другому розділі приведена також схема МСЕ для розв'язання варіаційної задачі теорії оболонок типу Тимошенка. В матричному вигляді записані співвідношення для обчислення елементів матриці жорсткості і мас.

Особлива увага приділена реалізації умов пружного спряження комбінованої моделі на основі об'єднаної схеми гранично-скінченно-елементних апроксимацій. Цей підхід передбачає розв'язання СЛАР зі спеціальними правими частинами. Результуючий розв'язок одержується при розв'язанні додаткової матриці зв'язку, сформованої так, щоб врахувати кінематичні і статичні умови на границі спряження.

У третьому розділі описані основні характеристики програмного комплексу і можливості програмних модулів. Програмне забезпечення написано на мові Фортран 77 для ПЕОМ типу IBM PC/AT.

Апробація запропонованої комбінованої моделі проводилась на ряді тестових задач, а саме: задача про плоску деформацію нескінченного циліндра, шару з косозрізаним краем, пластини ступінчатої товщини. Для ілюстрації одержаних результатів подано численні таблиці та графіки. Вироблено практичні рекомендації щодо застосування запропонованого підходу для реальних технічних задач.

Досліджено напружено-деформований стан циліндричної оболонки-перекриття кругового перерізу, що містить масивне ребро (Рис.2). На основі приведених результатів можна судити про ефективність і перспективність застосування запропонованого комбінованого підходу до моделювання широкого класу інженерних задач.

В загальних висновках сформульовані основні результати та підсумкові зауваження.

1. На основі співвідношень лінійної двовимірної теорії пружності і теорії оболонок типу Тимошенка, записана постановка задачі, граничні умови та умови пружного спряження для комбінованої математичної моделі. Побудовані функціонали потенціальної енергії без штрафа і зі штрафом. Одержані рівняння Ейлера відповідних функціоналів. Показано еквівалентність крайових та варіаційних задач.
2. Досліджені питання існування і збіжності розв'язків за комбінованою моделлю. Доведено додатню визначеність оператора комбінованої моделі зі штрафом і без штрафа, а також збіжність розв'язку комбінованої моделі з штрафом до розв'язку комбінованої моделі без штрафа при параметрі штрафа, що прямує до нуля.
3. Подана чисельна схема прямого варіанту методу граничних елементів у постановці Бубнова-Гальоркіна, що використовується для розв'язання пружностатичної задачі. Кількість точок Гауса, необхідних для досягнення достатньої точності обчислень, встановлена експериментально в процесі розрахунку. Апробована спеціальна методика обчислення сильно і слабо сингулярних інтегралів результуючої системи граничних інтегральних рівнянь.
4. Алгоритм об'єднаної схеми гранично-скінченно-елементних апроксимацій базується на формуванні додаткової матриці зв'язку, записаної для спільної границі обох фрагментів. Для обчислення елементів цієї матриці використовують розв'язки послідовності базових задач, які сформульовані спеціальним чином та задовільняють кінематичні і статичні умови спряження.
5. Запропонований комбінований підхід реалізований у вигляді комплексу програм для ПЕОМ типу IBM PC/AT. На основі використання розглянутої комбінованої моделі, а також математичних моделей для рівнянь теорії пружності при використанні МГЕ та МСЕ, для рівнянь теорії оболонок типу

Тимошенка (МСЕ), проведено аналіз розв'язків тестових задач. Розроблено практичні рекомендації щодо використання цього підходу до розрахунку напружено-деформованого стану інженерних конструкцій.

6. Досліджено НДС циліндричної оболонки-перекриття кругового перерізу, що містить масивне ребро. Результати числового експерименту підтверджують ефективність і перспективність використання запропонованого комбінованого підходу для моделювання широкого класу інженерних задач.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ ОПУБЛІКОВАНІ В НАСТУПНИХ ПРАЦЯХ АВТОРА :

1. Дияк І.І., Паук Н.М. Використання методів граничних і скінченних елементів для чисельного дослідження комбінованої математичної моделі теорії пружності // Моделювання і дослідження стійкості систем: Тези допов. на україн. конфер.- Київ, 1993, ч. 1, с. 46.
2. Дияк І.І., Паук Н.М. Чисельне дослідження плоскої задачі теорії пружності методом граничних елементів // Матем. методи і фіз.-механ. поля. - Львів, вип. 38, 1993. (подано до друку)
3. Дубовик А.В., Дияк И.И., Паук Н.М., Савула Я.Г. Численное исследование комбинированной математической модели плоской задачи теории упругости. - Львов, 1988. - 42 с. - Деп. в УкрНИИНТИ 10.10.88, № 2573 - Ук88.
4. Дубовик А.В., Дияк И.И., Паук Н.М., Савула Я.Г. Комбинация методов штрафа и конечных элементов для численного решения кревых задач комбинированной математической модели плоской теории упругости // Новые подходы к решению дифференциальных уравнений: Тез. докл.II Всесоюзн. конф.- Дрогобыч, 1989, с.62
5. Паук Н.М. Застосування об'єднаного гранично-скінченно-елементного аналізу для чисельного розв'язування двовимірної задачі теорії пружності // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикл. методи і моделі. - 1993. (подано до друку)
6. Паук Н.М. Комбинация методов граничных и конечных элементов для численного решения кревых задач комбинированной математической модели плоской теории упругости // Актуальные проблемы информатики : математическое, программное и информационное

обеспечение : Тез. докл. межреспубл. научно-практич. конф. творческой молод. - Минск: Белгосуниверситет, 1992, - 124 с..

7. Савула Я.Г., Дияк І.І., Паук Н.М. Чисельний аналіз комбінованих математичних моделей методами граничних і скінченних елементів // Тез. допов. республ. науково-методичної конф., присв. 200-літтю з дня народження Лобачевського М.І. - Одеса, 1992, ч. 2, с.37.
8. Савула Я.Г., Дубовик А.В., Паук Н.М. Крайова і варіаційна задачі зі штрафом комбінованої моделі плоскої теорії пружності // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. - 1990, вип. 33, с.3-9

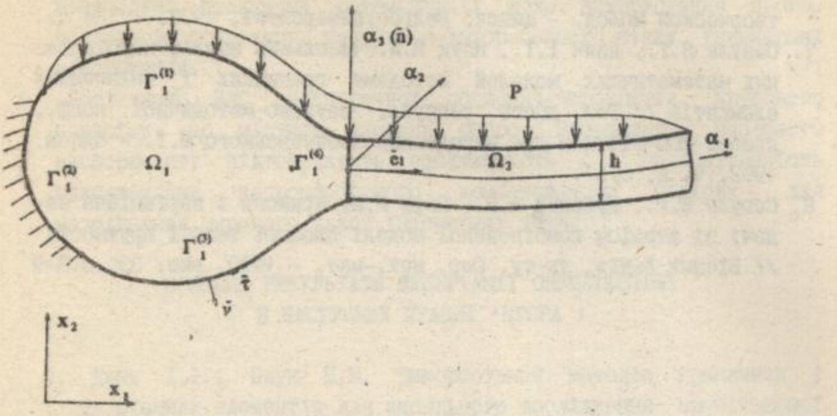

Рис. 1.

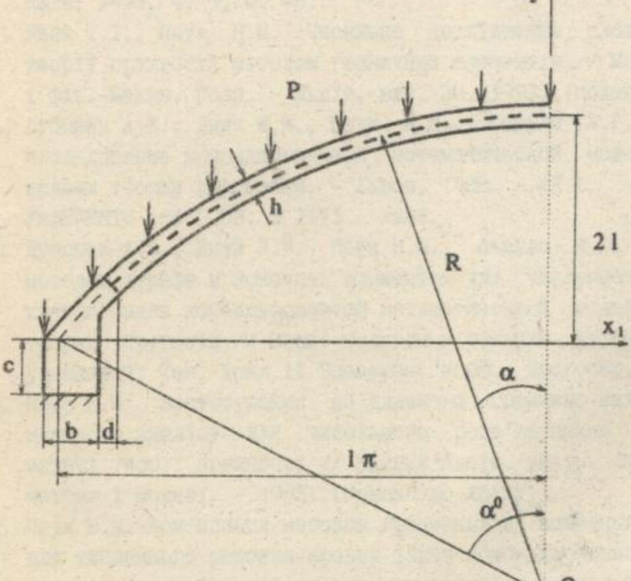

Рис. 2.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

Підписано до друку 25.09.94. Формат паперу 60x84 I/I6.
Папір газетний. Друк офсетний. Безкоштовно.
Друкарських листів I. Зам. 621. Тираж 100.

Ротапринт Львівського ЦНТІ. Вул. 700-річчя Львова, 57.

Безкоштовно

Ав 30.849