

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

АТАНАСЬЕВ Николай Николаевич

**МЕТОД ОПЕРАТОРОВ МАКСИМУМА ДЛЯ РЕГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

01.01.02 – дифференциальные уравнения

кандидат наук

**Автореферат
диссертации на соискание научной степени
кандидата физико-математических наук**

Донецк – 1994

517.95



00373773 (U)

Работа выполнена в институте прикладной математики и механики НАН Украины

Научный руководитель: академик НАН Украины, доктор физико-математических наук, профессор Шенгунный В.Н.

Официальные оппоненты: доктор физ.-мат. наук, профессор Чикрий А.А.

доктор физ.-мат. наук, профессор Ковалев А.М.

Ведущая организация: Киевский государственный университет им. Т.Г.Шевченко

Защита состоится "26" сентябрь 1994 г. в 15 час на заседании специализированного совета Д. 06.01.01 по присуждению научной степени доктора физико-математических наук при Институте прикладной математики и механики НАН Украины по адресу: 340114, г. Донецк-114, ул. Розы Люксембург, 74.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Института прикладной математики и механики НАН Украины.

Автореферат разослан "24" сентябрь 1994 г.

Ученый секретарь
специализированного совета
кандидат физико-математических наук

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

В. Марков А.И. Марковский

№В-30.854

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. Среди численных методов решения задач оптимального управления одним из широко используемых является метод последовательных приближений (МПН), в основе которого лежит идея применения принципа максимума Понтрягина для решения задачи со свободным правым концом и закрепленным временем по схеме, характеризуемой точным соблюдением условия трансверсальности и неизской в условия максимума. Простейший МПН был предложен в 1963 г. А.И. Крыловым и Ф.Л. Черноусько. Практически одновременно с ними аналогичный прием предлагали Н.Г. Kelley, Р.Е. Коор, Н.Г. Моуер, а несколько позднее Н.Е. Gottlieb. Оказалось, что простейший МПН сходится довольно редко, в связи с чем были выполнены многочисленные исследования по разработке различных модификаций МПН и исследованию их сходимости. В этих исследованиях наряду с авторами метода приняли участие В.В. Александров, И.В. Бейко, О.В. Васильев, А.А. Любушин, В.А. Срочко, А.И. Тятинский, I. Bergmann, K. Nolte и др. В результате была существенно расширена область применения МПН.

Анализ простейшего МПН и упомянутых его модификаций показывает, что лежащая в их основе идея применения принципа максимума Понтрягина для решения указанной задачи может быть интерпретирована как редукция этой задачи к отысканию неподвижной точки одного из отвечающих ей операторов максимума. Всего при определенных условиях может быть построено пять таких операторов: два в пространстве управлений и три в пространстве траекторий. Такой способ использования принципа максимума кратко называется методом операторов максимума.

Строгое математическое обоснование этой редукции приводит к необходимости разбиения множества всех указанных задач с точки зрения однозначности операции максимизации функции Гамильтона-Понтрягина по управлению на три класса: регулярные, квазирегулярные и сингулярные задачи. Метод операторов максимума может быть применен только к первым двум из них, причем с существенными отличиями, в связи с чем его изучение должно проводиться для этих классов задач по отдельности и нечато с регулярных задач.

Оказалось, что регулярные задачи заведомо имеют решения

в классе непрерывных допустимых управлений. Поэтому открытыми для них являются только два вопроса, а именно: единственность решения задачи и его эффективное отыскание численными методами. В этой связи особый интерес представляет применения для исследования единственности решения задачи метода операторов максимума в сочетании с методом продолжения по параметру. Однако здесь возникают большие трудности, связанные с проблемой непрерывной дифференцируемости операторов максимума.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ. 1. Осуществить математически строгую формализацию метода операторов максимума в пространстве управлений для регулярных задач и изучить свойства получаемых при этом операторов, а также свойства таких задач.

2. На примере частного случая нелинейной сильно регулярной задачи изучить возможности сочетания методов операторов максимума в пространстве управлений и продолжения по параметру для исследования единственности ее решения и определить пути преодоления возникающих здесь трудностей из-за проблемы непрерывной дифференцируемости оператора максимума.

3. На примере M -регулярной задачи практического происхождения провести сравнительный анализ применения для ее решения операторов максимума в пространстве управлений и пространстве сопряженных траекторий.

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ. Систематически применяются методы и результаты теории оптимального управления, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, функционального анализа, а также используются численные методы.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА. Впервые дано математически строгое обоснование метода операторов максимума, выделен класс M -регулярных задач и изучены их свойства. Демонстрировано новое применение метода продолжения по параметру, заключающееся в его использовании для доказательства единственности оптимального управления. Показано, что этот путь приводит к новым алгоритмам для численного решения задачи на основе метода Ньютона - Канторовича, для которых просто решается проблема задания начального приближения.

ПРАКТИЧЕСКАЯ И ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ. Работа носит теоретический характер. Вместе с тем она имеет и важное практическое значение. Использование ее результатов позволяет

строить эффективные алгоритмы численного решения задачи, которые одновременно дают информацию о его единственности.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Результаты диссертации докладывались на Всесоюзной школе - семинаре по оптимальному управлению (Киев, 1977), V Всесоюзной конференции по управлению в механических системах (Казань, 1985), на семинаре кафедры теории оптимального управления Иркутского государственного университета в 1989 г., на семинаре "Теория оптимального управления" Научного совета по проблеме "Кибернетика", научном семинаре отдела нелинейного анализа ИГиМ НАН Украины и др..

ПУБЛИКАЦИИ. Результаты выполненных исследований отражены в работах [1 - 5].

СТРУКТУРА и ОБЪЕМ РАБОТЫ. Диссертационная работа включает на 150 страницах и состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 63 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во введении обосновывается актуальность темы, формулируется цель исследований и дается краткое описание работы.

В главе I излагаются основы метода операторов максимума в пространстве управлений для задачи оптимального управления со свободным правым концом и закрепленным временем в ее общей постановке при обычных (стандартных предположениях). Глава состоит из четырех параграфов.

В первом параграфе описывается постановка задачи в ее наиболее общем виде, дается формулировка принципа максимума Понтрягина, естественным образом приводящая к понятию оператора максимума, и излагаются некоторые вспомогательные результаты.

Согласно общепринятой постановке указанная задача заключается в том, чтобы в заданном классе Ω допустимых управлений $u(t), t \in [t_0, t_1]$, найти оптимальное $u_0(\cdot)$, которое доставляет минимум функционалу

$$I(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t)) dt + g(x(t_1)) \quad (1)$$

при связях

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = \xi, \quad (2)$$

где вектор ξ и моменты времени $t_0 < t_1$ фиксированы. Она должна удовлетворять четырём так называемым стандартным предположениям. Первые три из них представляют собой наиболее общие предположения принципа максимума Понтрягина, а последняя предусматривает, чтобы всякому $u(\cdot) \in \Omega$ отвечало единственное решение задачи (2) $x(t; u(\cdot))$, определенное для всех $t \in [t_0, t_1]$ и принимающее значения в некотором выпуклом компакте $X(t, \Omega) \subset E^n$. Задача (1)-(2), удовлетворяющая этим предположениям называется кратко S-задачей.

Пусть $D(t, \Omega) = \{x(\cdot; u(\cdot)); u(\cdot) \in \Omega\}$. Согласно принципу максимума Понтрягина каждой допустимой паре $(x(\cdot), u(\cdot)) \in D(t, \Omega) \times \Omega$ ставится в соответствие "сопряженная" траектория $\phi(t) = -\phi(t; x(\cdot), u(\cdot))$, $t \in [t_0, t_1]$, которая является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= -f_x^*(t, x(t), u(t))\phi + f_x^0(t, x(t), u(t)), \\ \phi(t_1) &= -g_x(x(t_1)). \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть $\sigma(D, \Omega) = \{\phi(\cdot; x(\cdot), u(\cdot)); x(\cdot) \in D(t, \Omega), u(\cdot) \in \Omega\}$, а $\sigma(\Omega)$ - его подмножество для пар $(x(\cdot; u(\cdot)), u(\cdot)), u(\cdot) \in \Omega$.

Определение 1. Управление $\hat{u}(\cdot) \in \Omega$ называется H-максимальным относительно пары траекторий $(x(\cdot), \phi(\cdot)) \in D(t, \Omega) \times \sigma(D, \Omega)$, если оно для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ доставляет вдоль нее максимум функции Гамильтона-Понтрягина

$$H(t, x, \phi, u) = -f^0(t, x, u) + \langle \phi, f(t, x, u) \rangle \quad (4)$$

по $u \in \Omega$, где $\Omega \subset E^m$ - множество допустимых значений u .

Отвечающее S-задаче множество всех ее H-максимальных управлений обозначается через Ω_H .

Теорема 1 (принцип максимума Понтрягина). Если управление $u_0(\cdot) \in \Omega$ является оптимальным в S-задаче, то оно H-максимально относительно отвечающей ему пары траек-

торый $(x(\cdot; u_0(\cdot)), \varphi(\cdot; u_0(\cdot))) \in D(\xi, \Omega) \times \sigma(\Omega)$.

В оставшейся части параграфа устанавливаются используемые в дальнейшем свойства Ω , $D(\xi, \Omega)$ и $\sigma(D, \Omega)$. В частности доказано, что всякая функция $\varphi(\cdot) \in \sigma(D, \Omega)$ принимает значения в некотором выпуклом компакте $\mathbb{B}(D, \Omega) \subset E_n$.

Второй параграф посвящен конструктивному представлению N -максимальных управлений и вытекающему из него построению соответствующего простейшему МП первого оператора максимума в пространстве управлений $M_1(u(\cdot))$, $u(\cdot) \in \Omega$. Пусть G обозначает некоторую окрестность компакта $\mathcal{G} = [t_0, t_1] \times X(\xi, \Omega) \times \mathbb{B}(D, \Omega)$ в $E^k \times E^r \times E_n$, принадлежащей области определения функции (4). Поскольку для произвольной точки $(t, x, \varphi) \in G$ операция максимизации функций (4) по $u \in U$ является многозначной, вводится понятие N -максимальной функции задачи $u_N(t, x, \varphi)$, $(t, x, \varphi) \in G$, при некотором правиле выбора R . Подстановка в нее пары $(x(\cdot), \varphi(\cdot)) \in D(\xi, \Omega) \times \sigma(D, \Omega)$ приводит к управлению

$$\hat{u}(t) = u_N[t, x(t), \varphi(t)], \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (5)$$

Теорема 2. Какова бы ни была S -задача, порожаемое ею множество Ω_N заведомо не пусто и состоит из управлений (5) при всех допустимых для нее различных правилах выбора R .

Формула (5) задает определенный для $(x(\cdot), \varphi(\cdot)) \in D(\xi, \Omega) \times \sigma(D, \Omega)$ оператор Немыцкого $M(x(\cdot), \varphi(\cdot))$ со значениями в Ω . Если сузить его на подмножество пар $(x(\cdot; u(\cdot)), \varphi(\cdot; u(\cdot)))$, отвечающих одному и тому же $u(\cdot) \in \Omega$, то получим оператор $M_{1R}(u(\cdot))$, который в общем случае зависит от правила выбора R . Поэтому напрашивается идея выделить класс задач, для которых вдоль любой пары траекторий $(x(\cdot; u(\cdot)), \varphi(\cdot; u(\cdot)))$, $u(\cdot) \in \Omega$, операция максимизации функция (4) по $u \in U$ является однозначной. Такие S -задачи называются M_1 -регулярными, а отвечающий им оператор $M_{1R}(u(\cdot))$ обозначается через $M_1(u(\cdot))$. Поскольку всякая допустимая траектория $x(\cdot; u(\cdot))$ по предположению принимает значения в компакте $X(\xi, \Omega)$, а всякая допустимая траектория $\varphi(\cdot; x(\cdot; u(\cdot)), u(\cdot))$ по построению принимает значения в компакте $\mathbb{B}(\Omega) \subset \mathbb{B}(D, \Omega)$, вводится

Определение 2. S -задача удовлетворяет условию M_1 -регулярности или является M_1 -регулярной, если для всякой точки $(t, x, \varphi) \in \mathcal{G}_1 = [t_0, t_1] \times X(\xi, \Omega) \times \mathbb{B}(\Omega)$ операция максимизации

функции (4) по $u \in U$ является однозначной.

Оказывается, что если несколько изменить это условие, то возможна модификация оператора $M_1(u(\cdot))$ за счет исключения $u(t)$ из сопряженной системы (3). Осуществлению этой модификации посвящен третий параграф.

Предварительно вводится в рассмотрение класс слабо регулярных S-задач. Они характеризуются тем, что для них существуют область $G_0 \subset G$, где определена однозначная H-максимальная функция $u(t, x, \phi)$, и непустое подмножество $M(G_0)$ пар траекторий $(x(\cdot), \phi(\cdot)) \in D(\xi, \Omega) \times \sigma(D, \Omega)$, полностью расположенных в G_0 . Если для S-задачи указанная область совпадает с G , то такая задача называется сильно регулярной.

Теорема 3. Для всякой слабо регулярной S-задачи сужение отвечающей ей H-максимальной функции $u(t, x, \phi)$ на G_0 является непрерывной функцией.

Теорема 4. Пусть S-задача является слабо регулярной. Тогда каждой паре траекторий $(x(\cdot), \phi(\cdot)) \in M(G_0)$ отвечает единственное H-максимальное управление

$$\hat{u}(t) = [M(x(\cdot), \phi(\cdot))](t) = u(t, x(t), \phi(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (6)$$

которое является функцией, непрерывной на $[t_0, t_1]$.

Эти теоремы позволяют исключить управления $u(t)$ из сопряженной системы (3), после чего задача (3) для попятного времени $\tau = t_1 - t$, $0 \leq \tau \leq t_1 - t_0$, принимает вид

$$\frac{d\phi}{d\tau} = f_x^0(t, x(t), u(t, x(t), \phi))\phi - f_x^0(t, x(t), u(t, x(t), \phi)). \quad (7)$$

$$\phi(t_1 - \tau) \Big|_{\tau=0} = -g_x(x(t_1)).$$

Указаны условия, при которых для всякой $x(\cdot) \in D(\xi, \Omega)$ задача Коши (7) имеет единственное решение, определенное для всех $t \in [t_0, t_1]$. Оно обозначается через $\phi(\cdot; x(\cdot))$, а семейство всех таких решений - через $\sigma(D)$.

Формула (6) рассматривается как соотношение, определяющее оператор Нейцкого $M(x(\cdot), \phi(\cdot))$, который отображает семейство $D(\xi, \Omega) \times \sigma(D)$ в Ω_0 . Его сужение на подмножество пар $(x[\cdot; u(\cdot)], \phi[\cdot; u(\cdot)])$, отвечающих одному и тому же $u(\cdot) \in \Omega$, порождает оператор $M_2(u(\cdot))$: $\Omega \rightarrow \Omega_0$.

Этот оператор в общем случае отличается от $M_1(u(\cdot))$ и называется модифицированным оператором максимума в пространстве управлений. Из его построения вытекает, что вместо выполнения условия сильной регулярности достаточно требовать, чтобы выполнялось более слабое условие M_2 -регулярности.

Определение 3. S-задача удовлетворяет условию M_2 -регулярности, если для нее найдется компакт $\Phi(D) \subset E_n$ такой, что для всякой точки $(t, x, \psi) \in \mathcal{G}_2 = [t_0, t_1] \times X(\xi, \Omega) \times \Phi(D)$ операция максимизации функции (4) по $u \in U$ является однозначной и для всякой допустимой траектории $x(\cdot)$ отвечающая ей задача Коши (7) однозначно разрешима для всех $\tau \in [0, t_1 - t_0]$, причем ее решение $\phi(\cdot; x(\cdot))$ принимает значения внутри $\Phi(D)$.

Если S-задача удовлетворяет хотя бы одному условию M_α -регулярности, $\alpha = 1, 2$, то она называется M-регулярной. Такие задачи обладают рядом важных свойств.

Эти свойства изучаются в заключительном, четвертом параграфе главы. Прежде всего доказывается теорема, которая является обобщением аналогичной теоремы Б.Т. Поляка (см. Поляк Б.Т. К теории нелинейных задач оптимального управления // Вестник МГУ, Сер. матем. и мех. 1968, № 2, С. 30 - 40).

Теорема 5. Пусть S-задача удовлетворяет условию M_α -регулярности, $\alpha = 1, 2$. Тогда: 1) решение задачи $u_0(\cdot) \in \Omega$ существует; 2) каждое решение удовлетворяет уравнению

$$u(\cdot) - M_\alpha(u(\cdot)) = 0$$

и с точностью до класса эквивалентности является функцией, непрерывной на $[t_0, t_1]$.

По сравнению с упомянутой теоремой Б.Т. Поляка эта теорема имеет более широкую область применения.

На основании теоремы 5 для всякой M_α -регулярной задачи класс допустимых управлений может быть сужен без потери решения до подмножества Ω_0 -непрерывных управлений $u(\cdot) \in \Omega$ с одновременным сужением на Ω_0 оператора M_α , $\alpha = 1, 2$. Доказано, что при некоторых дополнительных предположениях эти сужения $M_\alpha(u(\cdot))$, $\alpha = 1, 2$ являются вполне непрерывными операторами и удовлетворяют на Ω_0 условию Липшица:

$$\|M_\alpha(u_2(\cdot)) - M_\alpha(u_1(\cdot))\|_{cm} \leq q_\alpha \|u_2(\cdot) - u_1(\cdot)\|_{cm}.$$

Ясно, что если в рассматриваемой задаче для какого-либо $\alpha=1,2$ значения $q_\alpha \in (0,1)$, то для нее оператор $M_\alpha(u(\cdot))$ является сжимающим на Ω_0 . При этом задача имеет только одно решение $u_0(\cdot) \in \Omega_0$, которое может быть найдено простейшим МП. При оценке $q_\alpha \geq 1$, $\alpha = 1,2$, ключевым в теории М-регулярных задач становится вопрос о том, имеет ли отвечающий данной задаче оператор $M_\alpha(u(\cdot))$ единственную неподвижную точку или же более одной. Один из возможных подходов к изучению этого вопроса состоит в использовании идеи метода продолжения по параметру. В следующих двух главах этот подход изучается для двух важных частных случаев задачи (1)-(2), причем в каждом из них он осуществляется по-своему.

Во второй главе этот подход изучается на примере S-задачи, представляющей собой естественное обобщение известной задачи оптимального управления линейной системой с квадратичным критерием качества. Глава состоит из пяти параграфов.

В первом из них дается постановка задачи, формулируются предположения, при которых она изучается. Показано, что при этих предположениях она является сильно регулярной, а значит M_1 -регулярной и по теореме 5 имеет решения $u_0(\cdot) \in \Omega_0 \subset C([t_0, t_1], E^n)$. Обосновывается применение для исследования его единственности метода продолжения по параметру.

Во втором параграфе производится параметризация задачи с помощью числового параметра $\theta \in [0,1]$, после чего соотношения (1) и (2) для нее приобретают вид

$$I(u(\cdot), \theta) = \int_{t_0}^{t_1} [f^0(t, x(t)) + b'(t, x(t))\theta u(t) + \frac{1}{2} u'(t)R(t)u(t)] dt + g(x(t_1)), \quad (8)$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + B(t, x)\theta u, \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = \xi. \quad (9)$$

Здесь $R(t)$ - положительно определенная матрица $\forall t \in [t_0, t_1]$, класс допустимых управлений состоит из множества Ω_0 всех непрерывных функций $u(t)$, удовлетворяющих ограничению

$$u(t) \in U = \left\{ u \in E^n : |u^k| \leq \bar{u}_k, k = 1, \dots, m \right\} \quad (10)$$

при всех $t \in [t_0, t_1]$, где $\bar{u}_k > 0$ - заданные числа.

При $\theta = 1$ задача (8) - (10) совпадает с исходной, а при $\theta = 0$ она имеет единственное тривиальное решение

$$u_0(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (11)$$

При произвольном $\theta \in (0, 1)$ изучаются свойства отвечающей задаче (8) - (10) N -максимальной функции $u(t, x, \phi, \theta)$. Показано, что она не является гладкой во всей области $G = G_0 \times \times [0, 1]$, но удовлетворяет требуемому условию Липшица по x и ϕ , откуда следует ее M_2 -регулярность.

В третьем параграфе строится оператор максимума $M_2(u(\cdot), \theta)$ и задача сводится к решению уравнения

$$u(\cdot) - M_2(u(\cdot), \theta) = 0 \quad (12)$$

для всех $\theta \in (0, 1)$. Показано, что в общем случае только для достаточно малых $\theta > 0$ оператор $M_2(u(\cdot), \theta)$ является сжимающим. Поэтому для выяснения единственности решения уравнения (12) при всех $\theta \in (0, 1)$ привлекается известный признак отсутствия в этом промежутке точек ветвления.

Поскольку оператор $M_2(u(\cdot), \theta)$ в общем случае является недифференцируемым, то он заменяется "сглаженным" оператором максимума $\tilde{M}_2(P(\cdot), \theta)$, где допустимое управление $P(\cdot)$ -гладкая на $[t_0, t_1]$ функция, со значениями в некоторой окрестности $U \subset E^n$. Соответственно уравнение (12) преобразуется к виду

$$P(\cdot) - \tilde{M}_2(P(\cdot), \theta) = 0. \quad (13)$$

Построение сглаженного оператора $\tilde{M}_2(P(\cdot), \theta)$ осуществлено в четвертом параграфе. Там же показано, что $\tilde{M}_2(P(\cdot), \theta)$ обладает требуемыми дифференциальными свойствами, если выполняется условие перехода. Оно заключается в том, что каждая компонента гладкой вектор-функции $P(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, может пересекать соответствующую грань параллелепипеда (10) не более, чем конечное число раз с ненулевой скоростью. При этом производная $\tilde{M}_{2|k}(\cdot, \theta)$ определяется через решение двухточечной краевой задачи для линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений в вариациях.

В последнем параграфе главы изучаются требование непрерывной обратимости оператора $I - \tilde{M}_{2|k}(\cdot, \theta_0)$ и вытекающая из него единственность решения исходной задачи. По-

казано, что это требование выполняется, если матричное уравнение Гискати, используемое для решения указанной краевой задачи для уравнений в вариациях, при соответствующем начальном условии разрешимо на всем отрезке t_0, t_1 . Тогда уравнение (13), а вместе с ним и уравнение (12) однозначно разрешимы для всех $\theta \in (0, 1)$. Отсюда вытекает единственность решения исходной задачи.

Проведенное доказательство однозначной разрешимости уравнения (13) для всех $\theta \in (0, 1)$ приводит к алгоритму его численного решения на основе метода Ньютона-Канторовича с использованием в качестве начального приближения управления (11). Его реализация предусматривает проверку по ходу численного решения задачи условий, обеспечивающих дифференцируемость $\hat{M}_2(U(\cdot), \theta)$ и непрерывную обратимость оператора $I - \hat{M}_{2, \lambda, \lambda, \lambda}(\hat{U}_0(\cdot), \theta_0)$. В итоге получается информация, позволяющая судить, что найденное решение единственно.

В третьей главе рассмотрен пример S-задачи (1), (2) практического происхождения. Она выступает как вспомогательная задача при применении метода двойственности для решения задачи оптимального управления электроприводом на основе нелинейной модели привода. Для правомочности применения этого метода требуется, чтобы для любых допустимых значений двойственных переменных вспомогательная задача имела единственное решение. Поэтому основной целью исследования является проверка выполнения этого требования, которая осуществляется с помощью метода продолжения по параметру. Глава состоит из семи параграфов.

В первом параграфе дается постановка исходной задачи, указываются полезные для дальнейшего ее свойства и обосновывается принятый способ ее решения.

Во втором параграфе формулируется вспомогательная задача и осуществляется ее параметризация с помощью числового параметра $\theta \in (0, 1)$. Для параметризованной задачи соотношения (1) и (2) принимает вид

$$I(u(\cdot), \theta, \lambda) = \int_0^T \left\{ p_1 + (1-\theta)p_2 |u(t)|^2 + p_2 |u(t)| + \theta p_3 (x^2(t))^2 \right\} dt - \lambda_1 (x^1(T) - \alpha) - \lambda_2 x^2(T), \quad (14)$$

$$\frac{d x^1}{d t} = x^2, \quad \frac{d x^2}{d t} = (1-x^2)u, \quad \frac{d x^3}{d t} = (\theta b u^2 - x^3)c, \quad (15)$$

$$x^1(0) = x^2(0) = x^3(0) = 0. \quad (16)$$

Класс Ω допустимых управлений состоит из кусочно - непрерывных функций $u(t)$, таких, что при всех $t \in [0, T]$

$$u(t) \in U = \left\{ u \in E^1: |u_0| \leq a \right\}. \quad (17)$$

Изучаются свойства задачи (14) - (18) при произвольном $\theta \in (0, 1)$, в частности, свойства отвечающей ей N -максимальной функции $u(t, x, \theta, \Phi)$. Показано, что эта задача является M_2 -регулярной при любых допустимых значениях своих параметров, но не является в общем случае M_1 -регулярной.

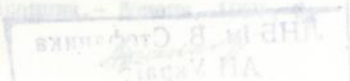
В третьем параграфе рассмотрен случай $\theta = 0$, когда задача становится линейной и допускает решение в явном виде. Построено это решение, и изучены его свойства, указана область Λ допустимых векторов $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$.

В четвертом параграфе строится отвечающий задаче (14) - (17) оператор максимума $M_2(u(\cdot), \theta)$, после чего она сводится к отысканию решений уравнения вида (12). По теореме 5 это уравнение имеет хотя бы одно решение для всякого $\theta \in [0, 1]$, причем, согласно результатам третьего параграфа, оно единственно при $\theta = 0$. Строится априорные оценки, из которых вытекает существование значения $\theta = \theta_1 \in (0, 1)$, такого, что для всех $\theta \leq \theta_1$ оператор $M_2(u(\cdot), \theta)$ является сжимающим, а уравнение (12) имеет единственное решение. Из этих оценок следует также, что $\theta_1 = 1$ для всех достаточно малых $b > 0$.

Вместе с тем численное решение задачи показало, что если в качестве начального приближения принимается оптимальное управление при $\theta = 0$, то последовательные приближения

$$u_{k+1}(\cdot) = M_2(u_k(\cdot), \theta)|_{\theta=1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

сходятся практически для всех рассмотренных частных случаев. Конечно, это не может служить основанием для утверждения о единственности решения. Необходимо рассмотреть весь промежуток $0 < \theta \leq 1$ и убедиться в отсутствии точек ветвления. Такое исследование проводится в пятом и шестом параграфах, для чего используется оператор максимума в пространстве



соприкасающихся траекторий $T_{\theta}(\psi(\cdot), \theta), (\psi(\cdot), \theta) \in \sigma(D) \times [0, 1]$, и соответственно вместо (12) рассматривается уравнение

$$\psi(\cdot) - T_{\theta}(\psi(\cdot), \theta) = 0. \quad (18)$$

Установлены условия, при выполнении которых оператор $T_{\theta}(\psi(\cdot), \theta)$ обладает требуемыми свойствами, а уравнение (18) однозначно разрешимо для всех $\theta \in (0, 1]$. Их выполнение для достаточно малых $\theta > 0$ следует из полученных априорных оценок, а в общем случае может быть легко проверено в процессе численного решения задачи, осуществляемого по алгоритму на основе метода Ньютона-Канторовича.

В коротком последнем параграфе проведен сравнительный анализ применения операторов $M_2(u(\cdot), \theta)$ и $T_{\theta}(\psi(\cdot), \theta)$. Использование второго оператора несколько более сложно с алгоритмической точки зрения, но зато позволяет судить о единственности решения задачи для всей области допустимых параметров, тогда как использование первого оператора только для некоторой малой ее части. В конце параграфа для иллюстрации рассматривается конкретный пример задачи, результаты численного решения которого приведены в приложении.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ.

1. Построен математический аппарат метода операторов максимума. Выделен класс M -регулярных задач, допускающих построение одного из операторов максимума в пространстве управлений $M_1(u(\cdot))$ и $M_2(u(\cdot))$.

2. Доказано, что M -регулярные задачи заведомо имеют решения в классе непрерывных допустимых управлений и что сужения на него $M_1(u(\cdot))$ и $M_2(u(\cdot))$ являются вполне непрерывными операторами и при некоторых дополнительных предположениях удовлетворяют условию Липшица.

3. На примере нелинейной сильно регулярной задачи разработана методика исследования единственности оптимального управления путем продолжения по параметру решения операторного уравнения с модифицированным оператором максимума в пространстве управлений. Для преодоления возникающих здесь трудностей в связи с проблемой дифференцируемости $M_2(u(\cdot))$ предложен прием его сглаживания. Изучены свойства сглаженного оператора и установлены достаточные условия единственности решения задачи.

4. Предложен пример задачи практического происхождения, M_2 -регулярной при любых допустимых значениях параметров, но не являющейся в общем случае M_1 -регулярной. На ее примере разработана методика исследования единственности оптимального управления путем продолжения по параметру решения операторного уравнения с оператором максимума в пространстве сопряженных траекторий. Показаны преимущества этого способа по сравнению с использованием модифицированного оператора максимума в пространстве управлений.

5. Предложены алгоритмы численного решения M -регулярных задач на основе метода Ньютона-Канторовича, которые характеризуются двумя особенностями:

- 1) благодаря использованию метода продолжения по параметру просто решается проблема задания начального приближения;
- 2) эти алгоритмы, как следует из результатов третьей главы, иногда могут быть использованы и для численного решения задач с негладкими по управлению функционалами.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю академику НАН Украины, доктору физико-математических наук, профессору Борису Николаевичу Шеничному за постоянное внимание и помощь в работе.

СПИСОК РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Афанасьев Н.Н. Об одном подходе к решению задач оптимального управления. Доповіді АН УРСР. Сер. "А". - 1971. - №1. - С.3-7.
2. Афанасьев Н.Н., Коцегуб П.Х. Об одной задаче оптимального управления позиционным электроприводом. В кн.: Теория оптимальных процессов. Киев. - 1972. ИК. АН УССР. С. 3-14.
3. Афанасьев Н.Н. К теории регулярных задач оптимального управления. В кн.: Моделирование и оптимизация производственных процессов. Препринт 78-80. Киев. ИК АН УССР. С.35-46.
4. Афанасьев Н.Н. Основы метода операторов максимума в пространстве управлений. - Донецк. 1989. - 48 с. (Препринт/АН УССР, Ин-т прикладной матем. и мех. № 2).
5. Афанасьев Н.Н. О доказательстве однозначной разрешимости одной нелинейной задачи оптимального управления. Нелинейные задачи математической физики. Тезисы докл. VI Республ. конференции. - Донецк. - 1987. - С.

Афанасьев

АВ 30.854
АВ 30.854

Подписано в печать 23.08.94. Формат 60 X 84/16. Бумага тит. Офсетная печать.
Усл. печ. л. 1,0. Заказ 591. Тираж 100 экз. Бесплатно р-т НЭП.
ИОН Украины, 340048 г.Донецк, ул.Университетская, 77