АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

Стопень Галина Яківна

ОСНОВНІ КРАЙОВІ ДИНАМІЧНІ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ БАГАТОСКЛАДОВИХ ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ (ПЛАСТИН)

01.01.03 - математична фізика

А в т о р е ф е р а т
дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних
наук

Київ - 1994

Дисертація є рукопис

Робота виконана на кафедрі диференціальних рівнянь Чернівецького державного університету ім.Ю.Федьковича

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук, доцент ЛЕНЮК М.П.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук, професор БЕРЕЗОВСЬКИЙ А.А.

- кандидат фізико-математичних наук, доцент ГОРДИНСЬКИЙ Л.Д.

Провідна організація - Харківський державний університет, м.Харків

Захист відбудеться "31" жовтня 1994 р. о 15[00] год. на засіданні спеціалізованої Ради Д 016.50.02 при Інституті математики АН України за адресою: 252601, Київ, 4, ГСП, вул.Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інституту

Автореферат розіслано "27" вересня 1994 р.

Вчений секретар спеціалізованої Ради доктор фізико-математичних наук ЛУЧКА А.Ю.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. До найбільш значних технічних досягнень нашого віку відносяться розвиток ядерних джерел енергії і освоєння на базі ракетної техніки високих швидкостей польоту. В обох випадках приходиться мати справу з надзвичайно високими температурами, зв"язаними з процесом одержання енергії та явищами аеродинамічного нагріву. Крім високих рівнів температур в робочих умовах виникають також значні градієнти температури. Наслідком цього є температурні напруження, які є важливим фактором, що визначає довговічність матеріалу. Тому питання дослідження температурних полів і породжених ними температурних напружень викликають істотний практичний і економічний інтерес. Особливо помітним це стає в останні десятиріччя в зв"язку з широким впровадженням композитних матеріалів, які являють собою неоднорідні (як правило кусково-однорідні) тонкостінні елементи конструкцій.

Задачі теплопровідності (стаціонарні й нестаціонарні) піддавались дослідженню як для ізотропних, так і для ізотропних кусково-однорідних тонкостінних елементів конструкцій (стержні, пластини, оболонки). При цьому, як правило, припускалась наявність одної поверхні спряження з виконанням на ній ідеального термічного контакту і відсутність теплових джерел. Що стосується термопружних задач, то розв"язанню і дослідженню піддавались квазістатичні та динамічні задачі (в детермінованій й стохастичній постановці) як в рамках класичної, так і в рамках узагальненої термомеханіки тільки для однорідних об"єктів. Якщо розв"язки часткових випадків статичних і квазістатичних задач для кусково-однорідних елементів конструкцій (двоскладових чи трьохскладових) є в математичній літературі, то динамічні задачі термопружності для кусково-однорідних елементів конструкцій залишались не розв"язаними, не вивченими (навіть для двоскладових елементів).

Цим проблемам і присвячена дана кандидатська дисертація.

Мета роботи. Метою даної роботи є побудова розв"язків динамічних задач термопружності для ізотропних та циліндрично-анізотропних кусково-однорідних тонких пластин.

Методика дослідження. При побудові розв"язків використовувались елементи теорії крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, класичні інтегральні перетворення Фур"є на осі, напівосі і сегменті та їх узагальнення на випадок кусково-однорідного інтервалу, а також гібридні інтегральні перетворення Фур"є-Бесселя і Вебера на полярній осі з n точками спряження і Ханкеля 1-го і 2-го роду на сегменті з n точками спряження.

Наукова новизна дисертаційної роботи полягає в слідуючому:

1) побудовано в замкнутій формі розв"язки нестаціонарної задачі теплопровідності та породженої нею динамічної задачі термопружності для двоскладових ізотропних необмежених тонких пластин;

2) побудовано в замкнутій формі розв"язки нестаціонарної задачі теплопровідності та породженої нею динамічної задачі термопружності для трискладової тонкої необмеженої пластини;

3) побудовано в замкнутій формі розв"язки нестаціонарної задачі термопружності для ізотропної кусково-однорідної тонкої напівобмеженої пластини;

4) побудовано в замкнутій формі розв"язки нестаціонарної задачі теплопровідності та породженої нею динамічної задачі термопружності для ($n+1$)-складової необмеженої циліндрично-анізотропної пластини; для ($n+1$)-складової необмеженої циліндрично-анізотропної пластини з круговим отвором; для ($n+1$)-складової кусково-однорідної обмеженої кругової циліндрично-анізотропної пластини; для ($n+1$)-складової кругової кільцевидної циліндрично-анізотропної пластини.

В усіх випадках на поверхнях спряження справджується неідеальний термічний контакт та ідеальний механічний контакт.

Практична цінність. Використаний метод гібридних інтегральних перетворень з його логічною схемою застосування може бути корисним для побудови точних аналітичних розв"язків досить широкого класу задач теорії пружності, гідромеханіки, електростатики і т.д. Отримані при цьому розв"язки носять алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати їх(з допомогою ЕОМ)для числового аналізу для інженерних розрахунків.

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідались і обговорювались на XIУ науковій конференції викладачів Хмельницького технологічного інституту (м.Хмельницький, 1987 р.), на XIУ міжвузівському науково-методичному семінарі "Удосконалення методики викладання і наукові роботи по теоретичній та прикладній механіці в умовах перебудови вищої школи" (м.Хмельницький, 1988 р.), на республіканській конференції "Крайові задачі математичної фізики" (м.Чернівці, 1988 р.), на науково-технічній конференції "Проблеми екології і ресурсо-збереження "Екоресурс"-I" (м.Чернівці, 1990 р.).

В цілому робота доповідалась на науково-методичному семінарі кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького державного університету (м.Чернівці, 1993 р.), на науковому семінарі відділення "Математичної фізики і теорії нелінійних коливань" Інституту математики АН України (м.Київ, 1993 р.).

Публікації. По темі дисертації опубліковано 11 робіт.

Структура і об"єм роботи. Дисертація складається із вступу, трьох розділів, висновків, додатку і списку цитованої літератури. Повний об"єм роботи складає 160 стор. машинопису. Бібліографічний список включає 81 найменувань. Рисунків 2 .

ЗМІСТ ТА ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ

У вступі до дисертації обгрунтовано актуальність теми, дано коротко огляд літератури по тематиці дисертації і зроблено опис одержаних результатів по розділах.

В першому розділі реферативного характеру викладено математичний апарат: I) інтегральні перетворення Фур"є на декартовій осі, напівосі і сегменті з точками спряження; 2) інтегральні перетворення Фур"є-Бесселя і Вебера на полярній осі з n точками спряження; 3) скінченні інтегральні перетворення Ханкеля 1-го і 2-го роду на сегменті з n точками спряження.

В другому розділі, що складається з чотирьох параграфів (§8, §9, §10, §11) побудовано в замкнутій формі розв"язок динамічної задачі термопружності для двоскладової ізотропної тонкої необмеженої пластини (§ 8); динамічної задачі термопружності для трискла-

…вої ізотропної тонкої необмеженої пластини (§ 9); динамічної задачі термопружності для ($n+1$)-складової тонкої напівобмеженої пластини (§ 10) та динамічної задачі термопружності для ($n+1$)-складової ізотропної тонкої смуги-пластини (§ 11).

Внаслідок ідентичності логічної схеми розв"язання задач наведемо результати десятого параграфу. У цьому параграфі розв"язана нестаціонарна задача теплопровідності та породжена нею динамічна задача термопружності для ізотропної кусково-однорідної тонкої напівобмеженої пластини. Математично це приводить до побудови обмеженого в області

$$\mathcal{D}_+=\left\{(t,x): t\in(0,\infty),\ x\in I_n^+=\bigcup_{j=1}^{n+1}(\ell_{j-1},\ell_j);\ \ell_0\geqslant 0,\ \ell_{n+1}=\infty\right\}$$

розв"язку сепаратної системи рівнянь теплопровідності параболічного типу

$$\frac{1}{a_j^2}\frac{\partial T_j}{\partial t}+\varkappa_j^2T_j-\frac{\partial^2T_j}{\partial x^2}=f_j(t,x),\ (t,x)\in\mathcal{D}_+,\ \ j=\overline{1,n+1} \qquad (1)$$

за початковими умовами

$$T_j(t,x)\Big|_{t=0}=g_j(x),\ x\in(\ell_{j-1},\ell_j),\ \ j=\overline{1,n+1}, \qquad (2)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^{\circ}\frac{\partial}{\partial x}+\beta_{11}^{\circ}\right)T_1\Big|_{x=\ell_0}=g_0(t),\ \ \frac{\partial T_{n+1}}{\partial x}\Big|_{x=\infty}=0 \qquad (3)$$

і умовами неідеального термічного контакту

$$\begin{cases}\left[\left(b_k\frac{\partial}{\partial x}+1\right)T_k-T_{k+1}\right]\Big|_{x=\ell_k}=0,\\ \left(\frac{\partial T_k}{\partial x}-\gamma_k\frac{\partial T_{k+1}}{\partial x}\right)\Big|_{x=\ell_k}=0.\end{cases}\quad k=\overline{1,n}. \qquad (4)$$

Розв"язок задачі (1)-(4) побудовано методом інтегрального перетворення Фур"є на декартовій напівосі з n точками спряження:

$$F_{n,+}[f(z)]=\int_{\ell_0}^{\infty}f(z)V(z,\lambda)\sigma(z)\,dz\equiv\tilde f(\lambda), \qquad (5)$$

$$F_{n,+}^{-1}[\tilde f(\lambda)]=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\tilde f(\lambda)V(z,\lambda)\frac{d\lambda}{\omega_n(\lambda)}\equiv f(z). \qquad (6)$$

$$F_{n,+}[\sigma(z)\mathcal{L}(f(z))] \equiv \int_{l_0}^{\infty} \Big[\sum_{j=1}^{n} a_k^2 \theta(z-l_{j-1})\theta(l_j - z) \times$$

$$\times \frac{d^2 f}{dz^2} + a_{n+1}^2 \theta(z-l_n)\frac{d^2 f}{dz^2}\Big] V(z,\lambda)\sigma(z)dz =$$

$$= -\lambda^2 \tilde{f}(\lambda) - a_1^2 \frac{\sigma_1}{\alpha_{11}^0} V_1(l_0,\lambda) g_0(t) \tag{7}$$

Застосувавши до задачі (1)-(4) інтегральний оператор $F_{n,+}$, що діє за правилом (5), внаслідок основної тотожності (7) одержуємо задачу Коші:

$$\left(\frac{d}{dt}+\lambda^2\right)\sum_{k=1}^{n+1} \tilde{T}_k(t,\lambda) + \sum_{k=1}^{n+1}\left(a_k^2 \varkappa_k^2 + \gamma_k^2\right)\tilde{T}_k(t,\lambda) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 \tilde{f}_k(t,\lambda) - z_1 a_1^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0,\lambda) g_0(t) \equiv \mathcal{F}(t,\lambda),$$

$$\tilde{T}(t,\lambda)\Big|_{t=0} \equiv \Big[\sum_{k=1}^{n+1} \tilde{T}_k(t,\lambda)\Big]\Big|_{t=0} = \tilde{g}(\lambda) \equiv \sum_{k=1}^{n+1} \tilde{g}_k(\lambda). \tag{8}$$

Розв"язком задачі Коші (8) є функція

$$\tilde{T}(t,\lambda) = \int_0^t e^{-(\lambda^2 + a_{n+1}^2 \varkappa_{n+1}^2)(t-\tau)}\left[\tilde{\mathcal{F}}(\tau,\lambda) + \tilde{g}(\lambda)\delta_+(\tau)\right] d\tau. \tag{9}$$

Тут ми припустили, наприклад, що $(a_{n+1}^2 \varkappa_{n+1}^2 - a_j^2 \varkappa_j^2) \geq 0$ для $j = \overline{1,n}$ (в противному випадку $a_{n+1}^2 \varkappa_{n+1}^2$ і $a_j^2 \varkappa_j^2$ міняються місцями).

Застосувавши до функції $\tilde{T}(t,\lambda)$ інтегральний оператор $F_{n,+}^{-1}$, у результаті елементарних перетворень одержимо розв"язок задачі (1)-(4):

$$T_i(t,x) = \int_0^t W_{ij}(t-\tau,x) g_0(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_{l_{k-1}}^{l_k} \mathcal{H}_{jk}(t-\tau,x,\xi) \times$$

$$\times G_k(t,\xi)\,\tau_k\,d\xi\,d\tau, \quad j=\overline{1,n+1}, \quad \ell_{n+1}=\infty. \tag{10}$$

У формулах (10) беруть участь функції

$$G_j(t,x)=a_j^2 f_j(t,x)+g_j(x)\,\delta_+(t), \quad j=\overline{1,n+1}, \tag{11}$$

функції Гріна

$$W_{1j}(t,x)=-\frac{2}{\pi}\,\frac{\tau_1 a_1^2}{\alpha_{11}^{\circ}}\int_0^\infty e^{-(a_{n+1}^2\varkappa_{n+1}^2+\lambda^2)t}\,V_j(x,\lambda)\,\times$$

$$\times V_1(\ell_0,\lambda)\frac{d\lambda}{\omega_n(\lambda)}, \quad j=\overline{1,n+1}, \tag{12}$$

породжені дією температурного режиму на поверхні $x=\ell_0$, і функції впливу

$$\mathcal{H}_{jk}(t,x,\xi)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-(\lambda^2+a_{n+1}^2\varkappa_{n+1}^2)t}\,V_j(x,\lambda)\,V_k(\xi,\lambda)\frac{d\lambda}{\omega_n(\lambda)},$$

$$j,k=\overline{1,n}, \tag{13}$$

породжені дією неперервно розподілених на кожній ділянці пластини теплових джерел.

Породжене нестаціонарним температурним полем (10) динамічне поле напружень в даній пластині опишуть функції

$$\sigma_{xx,j}(t,x)=\frac{E_j}{1-\mu_j^2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x}-m_j T_j(t,x)\right), \quad j=\overline{1,n+1},$$

$$\sigma_{yy,j}(t,x)=\mu_j\sigma_{xx,j}-\alpha_{t_j}E_j T_j(t,x) \tag{14}$$

При цьому відмінні від тотожного нуля компоненти $u_j(t,x)$ вектора переміщень є обмеженим в області $\mathcal{D}_+$ розв"язком сепаратної системи диференціальних рівнянь руху

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}-\frac{1}{c_{1j}^2}\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}=m_j\frac{\partial T_j}{\partial x}\equiv\Psi_j(t,x), \quad j=\overline{1,n+1}, \tag{15}$$

за нульовими початковими умовами, умовами ідеального механічного контакту

$$\begin{cases} \left[u_k(t,x) - u_{k+1}(t,x)\right]\Big|_{x=l_k} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial u_k}{\partial x} - \nu_k \dfrac{\partial u_{k+1}}{\partial x}\right)\Big|_{x=l_k} = \dfrac{1}{\alpha_k}\left[\beta_k T_k(t,l_k) - \beta_{k+1} T_{k+1}(t,l_k)\right] \equiv \dfrac{1}{\alpha_k} G_k(t) \end{cases} \tag{16}$$

і крайовими умовами

$$\left(\bar{\alpha}^{\circ}_{11}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{\beta}^{\circ}_{11}\right)u_1\Big|_{x=0} = \varphi_0(t), \quad \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}\Big|_{x=\infty} = 0. \tag{17}$$

Розв"язок крайової задачі (15)-(17), побудований також методом інтегрального перетворення Фур"є на декартовій напівосі з n точками спряження, має структуру

$$u_j(t,x) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_{l_{k-1}}^{l_k} \mathcal{R}_{jk}(t-\tau,x,\xi)\, T_k(\tau,\xi)\, \bar{\sigma}_k \, d\xi\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t W_{1j}(t-\tau,x)\left[m_1 \bar{\sigma}^{\circ}_{11} T_1(\tau,l_0) - \varphi_0(\tau)\right] d\tau, \quad j = \overline{1,n+1} \tag{18}$$

Тут беруть участь функції впливу

$$\mathcal{R}_{jk}(t,x,\xi) = \frac{2}{\pi} m_k c_k^2 \int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{\beta} \overline{V_j}(x,\beta) \frac{dV_k(\xi,\beta)}{d\xi} \frac{d\beta}{\overline{\omega_n(\beta)}}, \tag{19}$$

$$j,k = \overline{1,n+1},$$

породжені температурним полем, і функції Гріна

$$W_{1j}(t,x) = \frac{\sigma_1 c_{11}^2}{\bar{\alpha}^{\circ}_{11}} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{\beta} \overline{V}_1(l_0,\beta) V_j(x,\beta) \frac{d\beta}{\overline{\omega_n(\beta)}}, \quad j = \overline{1,n+1}. \tag{20}$$

Якщо ще вздовж кожної ділянки ($n+1$)-складової тонкої напівобмеженої пластини діють неперервно розподілені збурюючі сили (сили тиску), то в правій частині формули (18) буде присутній доданок

$$\sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_{l_{k-1}}^{l_k} \mathcal{H}_{jk}(t-\tau,x,\xi)\, f_k(\tau,\xi)\, \sigma_k \, d\xi\, d\tau, \quad j = \overline{1,n+1} \tag{21}$$

де

$$\mathcal{H}_{jk}(t,x,\xi)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{\beta}\,\frac{\overline{V_j(x,\beta)}V_k(\xi,\beta)\,d\beta}{\omega_n(\beta)},\quad j,k=\overline{1,n+1},\qquad (22)$$

а $f_k(\tau,\xi)$ - густина розподілу масових (збурюючих)сил.

Для числової реалізації аналізується випадок двоскладової напівобмеженої пластини, коли джерела відсутні, а на межі здійснюється миттєвий тепловий удар.

Третій розділ присвячено побудові в замкнутій формі розв"язків динамічних задач термопружності для кусково-однорідних циліндрично-анізотропних пластин:

а) ($n+1$)-складових необмежених ц.-ан. пластин (§ I2);

б) ($n+1$)-складових необмежених ц.-ан. пластин з круговим отвором радіуса $R_0>0$ (§ I3);

в) ($n+1$)-складових обмежених кругових ц.-ан.пластин (§ I4);

г) ($n+1$)-складових кругових кільцевидних циліндрично-анізотропних пластин (§ I5).

Внаслідок ідентичності логічної схеми розв"язання задач наведемо один із них (§ I4).

Задача про структуру нестаціонарного температурного поля в обмеженій круговій ($n+1$)-складовій циліндрично-анізотропній пластині математично приводить до побудови обмеженого в області

$$\mathcal{D}_n^+=\left\{(t,r): t\in(0,\infty);\ r\in I_n=\bigcup_{j=1}^{n+1}(R_{j-1},R_j);\ R_0=0,\ R_{n+1}=R<\infty\right\}$$

розв"язку сепаратної системи нестаціонарних рівнянь теплопровідності В-параболічного типу

$$\frac{1}{a_j^2}\frac{\partial T_j}{\partial t}+\varkappa_j^2 T_j-B_0[T_j]=f_j(t,r),\quad j=\overline{1,n+1}\qquad (23)$$

за початковими умовами

$$T_j(t,r)\big|_{t=0}=g_j(r),\ r\in(R_{j-1},R_j),\ j=\overline{1,n+1},\qquad (24)$$

умовами неідеального термічного контакту

$$\begin{cases}\left[\left(b_j\frac{\partial}{\partial r}+1\right)T_j-T_{j+1}\right]\Big|_{r=R_j}=0, & j=\overline{1,n},\\ \left(\frac{\partial T_j}{\partial r}-\lambda_j\frac{\partial T_{j+1}}{\partial r}\right)\Big|_{r=R_j}=0\end{cases}\qquad (25)$$

і крайовими умовами

$$\left.\frac{\partial T_1}{\partial r}\right|_{r=0}=0,\ \left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{22}^{n+1}\right)T_{n+1}\Big|_{r=R_n\equiv R}=g_R(t)$$

$$\left(\alpha_{22}^{n+1}\geqslant 0,\ \beta_{22}^{n+1}\geqslant 0,\ \alpha_{22}^{n+1}+\beta_{22}^{n+1}\neq 0\right). \tag{26}$$

Розв"язок задачі (23)-(26) побудовано методом скінченного інтегрального перетворення Ханкеля І-го роду на сегменті $[0,R_{n+1}]\equiv$ $\equiv[0,R]$ з точками спряження

$$H_{sn,1}[f(r)]=\int_0^R f(r)V(r,\lambda_s)\,r\,\sigma(r)\,dr\equiv f_s\,, \tag{27}$$

$$H^{-1}_{sn,1}[f_s]=\sum_{s=1}^{\infty}f_s\frac{V(r,\lambda_s)}{\|V(r,\lambda_s)\|^2}\equiv f(r), \tag{28}$$

$$H_{sn,1}[\varkappa(r)B_0[f(r)]]\equiv\sum_{k=1}^{n+1}\int_{R_{k-1}}^{R_k}B_0[f(r)]V_k(r,\lambda_s)\,r\,\sigma_k\,dr=$$

$$=-\lambda_s^2 f_s-\sum_{k=1}^{n+1}\gamma_k^2\int_{R_{k-1}}^{R_k}f(r)V_k(r,\lambda_s)\sigma_k\,r\,dr+$$

$$+R_{n+1}\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}V_{n+1}(R_{n+1},\lambda_s)\left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{df}{dr}+\beta_{22}^{n+1}f\right)\Big|_{r=R}. \tag{29}$$

Застосувавши до задачі (23)-(26) інтегральний оператор, що діє за правилом (27), внаслідок основної тотожності (29) одержуємо задачу Коші:

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{d}{dt}+a_j^2\varkappa_j^2+\gamma_j^2+\lambda_s^2\right)T_{js}(t)=\sum_{j=1}^{n+1}a_j^2 f_{js}(t)+$$

$$+\left(\alpha_{22}^{n+1}\right)^{-1}R\,V_{n+1}(R,\lambda_s)\,g_R(t), \tag{30}$$

$$T_s(t)\big|_{t=0}\equiv\left(\sum_{j=1}^{n+1}T_{js}(t)\right)\Big|_{t=0}=\sum_{j=1}^{n+1}g_{js}\equiv g_s. \tag{31}$$

Розв"язком задачі Коші (30)-(31) є функція

$$T_s(t)=\int_0^t e^{-(\lambda_s^2+a_{n+1}^2\varkappa_{n+1}^2)(t-\tau)}\left[f_s(\tau)+g_s\delta_+(\tau)\right]d\tau+$$

$$+\int_0^t e^{-(\lambda_s^2+a_{n+1}^2\varkappa_{n+1}^2)(t-\tau)}\frac{R}{\alpha_{22}^{n+1}}V_{n+1}(R,\lambda_s)g_R(\tau)\,d\tau. \tag{32}$$

Застосувавши до функції $T_s(t)$ інтегральний оператор $H_{sn,1}^{-1}$, у результаті елементарних перетворень одержимо розв"язок задачі (23)-(26):

$$T_m(t,r)=\sum_{j=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_{j-1}}^{R_j}\mathcal{H}_{mj}(t-\tau,r,\rho)G_j(\tau,\rho)\sigma_j\rho\,d\rho\,d\tau+$$

$$+\int_0^t W_{n+1,m}(t-\tau,r)g_R(\tau)\,d\tau,\quad m=\overline{1,n+1}. \tag{33}$$

У рівностях (33) беруть участь компоненти функції Гріна

$$W_{n+1,m}(t,r)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{R}{\alpha_{22}^{n+1}}e^{-(\lambda_s^2+a_{n+1}^2\varkappa_{n+1}^2)t}\frac{V_m(r,\lambda_s)V_{n+1}(R,\lambda_s)}{\|V(r,\lambda_s)\|^2}, \tag{34}$$

$$m=\overline{1,n+1},$$

породжені дією теплового режиму на межі $r=R$, функції впливу

$$\mathcal{H}_{mj}(t,r,\rho)=\sum_{s=1}^{\infty}e^{-(\lambda_s^2+a_{n+1}^2\varkappa_{n+1}^2)t}\frac{V_m(r,\lambda_s)V_j(\rho,\lambda_s)}{\|V(r,\lambda_s)\|^2}, \tag{35}$$

$$m,j=\overline{1,n+1},$$

породжені дією неперервно розподілених теплових джерел, і функції

$$G_j(t,r)=a_j^2 f_j(t,r)+g_j(r)\delta_+(t),\quad j=\overline{1,n+1}. \tag{36}$$

Тут $\delta_+(t)$ - міра Дірака, зосереджена в точці $t=0+$.

Породжене нестаціонарним температурним полем, яке описує вектор-функція $\vec{T}=\{T_1,T_2,\dots,T_{n+1}\}$, де T_m обчислюється за формулами (33), динамічне поле напружень в $(n+1)$-складовій обмеженій круговій ц.-ан.пластині опишуть функції

$$\sigma_{rr,m}(t,r)=E_{*m}\left[\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\nu_{r\varphi,m}}{r}\right)u_m(t,r)-\alpha^*_{tm}T_m(t,r)\right],\ m=\overline{1,n+1},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi,m}(t,r)=E_{*m}\left[\left(\nu_{r\varphi m}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\kappa_m^2}{r}\right)u_m(t,r)-\alpha^t_{*m}\kappa_m^2T_m(t,r)\right]. \quad (37)$$

Функції $u_m(t,r)$ є обмеженим в області $\mathcal{D}_n^+$ розв"язком сепаратної системи рівнянь руху в переміщеннях B-гіперболічного типу

$$\frac{1}{c_{1m}^2}\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2}-B_{\kappa m}[u_m]=\mathcal{F}_m(t,r),\quad m=\overline{1,n+1}, \quad (38)$$

за початковими умовами

$$u_m(t,r)\Big|_{t=0}=\varphi_m(r),\ \frac{\partial u_m}{\partial t}\Big|_{t=0}=\Psi_m(r), \quad (39)$$

умовами ідеального механічного контакту

$$\begin{cases}\left[u_m(t,r)-u_{m+1}(t,r)\right]\Big|_{r=R_m}=0,\quad m=\overline{1,n},\\ \left[\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\nu_{r\varphi,m}}{r}\right)u_m-\mu_m\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\nu_{r\varphi,m+1}}{r}\right)u_{m+1}(t,r)\right]\Big|_{r=R_m}=G_m(t),\end{cases} \quad (40)$$

і крайовими умовами

$$\frac{\partial u_1}{\partial r}\Big|_{r=0}=0,\ \left(\bar\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial r}+\bar\beta_{22}^{n+1}\right)u_{n+1}(t,r)\Big|_{r=R}=\bar g_R(t). \quad (41)$$

Розв"язок крайової задачі (38)-(41), побудований також методом скінченного інтегрального перетворення Ханкеля I-го роду на сегменті $[0,R]$ з n точками спряження $r=R_j$ $(j=\overline{1,n})$, має структуру:

$$u_m(t,r)=\sum_{j=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_{j-1}}^{R_j}\mathcal{H}_{(\kappa);mj}(t-\tau,r,\rho)\left[c_{1j}^2f_j(\tau,\rho)+\Psi_j(\rho)\delta_+(\tau)\right]\times$$

$$\times\bar\sigma_j\rho\,d\rho\,d\tau+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{j=1}^{n+1}\int_{R_{j-1}}^{R_j}\mathcal{H}_{(\kappa);mj}(t,r,\rho)\varphi_j(\rho)\bar\sigma_j\rho\,d\rho+$$

$$+\sum_{j=1}^{n+1} e_{1j}^2 \int_0^t \int_{R_{j-1}}^{R_j} \mathcal{H}_{(k);mj}(t-\tau, r, \rho) T_j(\tau, \rho) \bar{\sigma}_j \rho \, d\rho \, d\tau +$$

$$+\int_0^t \mathfrak{M}_{(k);n+1,m}(t-\tau, r) \left[\bar{g}_R(\tau) - \bar{\alpha}_{22}^{n+1} \alpha_{t_{n+1}}^* T_{n+1}(\tau, R) \right] d\tau,$$

$$m = \overline{1, n+1}. \qquad (42)$$

Тут

$$\mathfrak{M}_{(k);n+1,m}(t,r) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin\beta_s t}{\beta_s} \frac{W_{(k);m}(r,\beta_s) W_{(k);n+1}(R,\beta_s)}{\bar{\alpha}_{22}^{n+1} \, \| W_{(k)}(r,\beta_s) \|^2} \times \qquad (43)$$

$$\times \, e_{1,n+1}^2 \, \bar{\sigma}_{n+1} R$$

компоненти функції Гріна, породжені крайовою умовою на поверхні $r = R_{n+1} \equiv R$

$$\mathcal{K}_{(k);mj}(t,r,\rho) = \sum_{s=1}^{n+1} \frac{\sin\beta_s t}{\beta_s} \frac{W_{(k);m}(r,\beta_s) W_{(k);j}(\rho,\beta_s)}{\| W_{(k)}(r,\beta_s) \|^2}; \qquad (44)$$

$$m, j = \overline{1, n+1}.$$

компоненти функції Коші, породжені дією початкового збурення (масових сил) і

$$\mathcal{H}_{(k);mj}(t,r,\rho) = \sum_{s=1}^{n+1} \frac{\sin\beta_s t}{\beta_s} \frac{W_{(k);m}(r,\beta_s)}{\| W_{(k)}(r,\beta_s) \|^2} \times \left[\left(\alpha_{t_j}^* \frac{d}{d\rho} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\alpha_{t_j}^* - \alpha_{t_j}^0}{\rho} \right) W_{(k);j}(\rho,\beta_s) \right]; \quad m, j = \overline{1, n+1},$$

функції впливу, породжені дією нестаціонарного температурного поля.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ

1. Побудовано в замкнутій формі розв"язок динамічної задачі термопружності для двоскладових ізотропних необмежених тонких пластин методом інтегрального перетворення Фур"є на декартовій осі з одною точкою спряження.

2. Методом інтегрального перетворення Фур"є на декартовій осі з двома точками спряження побудовано в замкнутій формі розв"язки нестаціонарної задачі теплопровідності й породженої нею динамічної задачі термопружності для трискладової тонкої необмеженої ізотропної пластини.

3. Побудовано в замкнутій формі розв"язок динамічної незв"язаної задачі термопружності для ($n+1$)-складової напівбезмежної ізотропної тонкої пластини методом інтегрального перетворення Фур"є на декартовій напівосі з n точками спряження. Базою служить розв"язок нестаціонарної задачі теплопровідності, побудований тим же методом.

4. Методом скінченного інтегрального перетворення Фур"є на сегменті з n точками спряження побудовано в замкнутій формі розв"язок нестаціонарної задачі теплопровідності та породженої нею динамічної задачі термопружності для ($n+1$)-складової необмеженої циліндрично-анізотропної пластини.

5. Методом гібридного інтегрального перетворення Фур"є-Бесселя на полярній осі $r \geq 0$ з n точками спряження одержано в замкнутій формі розв"язки нестаціонарної задачі теплопровідності та породженої нею динамічної задачі термопружності для ($n+1$)-складової необмеженої циліндрично-анізотропної пластини.

6. Методом гібридного інтегрального перетворення Вебера на полярній осі $r \geq R > 0$ з n точками спряження одержано в замкнутій формі розв"язки нестаціонарної задачі теплопровідності і викликаної нею динамічної задачі термопружності для ($n+1$)-складової необмеженої циліндрично-анізотропної пластини з круговим отвором.

7. Методом скінченного гібридного інтегрального перетворення Ханкеля І-го роду на сегменті $[0, R]$ з n точками спряження

одержано в замкнутій формі розв"язок нестаціонарної задачі теплопровідності й породженої нею динамічної задачі термопружності для ($n+1$)-складової обмеженої кругової циліндрично-анізотропної пластини.

8. Одержано в замкнутій формі розв"язок незв"язаної динамічної задачі термопружності (на базі нестаціонарної задачі теплопровідності) для ($n+1$)-складової кругової кільцевидної циліндрично-анізотропної пластини методом скінченного гібридного інтегрального перетворення Ханкеля 2-го роду на сегменті $[R_0, R]$, де $R_0 > 0$, з n точками спряження.

9. Виконано числове дослідження залежності структури нестаціонарного температурного поля й породженого ним динамічного термопружного поля від термоопору в двоскладовій напівбезмежній тонкій ізотропній пластині у випадку здійснення теплового удару на межі.

10. Значення одержаних в дисертації результатів полягає в тому, що аналітичні формули, які зображають розв"язки задач, приведених в роботі, носять алгоритмічний характер і можуть бути використані (в рамках запропонованої моделі) в інженерних розрахунках.

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ДИСЕРТАЦІЇ ОПУБЛІКОВАНІ В НАСТУПНИХ РОБОТАХ:

1. Ленюк М.П., Стопень Г.Я. Динамічні задачі термопружності для багатоскладових циліндрично-анізотропних пластин.- Київ, 1993.- 50 с. /Препр./АН України. Ін-т математики; 93 42
2. Стопень Г.Я. Статичні термопружні поля в суцільній багатоскладовій циліндрично-анізотропній пластинці //Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць.- Київ: Ін-т математики АН України, 1992.- Вип.1.- С.196-209.
3. Стопень Г.Я. Динамічна задача термопружності для ізотропної кусково-однорідної тонкої напівобмеженої пластини //Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук.пр.- Київ: Ін-т математики АН України, 1993.- Вип.2.- С.253-261.
4. Стопень Г.Я. Динамічна задача термопружності для ізотропної трискладової тонкої необмеженої пластини //Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб.наук. пр.- Київ: Ін-т математики АН України, 1993.- Вип.4.-С.265-276.
5. Стопень Г.Я. Моделирование нестационарных одномерных полей энерготехнических обьектов //Науч.техн.конф. "Проблемы промышленной экологии", Черновцы, 20-23 мая 1990 г.:Тез. докл.- Черновцы, 1990.- С.150.
6. Стопень Г.Я. Стационарные температурные поля в кусочно-однородной ортотропной полосе-пластине //14-й межвуз. науч.-метод. семинар "Совершенствование методики преподавания и научные работы по теоретической и прикладной механике в условиях перестройки высшей школы", Хмельницкий, 9-11 июня 1988 с.: Тез. докл.- Хмельницкий: Хмельницк.ВЦ облстатуправления,1988.- С.85-86.

Підп. до друку 16.03.94. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,16. Обл.-вид. арк. 0,75.
Тираж 100 пр. Зам. 77 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3