

Київський університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

ПОПОВ Олександр Володимирович

УДК 518.517.944

**ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ
ДЕЯКИХ СПЕКТРАЛЬНИХ ЗАДАЧ
МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

01.01.07 — обчислювальна математика

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ
Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України
1994

I. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність. Проблема власних значень є однією з найбільш актуальних в багатьох галузях фундаментальної та прикладної математики. Багато задач природознавства і техніки можна звести до часткової проблеми власних значень для відповідних диференціальних операторів. Чисельне розв'язування цієї проблеми з достатньою точністю зводиться до розв'язання алгебраїчної задачі на власні значення з матрицями високих порядків. Таким чином, для чисельного розв'язування спектральних задач залишається актуальним питання побудови високоточних методів, які заощаджують ресурси ЕОМ. При цьому важливим аспектом є вірогідність одержуваних чисельних результатів, тобто апіорні і апостеріорні оцінки точності наближених розв'язків.

Мета роботи полягає в побудові і дослідженні схем методу скінченних елементів (МСЕ) четвертого порядку точності (для власних значень), які використовують інтерполяцію Ерміта, а також в практичній реалізації на ЕОМ алгоритмів формування і розв'язування дискретних задач МСЕ для спектральних задач деяких еліптичних диференціальних операторів.

Методи досліджень. Побудову і дослідження властивостей апроксимуючих просторів МСЕ і побудованих з їх застосуванням схем МСЕ для розв'язування спектральних задач проведено на основі методів функціонального аналізу, теорії апроксимації функцій і загальної теорії методу скінченних елементів. При отриманні апіорних і апостеріорних оцінок похибок дискретних задач використано розклад за власними функціями симетричного оператора.

Науков. новизна. В роботі побудовано і досліджено нові схеми методу скінченних елементів підвищеного порядку точності для розв'язування задач на власні значення. При цьому отримані такі результати:

- побудовані простори МСЕ другого степеня - простори кускових інтерполяційних поліномів Ерміта і одержані оцінки похибки інтерполяції функціями з цих просторів;

- використовуючи запропоновані скінченновимірні простори, побудовані схеми МСЕ четвертого порядку точності (для власних значень) для чисельного розв'язування спектральних задач для ряду еліптичних диференціальних операторів;

- доведені оцінки точності наближених розв'язків;
- одержані оцінки похибок розв'язків дискретної задачі, які викликані похибками обчислення елементів матриць цієї задачі.

Практична цінність. В дисертаційній роботі розроблено і програмно реалізовано алгоритм чисельного розв'язання часткової проблеми власних значень для ряду еліптичних диференціальних операторів в одно-, дво- і тривимірних областях, в якому використано запропоновані схеми методу скінченних елементів.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались на IV Всесоюзній конференції "Численные методы в механике сплошной среды" /м. Лагодехі, Груз. РСР, 1975р./, II Республіканській конференції "Обчислювальна математика в сучасному науково-технічному прогресі" /м. Київ, 1978р./, V Всесоюзній конференції "Вариационно-разностные методы в математической физике" /м. Москва 1983р./, Республіканській школі-семинар "Тякети прикладних програм розв'язання задач лінійної алгебри" /м. Київ, 1990р./, XXIII Республіканській школі-семинарі "Питання оптимізації обчислень" /м. Київ, 1990р./, на республіканських семінарах: "Чисельний аналіз" Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова АН України /м. Київ 1983, 1987, 1989 рр./, "Питання теорії різницевої схем" при Київському університеті імені Тараса Шевченка /м. Київ, 1991, 1993 рр./

Публікації. Результати дисертації опубліковано в роботах [1 - 5].

Обсяг і структура роботи. Дисертаційна робота обсягом 113 сторінок машинописного тексту складається з вступу, трьох розділів, висновку, додатку і списку цитованої літератури (89 робіт).

II. ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми роботи, визначено цілі і завдання дослідження, наведено огляд робіт за тематикою дисертації, подано коротку анотацію і сформульовано головні результати дисертаційної роботи.

Нижче використовуються такі позначення: а) точки і вузли обмеженої в \mathbb{R}^n області Ω ($n=1,2,3$) -

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad x^j = (x_{1,j}, \dots, x_{n,j}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n; \quad (1)$$

б) значення функцій і їх похідних у вузлах -

$$u_j = u(x^j), \quad p_{k,j} = \frac{\partial u}{\partial x_k} \Big|_{x=x^j} \left[p_{1,j} \equiv p_j = \frac{du}{dx} \Big|_{x=x^j} \right]; \quad (2)$$

в) прямокутні скінченні елементи -

$$E_1 = \{ x = (x_1, \dots, x_n): x_{k, i_{k-1}} < x_k < x_{k, i_k}, \quad k = 1, \dots, n \}, \quad (3)$$

число скінченних елементів - M , число вузових параметрів в $\bar{\Omega}$ - N , скінченновимірні простори МСЕ k -го степеня на M елементах - $P_{k,M}(\Omega)$ (під степенем простору МСЕ тут розуміється найбільший степінь повного поліному, який точно передається елементами цього простору); г) параметри, які характеризують сітку -

$$h = \max_{1 \leq i \leq M} h_i, \quad h_i = \sqrt{h_{1,i}^2 + \dots + h_{n,i}^2}, \quad h_{k,i_k} = x_{k,i_k} - x_{k,i_{k-1}}; \quad (4)$$

д) симетричні еліптичні додатно визначені диференціальні оператори - \mathcal{L} і \mathcal{M} , оператор головних граничних умов - \mathcal{R}_1 , оператор природних граничних умов - \mathcal{R}_2 ; е) білінійні функціонали, які відповідають операторам \mathcal{L} і \mathcal{M} -

$$a(u, v) \equiv a(v, u) = (\mathcal{L}u, v), \quad \delta(v, u) \equiv \delta(u, v) = (\mathcal{M}u, v); \quad (5)$$

ж) енергетичних функціональних просторів операторів \mathcal{L} і \mathcal{M} - відповідно, $H(\Omega)$ і $H_N(\Omega)$; з) норми в просторах $L_2(\Omega)$ і $H(\Omega)$ - $\|\cdot\|_0$ і $\|\cdot\|_H$, напівнорми і норми в просторі $H_N^m(\Omega)$ -

$$\|v\|_{k,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} (D^\alpha v)^2 dx, \quad \|v\|_{m,\Omega}^2 = \|v\|_{0,\Omega}^2 + \dots + \|v\|_{m,\Omega}^2, \quad (6)$$

$$\text{де } D^\gamma u = \frac{\partial^{|\gamma|} u}{\partial x_1^{\gamma_1} \dots \partial x_n^{\gamma_n}}, \quad |\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n.$$

Спектральні задачі, що розглядаються, можна записати як

$$\mathcal{L}u = \lambda \mathcal{M}u, \quad x \in \Omega, \quad (7)$$

$$\mathcal{R}_1 u = 0, \quad x \in \Gamma_1 \neq \emptyset, \quad (8)$$

$$\mathcal{R}_2 u = 0 \quad x \in \Gamma_2, \quad (9)$$

де $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\bar{\Omega}$, а оператор \mathcal{M} такий, що $H_N(\Omega)$ збігається з $L_2(\Omega)$. Властивості операторів $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ цієї задачі, тобто для

$u, v \in H(\Omega)$

$$\begin{aligned} \kappa_L \|u\|_H^2 &< a(u, u) < K_L \|u\|_H^2 \quad (\kappa_L, K_L > 0), \\ \kappa_N \|u\|_0^2 &< \delta(u, u) < K_N \|u\|_0^2 \quad (\kappa_N, K_N > 0), \\ a(u, u) &\geq \gamma_L^2 \|u\|_0^2. \end{aligned} \quad (10)$$

забезпечуть цілком неперервне вкладення простору $H(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Тому задача (7)-(9) має дискретний спектр

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_l < \dots \quad (11)$$

і еквівалентна варіаційній задачі

$$a(u, v) - \lambda \delta(u, v) = 0, \quad \forall v \in H(\Omega), \quad (12)$$

для чисельного розв'язування якої використовується метод скінченних елементів.

В розділі I, який складається з трьох параграфів, побудовано скінченновимірні простори МСЕ другого степеня $P_{2,M}(\Omega)$, базисом яких є кускові інтерполяційні многочлени Ерміта.

В §1.1 розглянуто одновимірний ($n=1$) випадок. Область $\Omega = (a, b)$ ділиться на скінченні елементи E_i (3), де $x_{i,1} = x^i$ ($i = 1, \dots, M$), $a = x^0 < x^1 < x^2 < \dots < x^{M-1} < x^M = b$. Інтерполяційний поліном Ерміта другого степеня $u_1(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$ однозначно визначається на елементі E_i одним із таких двох наборів вузлових параметрів як

$$u_{i-1}, u_i, p_i \quad \text{або} \quad u_{i-1}, p_{i-1}, u_i. \quad (13)$$

В §1.2 розглянуто двовимірний ($n=2$) випадок, коли область Ω можна розділити на прямокутні елементи E_i (3). Інтерполяційний многочлен Ерміта в цьому випадку має вигляд ($x \in E_i$)

$$u_i(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_1 x_2 + \alpha_6 x_2^2 + \alpha_7 x_1^2 x_2 + \alpha_8 x_1 x_2^2$$

і однозначно визначається через вісім умов (вузлових параметрів) одним із таких наборів (при позначеннях (2) і нумерації вершин елемента згідно з рис. 1):

$$\begin{aligned}
 &u_1, u_2, p_{1,2}, p_{2,2}, u_3, p_{1,3}, p_{2,3}, u_4; \\
 &u_1, p_{1,1}, u_2, p_{2,2}, u_3, p_{2,3}, u_4, p_{1,4}; \\
 &u_1, p_{2,1}, u_2, p_{1,2}, u_3, p_{1,3}, u_4, p_{2,4}; \\
 &u_1, p_{1,1}, p_{2,1}, u_2, u_3, u_4, p_{1,4}, p_{2,4}.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

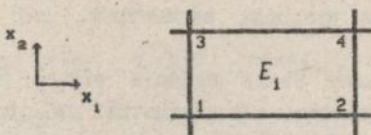


Рис. 1

В §1.3 розглянуто тривимірний ($n=3$) випадок, коли область Ω можна розділити на прямокутні елементи E_1 (З). Тепер інтерполяційний многочлен Ерміта має вигляд ($x \in E_1$)

$$\begin{aligned}
 u_I(x) = &\alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_3 + \alpha_5 x_1^2 + \alpha_6 x_1 x_2 + \alpha_7 x_1 x_3 + \alpha_8 x_2^2 + \alpha_9 x_2 x_3 + \\
 &+ \alpha_{10} x_3^2 + \alpha_{11} x_1^2 x_2 + \alpha_{12} x_1^2 x_3 + \alpha_{13} x_1 x_2^2 + \alpha_{14} x_1 x_2 x_3 + \alpha_{15} x_1 x_3^2 + \\
 &+ \alpha_{16} x_2^2 x_3 + \alpha_{17} x_2 x_3^2 + \alpha_{18} x_1^2 x_2 x_3 + \alpha_{19} x_1 x_2^2 x_3 - \alpha_{20} x_1 x_2 x_3^2
 \end{aligned}$$

і однозначно визначається набором двадцяти вузлових параметрів (на рис.2 зображено два таких набори).

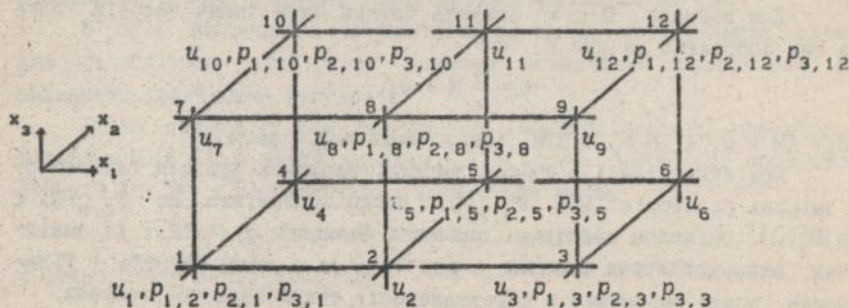


Рис. 2

У всіх випадках для отримання виграшу у порівнянні з інтерполяційними многочленами Лагранжа, які традиційно застосовуються,

необхідно використати елементи E_1 з наборами вузлових параметрів двох різних видів, розміщуючи їх (елементи) в Ω так, щоб вони не тувались через один (в одновимірному випадку) або щоб з кожною стороною (у двовимірному випадку) чи гранню (у тривимірному) елемента з одним видом набору параметрів межував елемент з другим. Тому розглядаються набори вузлових параметрів, які допускають попарне використання.

В одновимірному випадку таких наборів тільки два - вони наведені в (13), і кількість вузлових параметрів на $[a, b]$

$$N = \frac{3}{2} M + \mu_1,$$

де $\mu_1 = 1, \frac{3}{2}, 2$ в залежності від парності/непарності M і від

того, які параметри у вузлі x^0 . При використанні інтерполяційних поліномів Лагранжа $N_L = 2M + 1$. Отже, в цьому випадку кількість вузлових параметрів на $[a, b]$ скорочується на чверть - $N/N_L \approx 3/4$.

Для двовимірного випадку всі можливі набори подані в (14) і складають такі пари: перший і четвертий, другий і третій набори. Тоді загальна кількість вузлових параметрів в $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ буде

$$N = 2M + \mu_2.$$

Оскільки при використанні інтерполяційних поліномів Лагранжа $N_L = 3M + \tilde{\mu}_2$, то маємо $N/N_L \approx 2/3$, тобто скорочення на третину.

Для випадку $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ існують чотири пари таких наборів (одна з них зображена на рис.2), а

$$N = \frac{5}{2} M + \mu_3.$$

$N_L = 4M + \tilde{\mu}_3$ і $N/N_L \approx 5/8$ (скорочення в 1,6 раза).

При виписуванні в якому вигляді базисних функцій скінченно-вимірних просторів МСЕ $P_{2,M}(\Omega)$ легко впевнитися, що $P_{2,M}(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$. Оцінюючи найбільші значення базисних функцій і їх похідних, використовуючи розклад в ряд Тейлора і лему Брембла - Гільберта, можна впевнитися в справедливості нижченаведеної теореми.

Теорема 1. *Хай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$), а $P_{2,M}(\Omega)$ - простір МСЕ на кус збит поліномів Ерміта, тоді $P_{2,M}(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$. Якщо $u(x)$ така функція, що для неї існує і перполянт $u_1(x) \in P_{2,M}(\Omega)$, і*

якщо $u(x) \in C^3(\bar{\Omega})$, то

$$|u(x) - u_1(x)| \leq \frac{2n}{81} M_3 h^3, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \right| \leq M_3 h^2, \quad x \in \bar{\Omega} \quad (15)$$

($k = 1, \dots, n$, $M_3 = \max_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ 1 \leq i \leq 3}} |D^i u(x)|$), а якщо $u(x) \in W_2^3(\bar{\Omega})$, то

$$|u(x) - u_1(x)|_{1, \Omega} \leq C_1 h^{3-\ell} |u(x)|_{3, \Omega} \quad (C_1 > 0, \ell = 0, 1). \quad \square \quad (16)$$

Якщо область Ω неможливо безпосередньо розділити на прямокутні скінченні елементи E_1 (3), то в ряді випадків вихід як для скінченних елементів на поліномах Лагранжа: замінов змінних конформно перетворити Ω в область, що допускає такий поділ, або поділити початкову область на випуклі криволінійні чотирикутники чи шестигранники (відповідно) і потім кожний з них перетворити суб- або ізопараметричною заміною змінних на так званий канонічний елемент

$$E_0 = \{ \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) : 0 < \xi_k < 1, k=1, \dots, n \} \quad (n = 2, 3). \quad (17)$$

В розділі II побудовані раніше простори WCE другого степеня $P_{2, n}(\Omega)$ використано для з'ясування дискретних задач, які наближують розв'язки задач на власні значення для ряду операторів, досліджено питання збіжності і точності, а також деякі аспекти формування і розв'язування таких дискретних задач на E_0

В §2.1 розглянуто дискретизацію трьох спектральних задач для симетричних еліптичних додатно визначених операторів із зміщаними граничними умовами.

Перша задача - для змичайного диференціального оператора. Для задачі (12) в цьому випадку $\Omega = (a, b)$, $H(\Omega)$ є простором функцій із $W_2^1(a, b)$, для яких виконується умова

$$u(b) = 0, \quad (18)$$

а функціонали записуються як

$$a(u, v) = \beta u(a)v(a) + \int_a^b \left[p(x) \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx} + q(x)u(x)v(x) \right] dx, \quad (19)$$

$$\delta(u, v) = \int_a^b r(x)u(x)v(x) dx \quad (20)$$

причому $p(x) \in C^1(\Omega)$, $q(x), r(x) \in C(\Omega)$ і (для $x \in [a, b]$)

$$0 < q(x) < c_2, \quad 0 < c_3 < r(x) < c_4, \quad 0 < c_5 < p(x) < c_6, \quad (21)$$

$$\beta > 0.$$

Друга задача - для оператора системи рівнянь Ляме у тривимірній області $\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) : a_k \leq x_k \leq b_k, k=1,2,3\}$. Тут простір $H(\Omega) = H_1(\Omega) \times H_2(\Omega) \times H_3(\Omega)$, де $H_k(\Omega)$ ($k=1,2,3$) складається з функцій $u_k \in H_2^1(\Omega)$, які задовольняють умові

$$u_k(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : a_k \leq x_k \leq b_k, k=1,2, x_3 = b_3\}, \quad (22)$$

простір $H_N(\Omega)$ складається з вектор-функцій $\bar{u}(x) \in L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, а функціонали мають вигляд

$$a(\bar{u}, \bar{v}) =$$

$$= \int_{\Omega} \left[(\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right. \right.$$

$$\times \left. \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right. \quad (23)$$

$$+ \left. \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right.$$

$$\times \left. \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) dx,$$

$$b(\bar{u}, \bar{v}) = \int_{\Omega} \rho(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) dx, \quad (24)$$

де λ, μ - константи Ляме, $\rho > 0$ - густина матеріалу.

Найбільш цікава третя задача - для оператора системи рівнянь прикладної теорії тонких оболонок. У цьому випадку простір $H_N(\Omega) = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, а простір $H(\Omega) = H_1(\Omega) \times H_2(\Omega) \times H_3(\Omega)$, причому простори $H_l(\Omega)$ ($l=1,2$) складаються з функцій $u_l \in H_2^1(\Omega)$, для яких виконується умова

$$u_l(x) = 0, \quad x \in \Gamma_l \subseteq \partial\Omega \quad (25)$$

і функції $u_3(x) \in H_3(\Omega) \subset H_2^2(\Omega)$ задовольняють умовам (в розумінні сліду)

$$u_3(x) = 0, \quad x \in \Gamma_3 \subseteq \partial\Omega, \quad (26)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_{31} \subseteq \Gamma_3 \quad (27)$$

(n - зовнішня нормаль до границі Γ_{31}). Білінійні функціонали для $\bar{u}(x), \bar{v}(x) \in H(\Omega)$ записуються як

$$\begin{aligned} a(\bar{u}, \bar{v}) = & \frac{E}{1-\nu^2} \int_{\Omega} \delta(x) \left\{ \varepsilon_1(\bar{u}) \cdot \varepsilon_1(\bar{v}) + \varepsilon_2(\bar{u}) \cdot \varepsilon_2(\bar{v}) + \nu \left[\varepsilon_1(\bar{u}) \cdot \varepsilon_2(\bar{v}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \varepsilon_2(\bar{u}) \cdot \varepsilon_1(\bar{v}) \right] + \frac{1-\nu}{2} \cdot \omega(\bar{u}) \cdot \omega(\bar{v}) + \frac{\delta^2(x)}{12} \left[\kappa_1(\bar{u}) \cdot \kappa_1(\bar{v}) + \kappa_2(\bar{u}) \cdot \kappa_2(\bar{v}) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \nu \left[\kappa_1(\bar{u}) \cdot \kappa_2(\bar{v}) + \kappa_2(\bar{u}) \cdot \kappa_1(\bar{v}) \right] + 2(1-\nu) \cdot \tau(\bar{u}) \cdot \tau(\bar{v}) \right] \right\} A_1(x) \cdot A_2(x) dx, \end{aligned}$$

$$\delta(\bar{u}, \bar{v}) = \int_{\Omega} \rho(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3) \delta(x) \cdot A_1(x) \cdot A_2(x) dx,$$

де $\rho > 0$ - густина, $E > 0$ - модуль Юнга, ν - коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки ($|\nu| < 1$), деформації

$$\varepsilon_1(\bar{w}) = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_{3-1}} \cdot w_{3-1} + k_{11}(x) \cdot w_3,$$

$$\omega(\bar{w}) = \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{w_1}{A_2} \right) + \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{w_2}{A_1} \right), \quad \gamma_1(\bar{w}) = k_{11} w_1 - \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial w_3}{\partial x_1},$$

$$\kappa_1(\bar{w}) = \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial \gamma_1(\bar{w})}{\partial x_1} + \frac{1}{A_1 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_{3-1}} \cdot \gamma_{3-1}(\bar{w}), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \tau(\bar{w}) = & \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\partial \gamma_1(\bar{w})}{\partial x_2} + \frac{1}{A_1} \cdot \frac{\partial \gamma_2(\bar{w})}{\partial x_1} + \frac{k_{11}}{A_2} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x_2} + \frac{k_{22}}{A_1} \cdot \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \\ & - \frac{k_{11} + k_{22}}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial A_1}{\partial x_2} \cdot w_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \cdot w_2 \right] + \frac{1}{A_1^2 A_2} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial w_3}{\partial x_1} + \frac{1}{A_1 A_2^2} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial w_3}{\partial x_2} \end{aligned}$$

($i=1,2$), функції $\delta(x)$, $A_1(x)$, $A_2(x)$, $k_{11}(x)$, $k_{22}(x)$ характеризують геометричні властивості оболонки і її середньої поверхні, причому $\delta \in C(\Omega)$, $A_1, A_2, k_{11}, k_{22} \in C^1(\Omega)$ і

$$0 < c_1 \leq \delta(x) \leq c_2, \quad 0 < c_3 \leq A_1(x) \leq c_4, \quad |k_{11}(x)| \leq c_5, \quad x \in \Omega.$$

При дискретизації цих задач методом скінченних елементів простір $H(\Omega)$ в (12) замінюється скінченновимірним простором S_M^0 .

тобто замість (12) маємо скінченновимірну варіаційну задачу

$$a(u^h, v^h) - \lambda^h \delta(u^h, v^h) = 0, \quad \forall v^h \in S_M^0, \quad (29)$$

яка еквівалентна задачі

$$\lambda_l^0 = \min_{u^h \in S_M^0} a(u^h, u^h) \equiv a(v_l^h, v_l^h), \quad l = 1, 2, \dots, n_0, \quad (30)$$

$$\delta(u^h, u^h) = 1,$$

$$\delta(u^h, v_k^h) = 0, \quad k = 1, \dots, l-1 \quad (l > 1),$$

де N_0 - розмірність простору S_M^0 . Виразивши функції $u^h \in S_M^0$ через її вузлові параметри в $\bar{\Omega}$, перейдемо від функціоналів до квадратичних форм $a(u^h, u^h) = y^T \bar{A} y$, $\delta(u^h, u^h) = y^T \bar{B} y$, де y - вектор вузлових параметрів функції u^h в $\bar{\Omega}$, \bar{A} і \bar{B} - квадратні симетричні матриці. Із необхідних умов умовного мінімуму (30) отримуємо узагальнену алгебраїчну задачу на власні значення

$$Ax = \lambda Bx, \quad (31)$$

де x - вектор невідомих вузлових параметрів в $\bar{\Omega}$, тобто тих, які не можна визначити з головних крайових умов (8), A і B - симетричні додатно визначені матриці порядку N_0 .

Скінченновимірний підпростір вибирається виходячи з вимоги $S_M^0 \subset H(\Omega)$. Для першої задачі $H(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$, тому за S_M^0 вибрано підпростір функцій, для яких виконується умова (18), із побудованого в §1.1 простору MCE $P_{2,M}(\Omega)$. У випадку другої задачі $S_M^0 = S_{M,1}^0 \times S_{M,2}^0 \times S_{M,3}^0$, $S_{M,k}^0 \subset H_k(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$ і тому $S_{M,k}^0$ складається з кускових многочленів Ерміта з $P_{2,M}(\Omega)$, які задовольняють умові (22).

При дискретизації третьої задачі необхідно звернути увагу на те, що компоненти вектор-функцій з $H(\Omega)$ належать різним просторам. Тому для перших двох компонент використовується $P_{2,M}(\Omega)$, а для третьої - простір кускових бікубічних многочленів Ерміта $P_{3,M}(\Omega) \subset W_2^2(\Omega)$. Таким чином, $S_M^0 = S_{M,1}^0 \times S_{M,2}^0 \times S_{M,3}^0$, де $S_{M,1}^0$ і $S_{M,2}^0$ складають поліноми з $P_{2,M}(\Omega)$, які задовольняють відповідній умові (25), а $S_{M,3}^0$ - поліноми з $P_{3,M}(\Omega)$, для яких виконуються умови (26).

В §2.2 досліджено збіжність розв'язків дискретних задач до узагальнених розв'язків вихідних задач. Дослідження питань збіжності для спектральних крайових задач базується на такому x

дослідженні для стаціонарних крайових задач з тими ж операторами і крайовими умовами.

Стаціонарну крайову задачу можна записати у вигляді

$$a(u, v) - \delta(f, v) = 0, \quad \forall v \in \mathbb{H}(\Omega) \quad (32)$$

при умовах (10). Проводячи аналогічно спектральним задачам дискретизацію методом скінченних елементів, отримаємо дискретну задачу

$$a(u^h, v^h) - \delta(f, v^h) = 0, \quad \forall v^h \in S_M^0, \quad (33)$$

або в алгебраїчній формі $Ax = b$. У нижченаведеній теоремі вирішуються питання збіжності і точності розв'язку задачі (33).

Теорема 2. Якщо $u^h(x) \in S_M^0 \subset \mathbb{H}(\Omega)$ - розв'язок задачі (33), а розв'язок задачі (32), (10) $u(x) \in \mathbb{U}(\Omega)$, то

$$a(u - u^h, u - u^h) \leq C_1^2 h^4, \quad (34)$$

$$\|u - u^h\|_{\mathbb{H}} \leq C_2 h^2, \quad C_2 > 0, \quad (35)$$

де простір $\mathbb{U}(\Omega)$ з відповідною нормою $\|\cdot\|_{\mathbb{U}}$ визначається так:

- для першої задачі - $\mathbb{U}(\Omega) = \mathbb{H}_2^3(\Omega)$ і $\|\cdot\|_{\mathbb{U}} = \|\cdot\|_3$;

- для другої задачі - $\mathbb{U}(\Omega) = \mathbb{H}_2^3(\Omega) \times \mathbb{H}_2^3(\Omega) \times \mathbb{H}_2^3(\Omega)$
 $\|\cdot\|_{\mathbb{U}} = (\|\cdot\|_3^2 + \|\cdot\|_3^2 + \|\cdot\|_3^2)^{0,5}$;

- для третьої задачі - $\mathbb{U}(\Omega) = \mathbb{H}_2^3(\Omega) \times \mathbb{H}_2^3(\Omega) \times \mathbb{H}_2^4(\Omega)$ і
 $\|\cdot\|_{\mathbb{U}} = (\|\cdot\|_3^2 + \|\cdot\|_3^2 + \|\cdot\|_4^2)^{0,5}$. \square

Для перших двох випадків ці результати безпосередньо випливають з відомих теорем про точність схем МСЕ для відповідних операторів другого порядку і теореми 1, а в третьому випадку доведення аналогічне, але взято до уваги, що компоненти вектор-функції з $\mathbb{H}(\Omega)$ належать різним просторам. Це зауваження суттєве і для наступної теореми, в якій розв'язуються питання збіжності і точності для спектральних задач.

Теорема 3. Якщо власні функції задачі (12), (10) $v_k(x) \in \mathbb{V}''(\Omega)$ ($k=1, 2, \dots$), то для кожного $l = 1, 2, \dots$ існує таке $h_0 > 0$, що для $0 < h \leq h_0$ виконуються нерівності

$$\lambda_l \leq \lambda_l^h \leq \lambda_l + C_l h^4, \quad (36)$$

$$a(v_l - v_l^h, v_l - v_l^h) \leq C_l' h^4, \quad \|v_l - v_l^h\|_{\mathbb{H}} \leq C_l'' h^2,$$

де $\lambda_l^h, v_l^h \in S_M^0$ - розв'язки задачі (29), v_l - власна функція,

відповідна $\lambda_i, C_i, C_i', C_i'' > 0$ - незалежні від h постійні. \square

Необхідно зауважити, що для перших двох задач при певних обмеженнях на коефіцієнти оператора \mathcal{L} або область Ω відома оцінка $\|u\|_2 \leq c \|Xu\|_0$ ($c > 0$); в цьому випадку можна використати прийом Нітше і отримати оцінки розв'язків в нормі простору $L_2(\Omega)$:

$$\|u - u^h\|_0 \leq C_3 h^3, \quad \|v_t - v_t^h\|_0 \leq C_t''' h^3 \quad (C_3, C_t''' > 0).$$

В §2.3 розглянуто деякі аспекти проведення на ЕОМ дискретизації спектральної задачі (12).

Формування матриць алгебраїчної задачі (31) здійснюється за таким алгоритмом: 1) увід вихідної інформації; 2) автоматичне формування і/або увід масивів, які містять інформацію про вузли, скінченні елементи, вузлові параметри і зв'язки між ними, тобто розбиття вихідної області Ω на елементи; 3) обчислення матриць жорсткості і маси кожного скінченного елемента; 4) формування з матриць жорсткості і маси скінченних елементів матриць алгебраїчної задачі (31) у формі, зручній для алгоритму розв'язання цієї задачі.

При обчисленні матриць жорсткості і маси окремих скінченних елементів враховується збіг цих матриць або їх частин з раніше обчисленими. Глобальні матриці жорсткості (A) і маси (B) задачі (31) в одновимірному випадку є стрічковими, а в дво- або тривимірному випадку мають профільно-розріджену структуру. В останньому випадку перенумерація вузлів перед формуванням матриць A і B дозволяє оптимізувати цю структуру таким чином, щоб профіль (розмір оболонки) і/або ширина стрічки матриць були мінімальні.

При формуванні глобальних матриць жорсткості і маси необхідно обчислювати їх елементи так, щоб зберігалась точність, яка забезпечується застосуванням методу скінченних елементів для розв'язання конкретної задачі, тобто оцінки (36) не повинні погіршуватися. Похибки, які впливають на точність наближеного розв'язку, виникають через використання при обчисленні елементів матриць формул чисельного інтегрування, через неточну апроксимацію області Ω скінченними елементами (звичайно біля її границі) і таке інше. Тому замість задач (29) або (31) в дійсності отримують такі задачі, як

$$\tilde{a}(\tilde{u}^h, v^h) - \tilde{\lambda}^h \tilde{a}(\tilde{u}^h, v^h) = 0, \quad \forall v^h \in S_M^0, \quad \text{або} \quad \tilde{A} \tilde{x} = \tilde{\lambda}^h \tilde{B} \tilde{x}. \quad (37)$$

Позначимо $A_{\bullet} = A - \tilde{A}$, $B_{\bullet} = B - \tilde{B}$, $a_{\bullet}(u^h, v^h) = a(u^h, v^h) - \tilde{a}(u^h, v^h)$, $\delta_{\bullet}(u^h, v^h) = \delta(u^h, v^h) - \tilde{\delta}(u^h, v^h)$. У наступній теоремі оцінюється вплив цих похибок на точність розв'язків задачі (37) відносно розв'язків задачі (12).

Теорема 4. *Хай $\tilde{\lambda}^h$, \tilde{v}^h і \tilde{x} відповідні один одному власні значення, функція і вектор задачі (37), причому $\delta(\tilde{v}^h, \tilde{v}^h) \equiv \tilde{x}^T B \tilde{x} = 1$. Якщо матриця \tilde{B} додатно визначена і для $u^h, v^h \in S_M^0$ так, що $\delta(u^h, u^h) = \delta(v^h, v^h) = 1$, мають місце співвідношення*

$$|a_{\bullet}(u^h, v^h)| < C_a h^p, \quad |\delta_{\bullet}(u^h, v^h)| < C_b h^p \quad (C_a, C_b > 0),$$

$$A_{\bullet} = h^{q+n} \hat{A}_{\bullet}, \quad B_{\bullet} = h^{q+n} \hat{B}_{\bullet},$$

то існує така незалежна від h константа $C(\tilde{\lambda}^h)$, що

$$\min_{1 \leq j \leq N_0} |\tilde{\lambda}^h - \lambda_j^h| < C(\tilde{\lambda}^h) h^p. \quad (38)$$

§2.4 присвячено розв'язанню узагальнених алгебраїчних задач на власні значення, які виникають внаслідок дискретизації МСЕ. Для чисельного розв'язання таких задач використано метод ітерацій на підпросторі (ітерування підпростору).

Для профільних матриць великого порядку розроблено алгоритм цього методу, який використовує пам'ять другого ступеня (магнітні диски або стрічки) і надає можливість знаходити (разом з відповідними власними векторами) або задане число найменших, або всі власні значення із заданого інтервалу, а також отримувати апостеріорні оцінки

$$\min_{1 \leq j \leq N_0} \left| \frac{\lambda_j - \lambda_j^*}{\lambda_j} \right| < \left[\frac{\tilde{\Gamma}_t^T B \tilde{\Gamma}_t}{(x_t^*)^T B x_t^*} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (39)$$

обчислювальної похибки для власних значень, де λ_j - точне власне значення задачі (31), λ_j^* , x^* - наближено обчислена власна пара цієї ж задачі, $\tilde{\Gamma}_t = A^{-1} \Gamma_t \equiv x_t^* - \lambda_j^* A^{-1} B x_t^*$. Обчислення цих оцінок організовано економічним способом, а саме, використовуються отримані в процесі розв'язання задачі (31) матриці і вектори.

Розділ III присвячено застосуванню побудованих схем МСЕ четвертого порядку точності для розв'язування ряду модельних і пр. кладних задач.

В §3.1 наведено приклади розв'язання деяких модельних задач на власні значення, на яких апробовано запропоновані в перших розділах простори МСЕ і алгоритми.

Порівняння ефективності запропонованих в роботі просторів МСЕ на кускових поліномах Ерміта і аналогічних просторів на поліномах Лагранжа проведено на прикладі розв'язання задачі (12), (18)-(21). На прикладі такої ж задачі показано вплив чисельного інтегрування на точність наближеного розв'язку.

Ефективність запропонованого алгоритму (і його програмної реалізації) розв'язання узагальненої проблеми власних значень продемонстровано на прикладі розв'язання 11 задач. На двох із них показано справедливість апостеріорних оцінок (39).

Гутий параграф розділу III присвячено розв'язанню за допомогою запропонованих схем МСЕ прикладної задачі про власні коливання холодної лопатки турбомашини, яка опісється трьома різними моделями: одновимірною, що базується на прикладній теорії стержнів, двовимірною - на прикладній теорії тонких оболонок, і просторовою - на основі рівнянь теорії пружності. Обґрунтовано прийоми, які забезпечуть законність застосування побудованих схем МСЕ для чисельного розв'язання зазначених задач, і справедливості у цьому випадку оцінок похибок наближених розв'язків. Проілюстровано застосування запропонованої методики на розв'язанні таких модельних задач:

- знайти частоти і форми власних коливань тонкої ізотропної прямокутної в плані пластини постійної товщини, один край якої жорстко закріплено, а протилежний йому повернуто по відношенню до нього ж на кут ψ_0 ;

- знайти частоти і форми власних коливань прямокутної в плані панелі тонкої циліндричної ізотропної оболонки постійної товщини, у якої жорстко закріплено один із країв, що збігається з напрямляючою.

У додатку наведено види і структури функцій, векторів і матриць, що зустрічаються у викладі.

Основні результати роботи. Таким чином, в дисертаційній роботі розроблено і теоретично обґрунтовано алгоритм чисельного розв'язання часткової проблеми власних значень для ряду еліптичних диференціальних операторів в одно-, дво- і тривимірних областях

методом скінченних елементів. Для цього:

(i) побудовано простори МСЕ другого степеня, - простори кускових інтерполяційних поліномів Ерміта; (ii) отримано оцінки похибки інтерполяції функціями з цих просторів; (iii) побудовано схеми МСЕ четвертого порядку точності (для власних значень) для чисельного розв'язання спектральних задач для ряду еліптичних диференціальних операторів; (iv) доведено оцінки точності наближених розв'язків; (v) отримано оцінки похибок розв'язків дискретної задачі, які викликані похибками обчислення елементів матриць цієї задачі; (vi) розроблено алгоритм чисельного розв'язання з використанням зовнішньої пам'яті ЕОМ узагальненої алгебраїчної задачі на власні значення методом ітерування підпростору для профільних матриць.

Основні положення дисертації опубліковані в таких працях:

1. Молчанов И.Н., Попов А.В. Схемы повышенного порядка точности для некоторых задач на собственные значения // Вариационно-разностные методы в математической физике. - М., 1984. - С.183-195.
2. Попов О.В. Чисельне розв'язання однієї задачі на власні коливання тонкої оболонки // Доп. АН УРСР. Сер.А. - 1984. - №3. - С. 15-18.
3. Попов А.В. Использование кусочных полиномов Эрмита второй степени в методе конечных элементов // Пакеты прикладных программ и численные методы. - Киев, 1988. - С. 103-107.
4. Попов А.В. Численное решение одной пространственной спектральной задачи методом конечных элементов // Математическое и программное обеспечение задач дискретной оптимизации. - Киев, 1989. - С. 90-95.
5. Молчанов И.Н., Попов А.В., Химич А.Н. Алгоритмы решения частичной проблемы собственных значений для больших профильных матриц // Кибернетика и системный анализ - 1992. - №2. - С.141-147.

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

Підп. до друку 26.08.94. Формат 60x84/16. Папір друк. №2.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 0,93. Ум. фарбо-відб. 1,05. Обл.-вид.
арк. 1,0. Тираж 100 прим. Зам. 873.

Редакційно-видавничий відділ з поліграфічною дільницею
Інституту кібернетики імені В.М.Глушкова НАН України
252650 Київ МСД 22, проспект Академіка Глушкова, 40



AB 30.857

AB 30.857