

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

на правах рукописи

Кирияцкий Эдуард Григорьевич

МНОГОЛИСТНЫЕ ФУНКЦИИ И
РАЗДЕЛЕННЫЕ РАЗНОСТИ

01.01.01.—математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Донецк—1994

АВ 30.852

Работа выполнена на кафедре математики
Вильнюсского технического университета

Официальные оппоненты:

- доктор физ.-мат.наук, профессор Хавинсон С.Я.
- доктор физ.-мат.наук, профессор Зверович Э.И.
- доктор физ.-мат.наук, профессор Белый В.И.

Ведущая организация:

Львовский государственный университет

Защита состоится 26 октября 1994г. в 15 часов
на заседании специализированного Совета
Д 06.01.01. по присуждению ученой степени
доктора физико-математических наук в Институ-
те прикладной математики и механики НАН
Украины по адресу:

34114, г.Донецк, ул.Розы Люксембург, 74.

С диссертацией можно ознакомиться в библиоте-
ке ИПММ НАН Украины.

Автореферат разослан 18 сентября 1994г.

Ученый секретарь специализированного Совета
канд.физ.-мат.наук А.И. Марковский

ЛНБ України ім.В.Стефаніка



00777622 (V)

ЛНБ України ім. В. Стефаніка
АН України

Диссертация «Многолистные функции и разделенные разности» в основном посвящена исследованию различных классов аналитических многолистных в области D функций $F(z)$, выделяемых с помощью разного рода условий, налагаемых на n -ю разделенную разность $[F(z); z_0, \dots, z_n]$.

Одно из многих представлений n -й разделенной разности имеет вид

$$[F(z); z_0, \dots, z_n] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(\xi) d\xi}{(\xi - z_0) \dots (\xi - z_n)},$$

где Γ - простой замкнутый контур, лежащий в области D и охватывающий все точки $z_0, \dots, z_n \in D$.

Если $n = 0$, то имеем дело с интегралом Коши. Если $z_0 = \dots = z_n$, то получим выражение для n -й производной функции. Это означает, что n -я разделенная разность в некотором смысле является обобщенным аналогом интеграла Коши, а также n -й производной.

Имеется много разделов в современной математике, в которых использование разделенных разностей является необходимым и полезным делом. Достаточно упомянуть теорию интерполирования и аппроксимации функций, имеющую важное значение как внутри самой математики, так и в ее приложениях. Можно сослаться на многих ученых, использовавших разделенные разности для решения целого ряда проблем, возникающих в различных областях математики, например, в теории функций комплексного переменного. Отметим, в частности, известные монографии А.О.Гельфонда, В.А.Гончарова, И.И.Ибрагимова, П.М.Тамразова, Д.Л.Уолша.

Однако несмотря на большое количество работ, в которых требовалось присутствие разделенных разностей, она сама почти не выступала в роли самостоятельного объекта исследования. К области D , точкам $z_0, \dots, z_n \in D$ и $F(z)$ функции предъявлялись, как правило,

лишь те требования, которые обеспечивали существование самой разделенной разности и давали возможность воспользоваться одним из многих ее представлений.

Предположим, что функция $F(z)$ аналитична в области D и уравнение $a + F(z) = 0$ имеет в D не более одного корня при любом комплексном a . Такая функция обладает тем свойством, что $F(z_0) \neq F(z_1)$ при любых различных $z_0, z_1 \in D$ и называется однолистной в области D . Назовем аналитическую в области D функцию $F(z)$ n -листной в D , если уравнение $a + F(z) = 0$ имеет при некотором a ровно n попарно различных корней в D , а при остальных значениях a оно имеет в D не более n корней.

Пусть теперь аналитическая в области D функция $F(z)$ такова, что уравнение $P_{n-1}(z) + F(z) = 0$ имеет в D не более n корней для любого многочлена $P_{n-1}(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$. Что тогда можно сказать о функции $F(z)$? Оказывается, для того чтобы это уравнение имело в D не более n корней для любого многочлена степени не выше $n-1$ необходимо и достаточно, чтобы $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$ при любых попарно различных $z_0, \dots, z_n \in D$.

Таким образом, одним из качественно новых условий, налагаемых на n -ю разделенную разность, является условие $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$ при любых попарно различных $z_0, \dots, z_n \in D$.

Класс аналитических в области D функций $F(z)$, для которых $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$ при любых попарно различных $z_0, \dots, z_n \in D$, обозначим через $K_n(D)$. При $n=1$ имеем класс $K_1(D)$, совпадающий с классом всех однолистных в области D функций. Класс $K_n(D)$, $n > 1$ является собственным подклассом всего класса n -листных в D функций.

Хорошо известна важная роль однолистных функций как аппарата для реализации конформных отображений. В значительной степени это объясняется знаменитой теоремой Римана о возможности взаимно однозначного отображения одной односвязной области, имеющей более одной граничной точки, на другую. Имеется достаточно большое количество монографий, в каждой из которых, как правило, указывается метод и направление в исследовании свойств однолистных функций. Отметим монографии И.А.Александрова, Г.М. Голузина, Д.Дженкинса, Н.А.Лебедева, И.М.Милина.

По многолистым функциям литература несколько беднее. Упомянем монографию В.К. Хеймана «Многолистные функции».

Общеизвестно основополагающее значение систем Чебышева в

различных вопросах интерполяции и аппроксимации. Справедливо следующее указанное мною утверждение, связывающее n -ю разделенную разность с одной из систем Чебышева: Для того чтобы $F(z) \in K_n(D)$, $n \geq 1$ необходимо и достаточно, чтобы функции $1, z, \dots, z^{n-1}, F(z)$ образовывали систему Чебышева в области D .

Мною создан новый подход к исследованию свойств многолистных /в частности, однолистных/ функций благодаря естественному переходу от разделенной разности первого порядка к разделенным разностям более высоких порядков, налагая на них разного рода условия.

Эффективно применен аппарат разделенных разностей для решения многих классических задач геометрической теории аналитических функций а также для решения новых проблем, неизбежно возникающих на стыке различных ветвей математики: исчисления разделенных разностей, теории однолистных и многолистных функций, теории чебышевских систем.

По результатам, полученным в диссертации, опубликовано несколько десятков научных статей и сделан ряд докладов на конференциях различного уровня.

Диссертация «Многолистные функции и разделенные разности» состоит из предисловия, введения, оглавления, пяти глав, каждая из которых содержит определенное количество параграфов. В конце диссертации помещен список литературы.

Дадим краткий обзор полученных в диссертации результатов.

Глава I. РАЗДЕЛЕННЫЕ РАЗНОСТИ

Глава I содержит семь параграфов и начинается с определения, основных свойств и различных представлений n -й разделенной разности. Этот материал изложен в первых трех параграфах. Он является классическим и с ним можно познакомиться также в известных монографиях Гельфонда А.О. и Гончарова В.А.

Далее, даются оценки модуля n -й разделенной разности и оценки ее действительной и мнимой частей в зависимости от условий, налагаемых на функцию $F(z)$ и расположение точек $z_0, \dots, z_n \in D$. Справедливо следующее утверждение, которое назовем теоремой переноса. Пусть $F(z)$ аналитическая в единичном круге E функция и $M(x)$ - непрерывная на промежутке $[0, 1)$ функция, имеющая на этом промежутке непрерывную n -ю производную $M^{(n)}(x)$. Если при любом $|z|=x < 1$ выполняется неравенство

$$|F^{(n)}(z)| \leq M^{(n)}(x),$$

то при любых $z_0, \dots, z_n \in E$ выполняется неравенство

$$|F(z; z_0, \dots, z_n)| \leq [M(x; r_0, \dots, r_n)], \quad (1)$$

где $|z_m| = r_m$, $m=0, \dots, n$. Пусть $F^{(n)}(z) \neq const$. Знак равенства в (1) при некоторых $z_0, \dots, z_n \in E$ имеет место тогда и только тогда, когда существуют такие постоянные вещественные α и β , что точки z_0, \dots, z_n лежат на радиусе круга E , наклоненном под углом α к вещественной оси, т.е. $z_m = r_m e^{i\alpha}$, $m=0, \dots, n$ и выполняется равенство

$$F^{(n)}(x e^{i\alpha}) = M^{(n)}(x) e^{i\beta}$$

при любом x , взятом из наименьшего отрезка, содержащего точки r_0, \dots, r_n .

Дадим одно приложение теоремы переноса. Возьмем любую однолиственную в E функцию $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Тогда

$$|f(z; z_0, \dots, z_n)| \leq \left(-1 + \sum_{m=0}^n (1 - z_m)^{-1} \right) \prod_{m=0}^n (1 - z_m)^{-1}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда все точки z_0, \dots, z_n , расположены на радиусе круга E , наклоненном под углом

α к вещественной оси, а функция $f(z)$ имеет вид $f(z) = z(1 - e^{-i\alpha}z)^{-2}$.

Решается уравнение в разделенных разностях

$$a_0 F(z) + \sum_{m=1}^n a_m [F(z); z, \zeta_1, \dots, \zeta_m] = u(z)$$

относительно функции $F(z)$, где a_0, \dots, a_n - фиксированные комплексные коэффициенты, ζ_1, \dots, ζ_n - комплексные параметры, $u(z)$ - заданная аналитическая в области D функция. Это уравнение названо линейным разделенно-разностным уравнением n -го порядка с постоянными коэффициентами. Доказано, что общее решение такого уравнения имеет вид

$$F(z) = \frac{P(z) + (z - \zeta_1) \dots (z - \zeta_n) u(z)}{a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (z - \zeta_{k+1}) \dots (z - \zeta_n)}$$

где $P(z)$ - произвольный многочлен степени не выше $n-1$.

В параграфе 7 рассматривается система аналитических и линейно независимых в области D функций $u_0(z), \dots, u_n(z)$. Связь между этой системой и разделенными разностями обнаруживается благодаря введенному определителю

$$\begin{bmatrix} [u_0(z); z_0] & \dots & [u_n(z); z_0] \\ [u_0(z); z_0, z_1] & \dots & [u_n(z); z_0, z_1] \\ \dots & \dots & \dots \\ [u_0(z); z_0, \dots, z_n] & \dots & [u_n(z); z_0, \dots, z_n] \end{bmatrix}, \quad (2)$$

который назван разделенно-разностным определителем. В случае совпадения всех точек z_0, \dots, z_n между собой, получается определитель Вронского, снабженный множителем $(1!2!\dots n!)^{-1}$. Справедлива теорема, утверждающая, что для того чтобы система функций $u_0(z), \dots, u_n(z)$ была в D чебышевской необходимо и достаточно, чтобы определитель (2) был отличен от нуля при любых попарно различных $z_0, \dots, z_n \in D$. Отметим, что, если определитель (2) не равен нулю при любых попарно различных $z_0, \dots, z_n \in D$, то он не равен нулю при любых $z_0, \dots, z_n \in D$.

Определитель (2) имеет особенно простую конструкцию, если мы имеем дело с системой функций $u_0(z) \equiv 1$, $u_1(z) = z, \dots, u_{n-1}(z) = z^{n-1}$, $u_n(z) \equiv F(z)$. В этом случае он представляет собой n -ю разделенную разность $[F(z); z_0, \dots, z_n]$ функции $F(z)$.

Глава II. КЛАСС $K_n(D)$.

Эта глава содержит 8 параграфов. В ней изучается класс $K_n(D)$ аналитических в области D функций $F(z)$, для которых $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$ при любых попарно различных $z_0, \dots, z_n \in D$. Очевидно, $K_1(D)$ представляет собой класс аналитических в области D функций $F(z)$, для которых

$$[F(z); z_0, z_1] = \frac{F(z_0) - F(z_1)}{z_0 - z_1} \neq 0, \quad z_0 \neq z_1, z_0, z_1 \in D$$

и поэтому он полностью совпадает с классом всех аналитических и однолистных в области D функций.

Основываясь на результатах из параграфа 7 главы I, можно получить многие свойства функций, принадлежащих классу $K_n(D)$, $n \geq 1$. В самом деле, как было отмечено раньше, функция $F(z)$ принадлежит классу $K_n(D)$, $n \geq 1$ тогда и только тогда, когда функции $1, z, \dots, z^{n-1}, F(z)$ образуют систему Чебышева в D .

Естественно, что многие утверждения, полученные в классе $K_1(D)$, т.е. в классе однолистных в D функций, распространяются и на классы $K_n(D)$, $n > 1$. Например, если последовательность функций $F_m(z)$, $m = 1, 2, \dots$ из класса $K_n(D)$, $n \geq 1$ равномерно сходится внутри области D к некоторой функции $F(z)$, то она принадлежит классу $K_n(D)$ или является многочленом $P(z)$ степени не выше $n - 1$ и $P(z) \notin K_n(D)$.

Другим примером может служить признак принадлежности функции $F(z)$ классу $K_n(D)$, $n \geq 1$, основанный на поведении этой функции в граничных точках области D . Пусть Γ - замкнутая гладкая кривая, ограничивающая внутри себя область D и функция $F(z)$ аналитична во всех точках замкнутой области \bar{D} . Если $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$ при любых $z_0, \dots, z_n \in \Gamma$, то $F(z) \in K_n(D)$.

Доказан ряд теорем о взаимозависимости классов $K_n(D)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ с различными номерами. Такие теоремы названы теоремами понижения. Одна из них гласит, что если $P_n(z)\varphi(z) \in K_n(D)$, где $P_n(z)$ - многочлен степени $n \geq 1$ и $\varphi(z)$ - аналитическая в области D функция и если $P_n(z) = P_m(z)Q_{n-m}(z)$, где $P_m(z)$, $Q_{n-m}(z)$ - многочлены соответственно степеней m , $n - m$, то функция

$$P_m(z)[Q_{n-m}(z)\varphi(z); z, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-m}] \in K_m(D)$$

для любых параметров $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-m} \in D$.

Из этой теоремы легко получается следующее утверждение: Если $P_n(z)\varphi(z) \in K_n(D)$, $n \geq 1$ и все корни многочлена $P_n(z)$ лежат в области D , то для любого многочлена $P_m(z)$, являющегося делителем многочлена $P_n(z)$, справедливо соотношение $P_m(z)\varphi(z) \in K_m(D)$.

Отсюда следует признак однолистности. Если $f(z)$ - аналитическая в области D функция и $P_{n-1}(z)f(z) \in K_n(D)$, $n \geq 1$, то $f(z) \in K_1(D)$.

Заметим, что признак принадлежности классу $K_n(D)$, $n \geq 2$ часто влечет за собой признак однолистности. Таким образом было найдено целое семейство многочленов, однолистных в угловой области $D(2\pi/k)$, $k \geq 1$, т.е. в области, ограниченной сторонами угла с вершиной в начале координат и раствора, равного $2\pi/k$. Именно, многочлен

$$P_k(z) = \sum_{m=0}^k [z^{n+m}; z_0, \dots, z_n] z^{k-m} \quad (3)$$

является однолистной функцией в угловой области $D(2\pi/k)$ при любых фиксированных $z_0, \dots, z_n \in D(2\pi/k)$. Раствор угла увеличить нельзя, так как в противном случае можно указать многочлен вида (3), который не будет однолистной функцией в расширенной области.

Показано также, что

$$\frac{1}{z^k} \in K_n(D(2\pi/k)), \quad n, k = 1, 2, 3, \dots$$

Последнее утверждение дает полную информацию о распределении корней неполного многочлена вида

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^{n+k}, \quad k \geq 1. \quad (4)$$

Именно, любой многочлен вида (4) имеет не более n корней в угловой области $D(2\pi/(k+1))$. Раствор угла увеличить нельзя.

С увеличением номера n класса $K_n(D)$ появляется возможность выявить некоторые предельные свойства функций, взятых из классов с различными номерами. Имеет место следующая предельная теорема.

Пусть $f(z)$ - аналитическая в области D функция, $P_n(z)$ - многоч-

лен степени n с корнями, лежащими в D . Пусть также

$$F_n(z) = P_{n-1}(z)f(z) \in K_n(D), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

и множество корней всех многочленов $P_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$ не имеет предельных точек на границе области D . Тогда $f(z) = (az+b) \prod_n (cz+d)$.

Заметим, что если отбросить требование отсутствия на границе области D предельных точек множества корней многочленов $P_n(z)$, $n = 1, 2, \dots$ то сформулированное выше утверждение становится, вообще говоря, неверным. По этому поводу приводится следующий пример. Пусть E - круг $|z| < 1$ и

$$P_n(z) = \left(z + \frac{n(a-1)-2}{n(a+1)+2} \right)^n, \quad f(z) = \frac{z(1-a^{-1}z)}{(1-z)^2}, \quad a > 1.$$

Тогда можно показать, что условие (5) выполняется, однако функция $f(z)$ не является дробно-линейной.

В заключение обзора главы II отметим следующий факт: Если $F(z) \in K_n(D)$, то $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$ при любых $z_0, \dots, z_n \in D$. В частности, если $F(z) \in K_n(D)$, то $F^{(n)}(z) \neq 0$ в D . Обратно, если $n \geq 1$ и $F^{(n)}(z) \neq 0$ в D , то функция $F(z)$ принадлежит классу K_n локально в D , т.е. для любой точки $\zeta \in D$ найдется такая ее окрестность $0(\zeta)$, что $F(z) \in K_n(0(\zeta))$.

Глава III. КЛАССЫ ФУНКЦИЙ С ОТЛИЧНОЙ ОТ НУЛЯ n-й РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТЬЮ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ.

В этой главе рассматриваются свойства функций из определяемых ниже классов $K_n(E)$, $\tilde{K}_n(E)$, $\tilde{K}_{n,p}(E)$, $\tilde{K}_n^r(E)$, $\tilde{R}_{n,p}(E)$, $\tilde{T}_n^r(E)$.

$K_n(E)$ - класс аналитических в единичном круге E функций, для которых $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$ при любых попарно различных $z_0, \dots, z_n \in E$.

Аналитическая в E функция $F(z)$ называется n -нормированной в E , если ее разложение в ряд Маклорена имеет вид

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n} z^{n+k-1}.$$

$\tilde{K}_n(E)$ - подкласс класса $K_n(E)$, состоящий из n -нормированных в E функций.

$\tilde{K}_n^r(E)$ - подкласс класса $\tilde{K}_n(E)$, состоящий из функций, у которых все коэффициенты разложения являются вещественными числами.

$\tilde{K}_{n,p}(E)$ - класс n -нормированных в E функций $F(z)$, для которых одновременно выполняются условия

$$F(z) \in \tilde{K}_n(E) \text{ и } z^{p-n}F(z) \in \tilde{K}_p(E), \quad p > n.$$

Введем символ

$$\{F(z); z, \zeta_1, \dots, \zeta_k\} = \frac{[F(z); z, \zeta_1, \dots, \zeta_k]}{[F(z); 0, \zeta_1, \dots, \zeta_k]},$$

где $z \in E$ и ζ_1, \dots, ζ_k - произвольно фиксированные параметры из E .

$\tilde{R}_{n,p}(E)$ - класс n -нормированных в E функций $\Psi(z)$, для каждой из которых существует своя функция $F(z) \in \tilde{K}_p(E)$ и свои точки $\zeta_1, \dots, \zeta_{p-n} \in E$ такие, что имеет место представление

$$\Psi(z) = z^n \{z^{-n}F(z); z, \zeta_1, \dots, \zeta_{p-n}\}.$$

$\tilde{T}_n^r(E)$, $n \geq 1$, n - нечетное, - класс n -нормированных в E функций с вещественными коэффициентами, для которых

$$\left[F(z); z_1, \dots, z_{\frac{n+1}{2}}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{\frac{n+1}{2}} \right] \neq 0$$

при любых $z_1, \dots, z_{\frac{n+1}{2}} \in E$.

$\tilde{R}_{n,p}^+(E)$ - класс, являющийся замыканием класса $\tilde{R}_{n,p}(E)$ относительно равномерной сходимости внутри E .

Справедливы включения

$$\tilde{K}_n^r(E) \subset \tilde{K}_n(E), \tilde{R}_{n,p}^r(E) \subset \tilde{K}_n(E), \tilde{K}_{n,p}^r(E) \subset \tilde{R}_{n,p}(E),$$

$$\tilde{K}_{n,p+1}(E) \subset \tilde{K}_{n,p}(E), \tilde{R}_{n,p+1}(E) \subset \tilde{R}_{n,p}(E).$$

Класс $\tilde{K}_1(E)$ совпадает с классом S всех однолистных нормированных в E функций. Классы $\tilde{K}_1^r(E)$, $\tilde{K}_{1,p}(E)$, $\tilde{R}_{1,p}^+(E)$ являются собственными подклассами класса $\tilde{K}_1(E)$.

Классы $\tilde{K}_n(E)$, $\tilde{K}_n^r(E)$ при $n \geq 1$ и классы $\tilde{K}_{n,p}(E)$, $\tilde{R}_{n,p}^+(E)$, при $n \geq 0$ являются компактными в себе относительно равномерной сходимости внутри E .

Введены и изучены свойства функций, называемых основными функциями, которые играют важную роль при решении различных экстремальных задач, причем многие из этих функций являются экстремальными. Пусть t - комплексное число, a и b - комплексные числа такие, что $0 \leq |a| \leq 1$, $0 \leq |b| \leq 1$. Основная функция обозначается через $\Phi_{n,t,a,b}(z)$. Она считается n -нормированной в E и удовлетворяющей однородному линейному дифференциальному уравнению

$$(1 - \bar{a}z)(1 - \bar{b}z)Z^{(n+1)}(z) - (n+1)(t - \bar{a}\bar{b}z)Z^{(n)}(z) = 0$$

$(n+1)$ -го порядка. Если $a = -1$, $b = 1$, то для краткости полагаем $\Phi_{n,t,-1,1}(z) \equiv \Phi_{n,t}(z)$. Отметим некоторые из основных функций.

$$\Phi_{0,0}(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \Phi_{n,1}(z) = \frac{z^n}{1-z}, \quad \Phi_{1,0}(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z},$$

$$\Phi_{n,(n+3)(n+1)}(z) = z^n \left(1 + \frac{1-n}{1+n}z\right) (1-z)^{-2} = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n+2k-1}{n+1} z^{n+k-1}.$$

В частности,

$$\Phi_{0,3}(z) = (1+z)(1-z)^{-2}, \quad \Phi_{1,2}(z) = z(1-z)^{-2}.$$

Полностью решен вопрос о необходимых и достаточных условиях принадлежности рациональных аналитических в E функций вида $F(z) = z^n(1+az)(1-c_1z)^{-1}(1-c_2z)^{-1}$ классам $\tilde{K}_n(E)$, $\tilde{R}_{n,p}(E)$. Заметим, что основные функции

$$\Phi_{n, \pm(n+3)(n+1)}(z) = z^n \left(1 \pm \frac{1-n}{1+n} z\right) (1 \mp z)^{-2}$$

принадлежат классу $\tilde{K}_n^r(E)$ при любом $n \geq 0$ и классу $\tilde{T}_n^2(E)$ при любом нечетном n . Отметим, что только три функции z^n и $z^n(1 \pm z)^{-1}$ среди всех функции с целыми коэффициентами принадлежат классу $\tilde{K}_n(E)$, $n \geq 2$.

Для класса $\tilde{K}_n(E)$, $n \geq 1$ справедлива теорема понижения. Если $F(z) \in \tilde{K}_n(E)$, $n \geq 1$, то $z^{-m}F(z) \in \tilde{K}_{n-m}(E)$, где $0 < m \leq n$.

В главе III оцениваются модули

$$\left| \arg F^{(n)}(z) \right|, \left| F^{(k)}(z) \right|, \left| [F(z); z_0, \dots, z_k] \right|, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Доказано, например, что для любой функции $F(z) \in \tilde{K}_n(E)$

$$\Phi_{n, -\delta}^{(n)}(r) \leq \left| F^{(n)}(z) \right| \leq \Phi_{n, \delta}^{(n)}(r), \quad |z| = r < 1,$$

где

$$\delta = \max_{F(z) \in \tilde{K}_n(E)} \frac{1}{(n+1)!} \left| F^{(n+1)}(0) \right|$$

и неравенство

$$\left| F(z) \right| \leq \Phi_{n, \delta}(r), \quad |z| = r < 1.$$

Как уже было отмечено, класс $\tilde{K}_{1,p}(E)$ при любом натуральном $p > 1$ является компактным в себе и состоит из однолистных в E функций $f(z)$, $f(0)$, $f'(0) = 1$. Справедливо включение $\tilde{K}_{1,p}(E) \supset \tilde{K}_{1,p+1}(E)$. Из предельной теоремы сразу следует, что пересечение классов $\tilde{K}_{1,p}(E)$, $p = 2, 3, \dots$ состоит только из функций вида $f(z) = z(1-az)^{-1}$, где $|a| \leq 1$.

Класс $\tilde{R}_{1,p}(E)$, $p \geq 2$, также как и класс $\tilde{K}_{1,p}(E)$, $p \geq 2$ состоит из однолистных нормированных в E функций. Справедливы включения $\tilde{K}_{1,p}(E) \subset \tilde{R}_{1,p}(E) \subset \tilde{K}_1^r(E)$ при любом $p > 1$. Заметим, что функция Кебе $\Phi_{1,2}(z)$ принадлежит всем классам $\tilde{R}_{1,p}(E)$, $p = 2, 3, \dots$ в то время, как $\Phi_{1,2}(z) \notin \tilde{K}_{1,p}(E)$, $p = 2, 3, \dots$.

Пусть $b_1 = 1, b_2, b_3, \dots$ - последовательность вещественных чисел и

$$B_m^*(r, \gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k+m-1} r^{k-1} \frac{\sin k \gamma}{\sin \gamma}, \quad r \in [0, 1), \gamma \in [-\pi, \pi].$$

Имеет место следующая теорема сдвига. Пусть

$$B_1^*(r, \gamma) > 0, \quad r \in (0, 1), \quad \gamma \in [-\pi, \pi]$$

и

$$\tau_m = \sup_{\substack{r \in (0, 1) \\ \gamma \in [-\pi, \pi]}} \frac{|B_m^*(r, \gamma)|}{B_1^*(r, \gamma)} > 1, \quad m \geq 2.$$

Тогда

$$|b_m| \leq \frac{m \tau_m - 1}{\tau_m + m - 2} < m, \quad m \geq 2.$$

На основании этого утверждения получены оценки коэффициентов функций из различных классов. Приведем некоторые из этих оценок.

Для коэффициентов функций

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n} z^{n+k-1} \quad (6)$$

из класса $\tilde{T}_n^r(E)$, где $n \geq 1$ и нечетное, справедливы неравенства

$$|a_{k,n}| \leq \frac{n+2k-1}{n+1}, \quad k = 2, 3, 4, \dots \quad (7)$$

Знак равенства реализуется основными функциями

$$\Phi_{n, \pm(n+3)/(n+1)}(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} (\pm 1)^{k+1} \frac{n+2k-1}{n+1} z^{n+k-1}, \quad (8)$$

принадлежащими классу $\tilde{T}_n^r(E)$.

Для коэффициентов функций вида (6) из класса $\tilde{K}_n^r(E)$, где $n \geq 1$ и нечетное, справедливы оценки (7). Знак равенства реализуется основными функциями (8), принадлежащим классу $\tilde{K}_n^r(E)$.

Для коэффициентов функций вида (6) из класса $\tilde{K}_n^r(E)$, где $n \geq 2$ и четное, справедливы оценки

$$|a_{k,n}| \leq \frac{(2k+n-4)|\hat{a}_{k,2}| - n + 2}{(n-2)|\hat{a}_{k,2}| + 2k - n}, \quad k = 2, 3, 4, \dots, \quad (9)$$

где

$$|\hat{a}_{k,2}| = \max_{F(z) \in \tilde{K}_2^r(E)} \frac{1}{(k+1)!} |F^{(k+1)}(0)|.$$

Если предположить, что

$$|\hat{a}_{k,2}| = \frac{2k+1}{3}, \quad k=2,3,4,\dots,$$

то из (9) следует (7) при четных $n \geq 2$ со знаком равенства для основных функций (8), принадлежащих классу $\tilde{K}_n^2(E)$.

Представляет интерес класс $\tilde{R}_{0,1}(E)$, составленный из функций

$$\varphi_\zeta(z) = \{f(z); z, \zeta\} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k(\zeta) z^{k-1},$$

где $\zeta \in E$ и $f(z) \in \tilde{K}_1(E)$. Здесь отметим результат, относящийся к коэффициентам функций из класса $\tilde{R}_{0,1}(E)$. При любом $\zeta \in E$ справедливы неравенства

$$|a_k(\zeta) - \zeta a_{k+1}(\zeta)| \leq k(1+|\zeta|)^2, \quad k=1,2,3,\dots$$

Знак равенства при $\zeta = \zeta_0 = \rho_0 e^{i\gamma_0}$, где $0 < \rho_0 < 1$ и $0 \leq \gamma_0 < 2\pi$, для каждого $k \geq 1$ реализуется только функцией

$$\varphi_{\zeta_0}(z) = (1 - \bar{\zeta}_0 z) (1 + e^{-i\gamma_0} z)^{-2} \in \tilde{R}_{0,1}(E)$$

Он называется оператором в n -м порядке. При $n=1$ получим оператор

$$C_{\zeta_0}^1 f(z) = \frac{f(\alpha z) - f(\zeta)}{e^{\alpha} (1 - \zeta) f'(\zeta)}$$

первого порядка, часто встречающийся в теории функций.

Глава IV. КЛАССЫ $\tilde{L}_n(E)$ И $\tilde{C}_n(E)$.

Эта глава содержит 8 параграфов. Через $\tilde{L}_n(E)$, $n \geq 0$ обозначается класс аналитических в E функций вида (6), для которых выполняется условие

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} |a_{k,n}| \leq 1.$$

При $n = 1$ имеем класс $\tilde{L}_1(E)$ однолистных нормированных в E функций.

Через $\tilde{C}_n(E)$, $n \geq 0$ обозначается класс аналитических в E функций вида (6), для которых $\operatorname{Re} F^{(n)}(z) > 0$ в E . При $n = 1$ имеем класс $\tilde{C}_1(E)$ однолистных нормированных в E функций. Классы $\tilde{L}_1(E)$ и $\tilde{C}_1(E)$ достаточно подробно изучены в теории однолистных функций. Имеют место включения $\tilde{L}_n(E) \subset \tilde{C}_n(E)$ и $\tilde{C}_n(E) \subset \tilde{K}_n(E)$. Классы $\tilde{L}_n(E)$ и $\tilde{C}_n(E)$, $n \geq 1$ являются компактными в себе относительно равномерной сходимости внутри E . Для классов $\tilde{L}_n(E)$, $\tilde{C}_n(E)$, $n \geq 1$ справедливы теоремы понижения: Если $z^n \varphi(z) \in \tilde{L}_n(E)$, то $z^m \varphi(z) \in \tilde{K}_m(E)$ при $0 \leq m < n$. Если $z^n \varphi(z) \in \tilde{C}_n(E)$, то $z^m \varphi(z) \in \tilde{C}_m(E)$ при $0 \leq m < n$.

Устанавливаются признаки принадлежности функций классам $\tilde{L}_n(E)$, $\tilde{C}_n(E)$, оцениваются модули

$$|F^{(k)}(z)|, \quad \left| \arg F^{(k)}(z) \right|, \quad \left| F(z); z_0, \dots, z_k \right|, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Решаются экстремальные задачи, вычисляются радиусы окружностей, отображаемых функциями классов $\tilde{L}_n(E)$, $\tilde{C}_n(E)$ на выпуклые и звездообразные кривые. Кроме того, решены многие задачи, аналогичные задачам, которые ставились в предыдущих главах для введенных там классов.

Глава V. КЛАССЫ ФУНКЦИЙ С ЛОКАЛЬНО ОТЛИЧНОЙ ОТ НУЛЯ n -Й РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТЬЮ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ.

Эта глава содержит 16 параграфов. В ней изучаются классы функций с локально отличной от нуля n -й разделенной разностью. Разделенную разность $[F(z); z_0, \dots, z_n]$ назовем локально отличной от нуля в E , если для любой точки $\zeta \in E$ найдется ее окрестность $O(\zeta)$ такая, что $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$ при любых попарно различных $z_0, \dots, z_n \in O(\zeta)$.

Через $A_n(E)$ обозначим класс аналитических в E функций $F(z)$, для которых $[F(z); z_0, \dots, z_n] \neq 0$ локально в E .

Для того чтобы функция $F(z) \in A_n(E)$ необходимо и достаточно, чтобы $F^{(n)}(z) \neq 0$ в E . Каждая функция из класса $A_n(E)$ является локально не более n -листной в E .

Через $\tilde{A}_n(E)$ обозначим подкласс класса $A_n(E)$, состоящий из n -нормированных в E функций.

Через Λ обозначается множество всех дробно-линейных функций

$$\omega = \omega(z) = \frac{e^{i\theta} z + \zeta}{1 + \bar{\zeta} e^{i\theta} z}, \quad \zeta \in E, \quad \theta \in (-\infty, \infty)$$

Вводится оператор $\Omega_n^\omega[F(z)]$ следующим образом:

$$\Omega_n^\omega[F(z)] = \frac{z^n \left[F(z); \omega, \overbrace{\zeta, \dots, \zeta}^n \right]}{(1 + \bar{\zeta} e^{i\theta} z) \frac{1}{n!} F^{(n)}(\zeta)}.$$

Он называется омега-оператором n -го порядка. При $n = 1$ получаем омега-оператор

$$\Omega_1^\omega[F(z)] = \frac{F(\omega(z)) - F(\zeta)}{e^{i\theta} (1 - |\zeta|^2) F'(\zeta)}$$

первого порядка, часто встречающийся в теории однолистных функций.

Предположим, что $\omega = \omega(z) \in \Lambda$ и $\xi_k = \omega(z_k)$, $k=0, \dots, n$. Тогда

$$[F(z); \xi_0, \dots, \xi_n] = \frac{F^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{k=0}^n (1 + \bar{\zeta} e^{i\theta} z_k) \left[\Omega_n^\omega [F(z)]; z_0, \dots, z_n \right].$$

Омега-оператор n -го порядка определен на классе $A_n(E)$ и переводит функцию из $\tilde{A}_n(E)$ снова в функцию из $\tilde{A}_n(E)$.

Зафиксировав функцию

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n} z^{n+k-1} \in \tilde{A}_n(E)$$

и омега-преобразование $\omega = \omega(z) = (e^{i\theta} z + \zeta) / (1 + \bar{\zeta} e^{i\theta} z) \in \Lambda$, получим функцию $F(z, \omega) = \Omega_n^\omega [F(z)] \in \tilde{A}_n(E)$, разложение которой в ряд имеет вид

$$F(z, \omega) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n}(\omega) z^{n+k-1},$$

где k -й коэффициент выражается по формуле

$$a_{k,n}(\omega) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^m (k-1)!}{m!(k-1-m)!} (1 - |\zeta|^2)^{k-1-m} e^{i(k-1)\theta} \bar{\zeta}^m \frac{F^{(n+k-1-m)}(\zeta) n!}{(n+k-1-m)! F^{(n)}(\zeta)}.$$

В частности,

$$a_{2,n}(\omega) = e^{i\theta} \left(-\bar{\zeta} + (1 - |\zeta|^2) \frac{F^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)F^{(n)}(\zeta)} \right).$$

Через $\tilde{\mathfrak{M}}_n(E)$ обозначим класс функций из $\tilde{A}_n(E)$, обладающий следующим свойством: если $F(z) \in \tilde{\mathfrak{M}}_n(E)$, то $\Omega_n^\omega [F(z)] \in \tilde{\mathfrak{M}}_n(E)$ при любом $\omega \in \Lambda$. Такой класс назовем линейно-инвариантным классом n -го порядка. Высотой класса $\tilde{\mathfrak{M}}_n(E)$ назовем число

$$\delta = \sup_{F(z) \in \tilde{\mathfrak{M}}_n(E)} \frac{1}{(n+1)!} |F^{(n+1)}(0)|.$$

Класс $\tilde{\mathfrak{M}}_n(E)$ с высотой δ обозначим через $\tilde{\mathfrak{M}}_n(E; \delta)$. Установлено, что $1 \leq \delta \leq \infty$. Приведем примеры линейно-инвариантных классов.

Класс $\tilde{A}_n(E)$ является линейно-инвариантным классом с $\delta = \infty$.

Класс $\tilde{K}_n(E)$ является линейно-инвариантным классом.

Пусть $F(z)$ - фиксированная функция из $\tilde{A}_n(E)$. Множество фун-

кий $\Omega_n^\omega[F(z)]$, где ω пробегает все омега-преобразования из Λ обозначим через $\tilde{\Pi}_n(E; F)$ или через $\tilde{\Pi}_n(E)$, если ясно какая функция образует это множество. Такое множество назовем простым классом. Простой класс является линейно-инвариантным классом.

Через $\tilde{U}_n(E; \delta)$ обозначим класс, являющийся объединением всех линейно-инвариантных классов порядка n , высоты которых не превосходят числа δ . Этот класс является линейно-инвариантным классом.

Введем на классе $\tilde{A}_n(E)$ функционал δ_F по формуле

$$\delta_F = \sup_{z \in E} |\Delta_{2,n}[F(z)]|,$$

где

$$\Delta_{2,n}[F(z)] = -\bar{z} + (1 - |z|^2) \frac{F^{(n+1)}(z)}{(n+1)F^{(n)}(z)}$$

и обозначим

$$\nabla_n[F(z)] = \ln \left((1 - |z|^2)^{\frac{n+1}{2}} \frac{F^{(n)}(z)}{n!} \right).$$

Справедливо следующее утверждение, называемое теоремой сравнения. Для любой функции $F(z) \in \tilde{A}_n(E)$ имеет место неравенство

$$|\nabla_n[F(z)]| \leq \nabla_n[\Phi_{n,\delta_F}(r)], \quad |z| = r < 1.$$

Знак равенства при $z = r_0 e^{i\gamma_0}$, где $0 < r_0 < 1$, $0 \leq \gamma_0 < 2\pi$ реализуется только функциями вида

$$e^{in\gamma_0} \Phi_{n,t}(e^{-i\gamma_0} z), \quad \text{Im} t = 0, \quad |t| \geq 1, \quad (10)$$

Приведем несколько результатов, вытекающих из теоремы сравнения.

1. Если $F(z) \in \tilde{A}_n(E)$, то

$$\Phi_{n,-\delta_F}(r) \leq |F^{(n)}(z)| \leq \Phi_{n,\delta_F}(r) \quad |z| = r < 1.$$

Знак равенства при $z = r_0 e^{i\gamma_0}$ реализуется только функциями вида (10).

2. Если $F(z) \in \tilde{A}_n(E)$, то

$$[F(z)] \leq \Phi_{n,\delta_r}(r), \quad |z|=r < 1.$$

Знак равенства при $z=r_0 e^{i\gamma_0} \neq 0$ реализуется только функциями вида (10), где $t \geq 1$.

3. Если $F(z) \in \tilde{A}_n(E)$, то

$$[F(z); z_0, \dots, z_n] \leq [\Phi_{n,\delta_r}(r); r_0, \dots, r_n]$$

при любых $z_0, \dots, z_n \in E$, где $|z_m|=r_m < 1$, $m=0, \dots, n$. Пусть $F^{(n)}(z) \neq \text{const}$ и не все z_0, \dots, z_n совпадают между собой. Тогда знак равенства имеет место только в том случае, когда точки z_0, \dots, z_n расположены на радиусе круга E , наклоненном под углом γ к вещественной оси, т.е. $z_m = r_m e^{i\gamma}$, $m=0, \dots, n$ и функция $F(z)$ имеет вид

$$F(z) = e^{in\gamma} \Phi_{n,t}(e^{-i\gamma}z), \quad t \geq 1$$

4. Если $F(z) \in \tilde{A}_n(E)$, то

$$\left| \arg F^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n+1}{2} \delta_F \ln \frac{1+r}{1-r}, \quad |z|=r < 1.$$

Имеет место разложение

$$\frac{z^n}{\Omega_n[F(z)]} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{k,n}(\omega) z^k,$$

где

$$\frac{(n+1)(n+2)b_{2,n}(\omega)}{-e^{i\theta}(1-|\zeta|^2)^2} = \frac{F^{(n+2)}(\zeta)}{F^{(n)}(\zeta)} - \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{F^{(n+1)}(\zeta)}{F^{(n)}(\zeta)} \right)^2.$$

Выражение

$$\mathbb{Ш}_n[F(z)] = \frac{F^{(n+2)}(z)}{F^{(n)}(z)} - \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{F^{(n+1)}(z)}{F^{(n)}(z)} \right)^2$$

назовем оператором Шварца n -го порядка. Обозначим

$$\mathfrak{S}_F = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sup_{z \in E} (1-|z|^2)^2 \left| \mathbb{Ш}_n[F(z)] \right|.$$

Имеет место неравенство

$$\delta_F^2 \leq 1 + (n+2)\sigma_F$$

для любой функции $F(z) \in \bar{A}_n(E)$. Знак равенства реализуется функцией вида $\Phi_{n,t}(z)$, $\text{Im } t = 0$, $|t| \geq 1$.

Приведем три признака принадлежности функций к классу $\bar{U}_n(E; \delta)$.

1. Если $\delta_F \leq \delta$, то $F(z) \in \bar{U}_n(E; \delta)$.

2. Если $\sigma_F \leq \frac{\delta^2 + 1}{n+2}$, то $F(z) \in \bar{U}_n(E; \delta)$.

3. Если

$$\text{Ш}_n[F(z)] \leq \frac{(n+1)(\delta^2 - 1)}{(1 - |z|^2)^2}, \quad z \in E, \quad \text{то } F(z) \in \bar{U}_n(E; \delta).$$

Приводится следующая оценка для модуля аргумента n -й производной любой функции $F(z)$ из класса $\bar{U}_n(E; \delta)$:

$$\left| \arg F^{(n)}(z) \right| \leq \frac{n+1}{2} \sqrt{\delta^2 - 1} \ln \frac{1+|z|}{1-|z|} + (n+1) \arcsin |z|, \quad z \in E.$$

В случае $\delta = 1$ получается точная оценка

$$\left| \arg F^{(n)}(z) \right| \leq (n+1) \arcsin |z|, \quad z \in E.$$

Знак равенства реализуется функцией $F(z) = e^{i\pi\gamma} \Phi_{n,1}(e^{-i\gamma}z)$, принадлежащей классу $\bar{U}_n(E; 1)$.

Найдены области значений некоторых функционалов. Доказано, например, что при фиксированном $z_0 \in E$ все значения функционала

$$\frac{z_0 F^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)F^{(n)}(z_0)}, \quad F(z) \in \bar{U}_n(E; \delta)$$

лежат в замкнутом круге

$$\left| W - \frac{|z_0|^2}{1 - |z_0|^2} \right| \leq \frac{\delta |z_0|}{1 - |z_0|^2}$$

и полностью заполняют его, а все значения функционала

$$-\bar{z}_0 + (1 - |z_0|^2) \frac{F^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)F^{(n)}(z_0)}, \quad F(z) \in \tilde{U}_n(E; \delta)$$

полностью заполняют круг $|W| \leq \delta$.

Пусть

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n} z^{n+k-1} \in \tilde{\mathfrak{M}}_n(E; \delta),$$

$$F(z, \zeta) = \Omega_n^\omega[F(z)] = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n}(\zeta) z^{n+k-1},$$

где

$$\omega = \omega(z) = \frac{z + \zeta}{1 + \zeta z} \in \Lambda.$$

Тогда функция $F(z, \zeta) \in \tilde{\mathfrak{M}}_n(E)$ при любом $\zeta \in E$. Для достаточно малых по модулю значениям ζ имеют место формулы

$$F(z, \zeta) = F(z) + (F'(z) - (n+1)a_{2,n}F(z) - n z^{n-1})\zeta - (z^2 F'(z) - (n-1)zF(z))\bar{\zeta} + O(|\zeta|^2),$$

$$a_{k,n}(\zeta) = a_{k,n} + ((n+k)a_{k+1,n} - (n+1)a_{k,n}a_{2,n})\zeta - (k-1)a_{k-1,n}\bar{\zeta} + O(|\zeta|^2),$$

обобщающие известные вариационные формулы Марти, полученные им в классе однолистных функций.

Пусть τ_1 и τ_2 - неподвижные точки омега-преобразования $\omega(z) \in \Lambda$, т.е. $\omega(\tau_1) = \tau_1$ и $\omega(\tau_2) = \tau_2$. Имеется бесконечно много омега-преобразований с фиксированными неподвижными точками $\tau_1 \neq 0$, $\tau_2 \neq 0$. Обозначим через $\Lambda_1(\tau_1, \tau_2)$ множество всех омега-преобразований, с фиксированными неподвижными точками τ_1, τ_2 - подчиненными условию $|\tau_1| = |\tau_2| = 1$. Только основные функции $\varphi_{n, \tau_1, \tau_2}(z)$ обладают тем свойством, что

$$\Omega_n^\omega[\Phi_{n, \tau_1, \tau_2}(z)] = \Phi_{n, \tau_1, \tau_2}(z).$$

при любом $\omega \in \Lambda_1(\tau_1, \tau_2)$.

Зафиксируем $\omega(z) \in \Lambda_1(\tau_1, \tau_2)$, где $\tau_1 \neq \tau_2$, $\omega(0) \neq 0$ и пусть D - область значений функции

$u(z) = \ln \left(\frac{1 - \bar{\tau}_1 z}{1 - \bar{\tau}_2 z} \right)$. Тогда функциональному уравнению

$$\Psi(\omega(z)) = \Psi(\omega(0))\Psi(z), \quad \Psi(z) \in \bar{A}_0(E), \quad (11)$$

удовлетворяют только функции $f(z) = \exp \int_0^z h(\xi) d\xi$, где $h(\xi)$ - произвольная аналитическая в области D функция со свойством

$$h(\xi + u(\omega(0))) = h(\xi), \quad \xi \in D.$$

Зафиксируем $\omega(z) \in \Lambda_1(\tau_1, \tau_2)$, где $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, $\omega(0) < 0$ и пусть D -

область значений функции $\nu(z) = z / (1 - \bar{\tau}z)$. Тогда функциональному уравнению (11) удовлетворяют только функции $f(z) = \exp \int_0^z h(\xi) d\xi$, где $h(\xi)$ - произвольная аналитическая в области D функция со свойством

$$h(\xi + \nu(\omega(0))) = h(\xi), \quad \xi \in D.$$

Основные положения, выносимые на защиту

Найдено общее решение линейного разделенно-разностного уравнения с постоянными коэффициентами.

Установлена связь между Чебышевской системой и разделенно-разностным определителем.

Установлены различные признаки принадлежности функций классу $K_n(D)$.

Получена полная информация о распределении корней неполного многочлена вида

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^{n+k}, \quad \text{где } k \geq 1.$$

Приведены оценки коэффициентов функций $F(z) = z^n + a_{2,n} z^{n+1} + \dots$, принадлежащих классу $\tilde{K}_n^z(E)$.

Найдены оценки $|F^{(k)}(z)|$, $k=0, \dots, n$ функций из класса $\tilde{K}_n(E)$.

Установлены некоторые вариационные формулы в линейно-инвариантных классах.

Найдены неподвижные точки оператора Ω_n^ω .

**СПИСОК ОСНОВНЫХ НАУЧНЫХ СТАТЕЙ АВТОРА,
ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ДИССЕРТАЦИИ.**

1. Кирьяцкий Э.Г. О Функциях, n -я разделенная разность которых не равна нулю - Лит. мат. сб., 1961, т. I, №2, с.109-114.
2. Кирьяцкий Э.Г. Некоторые свойства функций, разделенная разность которых не равна нулю - Лит. мат. сб., 1962, т. II, №1, с.55-60.
3. Кирьяцкий Э.Г. О функциях с разделенной разностью, отличной от нуля - Лит. мат. сб., 1963, т. III, №1, с.157-168.
4. Кирьяцкий Э.Г. Некоторые экстремальные задачи в классах $P(E)$ и $K_n(D)$. - Лит. мат. сб., 1963, т. III, №2, с.83-90.
5. Кирьяцкий Э.Г. Распространение некоторых теорем Аксентьева и Чакалова на класс $K_n(D)$. - Лит. мат. сб., 1963, т. III, №2, с.91-96.
6. Кирьяцкий Э.Г. Некоторые экстремальные свойства функций с отличной от нуля разделенной разностью - Лит. мат. сб., 1970, т. X, №4, с.733-744.
7. Кирьяцкий Э.Г. Некоторые свойства функций с отличной от нуля разделенной разностью - Лит. мат. сб., 1972, т. XII, №2, с.43-55.
8. Кирьяцкий Э.Г. Об одном операторе в пространстве аналитических в единичном круге функций - Лит. мат. сб., 1972, т. XII, №1, с.129-137.
9. Кирьяцкий Э.Г. О некоторых классах однолистных функций - Лит. мат. сб., 1972, т. XII, №3, с.75-84.
10. Кирьяцкий Э.Г. Об одном классе рациональных однолистных функций - Лит. мат. сб., 1973, т. XIII, №2, с.79-89.
11. Кирьяцкий Э.Г. О некоторых операторах, связанных с дробно-линейным преобразованием - Лит. мат. сб., 1974, т. XIV, №1, с.57-65.
12. Кирьяцкий Э.Г. Об одном операторе в семействе функций, связанных с дробно-линейным преобразованием - Лит. мат. сб., 1976, т. XVI, №1, с.103-110.
13. Кирьяцкий Э.Г. О некоторых операторах, связанных с дробно-линейным преобразованием единичного круга - Лит. мат. сб., 1976, т. XVI, №1, с.111-122.

14. Кирьяцкий Э.Г. Об одном функциональном уравнении, связанном с разделенными разностями - Лит. мат. сб., 1976, т. XVI, №2, с.103-110.
15. Кирьяцкий Э.Г. Об одной экстремальной задаче в евклидовом пространстве - Лит. мат. сб., 1977, т. XVII, №2, с.111-116.
16. Кирьяцкий Э.Г. Об одном предельном свойстве функций с отличной от нуля разделенной разностью - Лит. мат. сб., 1978, т. XVIII, №2, с.47-61.
17. Кирьяцкий Э.Г. О некоторых свойствах функций с отличной от нуля разделенной разностью - Лит. мат. сб., 1979, т. XIX, №1, с.98-113.
18. Кирьяцкий Э.Г. Меляускас И.Б. Об одном инвариантном свойстве дробно-линейных функций - Лит. мат. сб., 1982, т. XXII, №3, с.99-102.
19. Кирьяцкий Э.Г. Меляускас И.Б. О признаках принадлежности некоторых рациональных функций к классу $K_n(E)$ - Лит. мат. сб., 1982, т. XXII, №4, с.82-89.
20. Кирьяцкий Э.Г. Бренер Г.Л. О некоторых экстремальных свойствах средних в k -мерном евклидовом пространстве - Лит. мат. сб., 1983, т. XXIII, №1, с.30-42.
21. Кирьяцкий Э.Г. О коэффициентах функций из класса - Лит. мат. сб., 1983, т. XXIII, №3, с.48-52.
22. Кирьяцкий Э.Г. Дагене Е. О круге принадлежности одного семейства функций к классу функций с положительной вещественной частью n -й производной - Лит. мат. сб., 1983, т. XXIII, №2, с.79-85.
23. Кирьяцкий Э.Г. Меляускас И.Б. О некоторых классах аналитических функций - Лит. мат. сб., 1985, т. XXV, №3, с.73-82.
24. Кирьяцкий Э.Г., Меляускас И.Б. Некоторые оценки для n -й разделенной разности регулярных в единичном круге функций - Лит. мат. сб., 1987, т. XXVII, №2, с.273-278.
25. Кирьяцкий Э.Г. Некоторые оценки n -й разделенной разности - Лит. мат. сб., 1989, т. XXIX, №3, с.491-506.
26. Кирьяцкий Э.Г. Некоторые тождества, связанные с разделенными разностями - Лит. мат. сб., 1990, т. XXX, №1, с.80-87.

Кирьяцкий Э.Г. Многолистные функции и разделенные разности.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 - Математический анализ, Институт прикладной математики и механики Национальной Академии Наук Украины, Донецк, 1994.

Защищается диссертация, которая посвящена исследованию различных классов аналитических многолистных функций, выделяемых с помощью разного рода условий, налагаемых на n -ю разделенную разность.

Аппарат разделенных разностей применен для решения классических задач геометрической теории функций и смежных ветвей математики (Теория Чебышевских систем, однолистные и многолистные функций, исчисление разделенных разностей).

Ключові слова : многолисті функції, поділені різниці

Kiriyatzkii E.G. Multivalent Functions and Divided Differences.

Doctor of Physical and Mathematical Sciences Degree Thesis by the Speciality 01.01.01 Mathematical Analysis, Institute for Applied Mathematics and Mechanics of National Academy of sciences of Ukraine, Donetsk, 1994.

Defending Thesis is devoted to investigation of different classes of multivalent functions. These classes are distinguished by particular conditions which are imposed on divided differences.

The divided differences apparatus is applied for the solution of Geometrical Function Theory Classical Problems and adjoining mathematical branches (Chebyshev System Theory, Univalent and Multivalent Functions, Divided Differences Calculus).

Key words : Multivalent Functions, Divided Differences.

Эдуард Григорьевич КИРЬЯЦКИЙ

МНОГОЛИСТНЫЕ ФУНКЦИИ И
РАЗДЕЛЕННЫЕ РАЗНОСТИ

SL136 1994 08 27 163 apsk leid1
Tirazas 99eqz Uzsakymas 87
Leido ir spausdino Vilniaus technikos
universitetas Technika
Sauletekio al 11 2054 Vilnius
Nemokamai

458 472

AB 30.852