АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

На правах рукописи

ОСИЛЕНКЕР
Борис Петрович

РЯДЫ ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ ПОЛИНОМАМ

Специальность 01.01.01. Математический анализ

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Харьков — 1994

Работа выполнена в Московском инженерно-строительном институте им. В. В. Куйбышева (Московском Государственном строительном Университете).

Официальные оппоненты:

академик АН Украины, доктор физико-математических наук, профессор **Березанский Ю. М.**,

доктор физико-математических наук, профессор **Тихомиров В. М.**,

доктор физико-математических наук, профессор Рвачев В. А.

Ведущая организация: Санкт-Петербургский Государственный Университет.

Защита диссертации состоится «31» 10 1994 г. в «15» часов на заседании специализированного совета **Д 016.27.02 в Физико-Техническом институте низких температур АН Украины по адресу: 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47. Физико-Технический институт низких температур АН Украины.**

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Физико-Технического института низких температур АН Украины.

Автореферат разослан «30» 09 1994 г.

Учёный секретарь
специализированного совета,
д. ф.-м. н. **В. А. Ткаченко**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Ортогональные полиномы были впервые введены П.Л.Чебышёвым в середине прошлого века в связи с проблемой параболического интерполирования. В ряде своих мемуаров П.Л.Чебышёв не только рассматривает известные до него частные случаи - так называемые классические ортогональные полиномы, - но и строит общую теорию ортогональных полиномов.

В последние годы значительно возрос интерес к ортогональным полиномам в связи с исследованиями в функциональном анализе (проблема моментов, спектральные свойства якобиевых матриц, модель самосопряженного оператора с простым спектром), теории вероятностей и математической статистике (процессы размножения и гибели, область марковских процессов, спектральные методы), в математической физике и квантовой механике (теория рассеяния, цепочки Тода и Ленгмюра), физике (теория кристаллов, одномерная теория твердого тела). Отметим также ряд приложений: в электротехнике (теория электрических цепей), спектральные методы расчета и проектирования систем электросвязи и управления.

Проблемы вычислительной математики также приводят к ортогональным полиномам, удобным для аппроксимации функций и удовлетворяющих простым рекуррентным соотношениям, позволяющим сравнительно просто вычислять их значения.

Настоящая работа посвящена изучению рядов Фурье по общим ортогональным полиномам.

По теореме В.Ф.Николаева (1948), какова бы ни была ортогональная система полиномов, существует непрерывная функция такая, что ее ряд Фурье по этой системе не сходится равномерно. Для рядов Фурье по ортогональным полиномам хорошо известны аналоги теоремы А.Н.Колмогорова о расходимости почти всюду.

В связи с этими результатами важную роль приобретает проблема суммируемости рядов Фурье по ортогональным полиномам почти всюду и равномерно на промежутках непрерывности интегрируемых функций. В случае тригонометрической системы данная проблема подробно разработана (С.М.Никольский, 1948; Секефальви-Надь, 1950; А.В.Ефимов, 1960; С.А.Теляковский, 1964; Р.А.Тригуб,1974 и многие другие). Проблема суммируемости почти всюду рядов Фурье по ортогональным полиномам функций $f \in L^1_\rho[-1,1]$ поставлена Г.Алексичем, который в своей книге "Проблемы сходимости ортогональных рядов" (1963) отметил, что для рядов Фурье суммируемых функций по общим ограниченным полиномиальным системам $\{p_n\}(n\in\mathbb{Z}_+)$ неизвестно утверждение о суммируемости почти всюду даже для метода Пуассона-Абеля. К.Тандори (1953) доказал $(C,\alpha)(\alpha>0)$-суммируемость почти всюду рядов Фурье функций классов $L^t_\rho[-1,1]$ при $t>1$ по локально ограниченным системам $\{p_n\}(n\in\mathbb{Z}_+)$. В книге G.Freud "Orthogonal Polynomials" (1971) поставлена задача изучения продифференцированных рядов по ортогональным полиномам, возникающая при обосновании метода Фурье. В частности, во многих приложениях важную роль играет теорема Фату об A^*-суммируемости таких рядов. Для рядов Фурье по ультрасферическим полиномаманалог теоремы Фату получен Б.Макенхоуптом и Е.Стейном (1965), и ими поставлена задача перенесения результатов на более общие системы.

Проблема сходимости в среднем рядов Фурье-Якоби хорошо изучена (Г.Поллард, 1946-1949; Дж.Ньюмен, В.Рудин, 1952; Б.Макенхоупт, 1969; В.М.Бадков, 1974). В упомянутой выше книге Г.Фройда и в статье М.Розенблюма (1962) поставлена проблема нахождения весовых оценок частных сумм рядов Фурье по общим ортогональным полиномам (и более общая задача нахождения двухвесовых оценок).

Во многих проблемах гармонического анализа и его приложений важную роль играют операторы обобщенного сдвига (о.о.с.), введенные Ж.Дельсартом в 1938 г. и систематически изученные Б.М.Левитаном. Дискретные гиперкомплексные системы (гипергруппы), ассоциированные с ортогональными полиномами, впервые появившиеся в работах Ю.М.Березанского (1951), в последние годы интенсивно изучались (циклы работ Ю.М.Березанского и А.А.Калюжного; А.А.Калюжного; Л.И.Вайнермана и других). Для классических полиномов Якоби $\{p_n^{(\alpha,\beta)}\}$ о.о.с. и структура ядра "формулы умножения" глубоко исследованы (Л.Гегенбауэр; С.Бохнер, 1952; Г.В.Жидков, 1966; С.З.Рафальсон, 1968; Р.Эски и Ст.Вейнгер, 1969; Г.Гаспер, 1971; М.К.Потапов, 1975; Т.Корнвиндер, 1974 и другие). А.Шварц (1988) доказал универсальность гипергрупп, построенных по системе $\{p_n^{(\alpha,\beta)}\}$ в случае положительных ядер. Поэтому представляет интерес изучение компактных непрерывных гипергрупп по общим ортогональным полиномам, не обладающих положительными ядрами.

Операторы одностороннего взвешенного сдвига играют важную роль в ряде вопросов гармонического анализа, так как в ℓ^2 они являются (при определенных условиях на веса) прямым аналогом конечномерной клетки Жордана. В связи с этим ставится задача об оценке нормы операторов усеченного взвешенного сдвига в весовых лебеговых пространствах.

Приведенные выше проблемы естественным образом возникают и при изучении кратных рядов Фурье. Переход к рассмотрению рядов в пространстве $\mathbb{R}^m (m>1)$ приводит к новым эффектам, принципиальным изменениям. Так, например, в противоположность теореме Л. Карлесона-Р.Ханта, существует непрерывная функция двух переменных, для которой двойной тригонометрический ряд Фурье расходится всюду на $[0,2\pi]^2$ при суммировании по Принохейму (Ш.Фефферман, 1971). Фактически, тогда как одномерные ряды по классическим полиномам изучены достаточно полно, в случае кратных рядов Фурье-Якоби до последнего времени был исследован лишь метод Пуассона-Абеля (Л.Кафарелли и К.Кальдерон, 1974). Отметим также, что кратные операторы сдвига по системе полиномов Якоби ранее не изучались.

Аналогичные обстоятельства имеют место и для рядов Фурье по ортонормированным матричным и операторным полиномам, введенным М.Г.Крейном (1949) и Ю.М.Березанским (1953) в связи с изучением соответствующей проблемы моментов. Они возникают в ряде приложений: теория систем разностных уравнений, изучение операторов с конечно-кратным спектром, теория представлений. Исследование линейных операторов, порожденных методами суммирования или сдвигами по матричным и операторным полиномиальным системам, значительно затруднено ввиду их некоммутативности, и до последнего времени не проводилось (за исключением L^2 -теории).

Цель работы. Исследовать вопросы сходимости и суммируемости рядов Фурье по одномерным, кратным, матричным и операторным полиномам. Найти весовые оценки операторов обобщенного и взвешенного сдвигов по этим системам. Рассмотреть приложения к проблеме моментов и к полиномиальному процессу Бубнова-Галеркина.

Объект исследования. Одномерные, кратные, матричные и операторные полиномы.

Общая методика исследования. В диссертации использованы общие методы и идеи современной теории функций и классического функционального анализа. Существенную роль играют открытые и развитые в последние десятилетия одно- и двухвесовые оценки сингулярных интегралов.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

I. Исследованы линейные методы суммирования (дискретные и непрерывные) рядов Фурье функций $f \in L^1_p[-1,1]$ по одномерным ортогональным полиномам $P_n(x)$. Получены утверждения о Λ -суммируемости почти всюду и равномерно на промежутках непрерывности функции f . Установлены аналоги теорем Фату. Даны приложения к восстановлению функции по ее ρ -моментам.

2. Для подкласса P_0 общих ортогональных полиномов (включающего классические полиномы Якоби и их обобщения) получены одно- и двухвесовые оценки частных сумм ряда Фурье. Найдена оценка нормы операторов усеченного одностороннего сдвига по системе $\{P_n\} (n \in \mathbb{Z}_+)$. Дана оценка проекции линейных операторов в весовых лебеговых пространствах.

3. Введены операторы обобщенного квазисдвига по трем системам $\{P_n\}, \{q_n\}, \{h_n\}$ полиномов, ортонормированных с весами $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$, $\rho_3(x)$, соответственно. Для них установлены весовая оценка нормы, структура свертки и обобщенная формула умножения. Отсюда, в частности, вытекают соответствующие факты для оператора обобщенного сдвига, построенного по системе $\{P_n\} (n \in \mathbb{Z}_+)$.

4. Получены оценки нормы оператора взятия частных сумм для рядов Фурье по кратным системам ортогональных полиномов $\{P_n\} (n \in \mathbb{Z}^m_+)$. Дано приложение к обоснованию полиномиального метода Бубнова-Галеркина для интегрального уравнения Фредгольма.

5. Для кратных рядов по ортогональным полиномам установлены результаты о линейных методах суммирования, операторах обобщенного квазисдвига и операторах усеченного сдвига. Дано приложение к восстановлению функции m -переменных по ее моментам.

6. Изучены ряды Фурье по ортогональным матричным полино-

мам, для которых доказаны результаты о линейных методах суммирования. Введен некоммутативный оператор обобщенного сдвига и получена весовая оценка нормы. Дано приложение к матричной проблеме моментов.

7. Для векторнозначных функций со значениями в банаховых UMD-пространствах получен ряд утверждений о сходимости, Λ-суммируемости рядов Фурье по скалярной системе $\{p_n\}$ и операторе обобщенного квазисдвига.

8. Для рядов Фурье по операторным полиномам даны оценки нормы операторов проектирования и сдвига.

9. Получены новые представления билинейных и трилинейных ядер по общим одномерным и матричным ортогональным полиномам.

Приложения. Работа носит теоретический характер, приложения относятся к другим разделам анализа: классическая проблема моментов, теория интерполирования, полиномиальный метод Бубнова-Галеркина. Результаты могут быть применены в приложениях, использующих интегральные, дифференциальные, разностные и смешанные линейные уравнения.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на международных конференциях по теории ортогональных полиномов и их приложениям (Коламбус, США, 1989; Гранада, Испания, 1991), по интерполяционным пространствам (Хайфа, Израиль, 1990), по экстраполяции и рациональной аппроксимации (Тенерифе, Испания, 1992), по теории гипергрупп (Сиэттл, США, 1993), на 29 Всесоюзных конференциях и школах, в том числе, на Всесоюзной школе по теории операторов в функциональных пространствах (Новгород, 1976, 1989; Минск, 1982; Челябинск, 1986; Тамбов, 1987; Ульяновск, 1990), на Всесоюзной школе по теории функций и приближений (Саратов, 1984), на Всесоюзной школе по теории функций (Одесса, 1991), на Всесоюзной конференции по теории функций и функциональному анализу (Теберда, 1988), на семинарах в МГУ под руководством членов-корреспондентов АН СССР профессоров Д.Е.Меньшова и П.Л.Ульянова, профессоров А.М.Олевского и Б.С.Кашина, профессоров А.Г.Костюченко и Б.М.Левитана; в МИАН СССР на семинаре под руководством профессоров О.В.Бесова и П.И.Лизоркина; в Математическом институте АН Украины под руководством академика Ю.М.Березанского; на семинаре во ФТИНТе под руководством академика В.М.Марченко; на семинаре в С-П ГУ под руководством профессора Г.И.Натансона; на семинаре в МИСИ под руководством профессоров С.Я.Хавинсона и А.Л.Гаркави; на семинаре в Раттерс-Университете(Нью-Джерси, США) под руководством профессоров Б.Макенхоупта и Р.Видена; на семинаре в Мак Гилл-Университете (Монреаль, Канада) под руководством профессора П.Кусиса; на семинаре в Тулонском Университете (Франция) под руководством профессора Я.Гилевича; на семинаре в Университете им.Карла Ш (Мадрид, Испания) под руководством Ф.Марчелано; на семинаре в Карлетон-Университете (Оттава, Канада) под руководством профессора М.Рамана; на семинаре в Сарагосском Университете (Испания) под руководством профессора Х.Гваделупа.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 36 работ. Основные результаты диссертации изложены в I - 2I[ж)]

Объем и структура диссертации. Диссертация изложена на 285 страницах и состоит из введения, четырех глав и списка литературы из 23I названия.

ж) Результаты, полученные в диссертации, отражены в обзорах:

Е.М.Дынькин, Б.П.Осиленкер // Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР.

Мат. анализ. - I983. - 2I. - С. 42-I29.

P.Nevai // Progress in Approx. Theory (ed. A.Gonchar, E.Saff). - I990. - P. 79-I04.

и в книге: Ю.М.Березанский, А.А.Калюжный. Гармонический анализ в гиперкомплексных системах // Киев, Наукова Думка. - I992.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В Гл.I изучаются одномерные ряды Фурье по ортогональным полиномам.

В § I, имеющем вспомогательный характер, приведены без доказательств хорошо известные оценки норм классических сингулярных интегралов в весовых лебеговых пространствах.

В § 2 изучаются линейные методы суммирования рядов Фурье по ортогональным полиномам. Если $\{p_n\}(n\in\mathbb{Z}_+)$ - ортонормированная с весом $\rho(x)$ (вес - суммируемая положительная почти всюду функция) на $[-1,1]$ система полиномов n-степени (кратко: ОНСП $\{p_n\}(n\in\mathbb{Z}_+)$):

$$p_n(x)=k_n x^n+l_n x^{n-1}+\ldots,\ k_n>0\ (n\in\mathbb{Z}_+),$$

то справедливо следующее рекуррентное соотношение

$$x p_n(x)=a_n p_{n+1}(x)+u_n p_n(x)+a_{n-1}p_{n-1}(x)\ \left(n\in\mathbb{Z}_+;\ p_{-1}(x)\equiv 0\right), \quad (I)$$

где

$$a_n=\frac{k_n}{k_{n+1}},\quad u_n=\int_{-1}^{1} x p_n^2(x)\,\rho(x)\,dx\ \ (n\in\mathbb{Z}_+;\ a_{-1}=0).$$

Полиномы $p_n(x)$ можно рассматривать как обобщенные собственные функции (в l^2) сингулярного разностного оператора

$$Lv=-(\nabla[a\Delta v])_k+q_k v_k\ \ (k\in\mathbb{Z}_+),$$

где $v=(v_k),\ a=(a_k),\ q_k=a_k+a_{k-1}+u_k\ (k\in\mathbb{Z}_+;\ a_{-1}=0)$ и $\Delta s_k=s_k-s_{k+1},\ \nabla s_k=s_k-s_{k-1}$ для любой последовательности $\{s_k\}(k\in\mathbb{Z}_+;\ s_{-1}=0)$.

Для функции $f\in L^1_\rho[-1,1]$ введем ряд Фурье по ОНСП $\{p_n\}(n\in\mathbb{Z}_+)$:

$$f\sim\sum_{k=0}^{\infty}\hat f_k p_k,\quad \hat f_k=\int_{-1}^{1} f(t)\,p_k(t)\,\rho(t)\,dt\ \ (k\in\mathbb{Z}_+). \quad (2)$$

С помощью регулярной по Теплицу треугольной матрицы вещественных чисел

$$\Lambda=\left\{\lambda_k^{(n)},\ k=0,1,\ldots,n,n+1;\ \lambda_0^{(n)}=1,\ \lambda_{n+1}^{(n)}=0,\ n\in\mathbb{Z}_+\right\} \quad (3)$$

построим последовательность Λ-средних

$$U_n(f;x;\Lambda)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^{(n)}\hat f_k p_k(x)\ \ (n\in\mathbb{Z}_+;\ x\in[-1,1]). \quad (4)$$

Изучается следующая задача: при каких условиях на элементы матрицы Λ и систему $\{p_n\}(n\in\mathbb{Z}_+)$ ряд (2) Λ - суммируем к $f(x)$, т.е. выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{U}_n(f; x; \Lambda) = f(x). \qquad (5)$$

Основным результатом в данном направлении является следующее утверждение.

<u>Теорема I.</u> Пусть ОНСП $\{P_n\}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$ удовлетворяет условиям

$$\max_{c\le x\le d} |P_n(x)| \le C \quad (n\in\mathbb{Z}_+;\ [c,d]\subset[-1,1]) \qquad (6)$$

и

$$\sum_{k=0}^{n} |\Delta a_k^2| + \sum_{k=0}^{n} |\Delta u_k| \le C \quad (n\in\mathbb{Z}_+), \qquad (7)$$

а для элементов матрицы (3) выполняется оценка Надя

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)(n-k+1)}{n+1} \ln \frac{3(n+1)}{n-k+1} |\Delta^2 \lambda_k^{(n)}| \le C \quad (\Delta^2\lambda_k^{(n)} = \Delta(\Delta\lambda_k^{(n)}),\ k=0,1,\dots,n). \qquad (8)$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

I) если

$$f\in L_p^1[c,d] \cap L_p^2(E) \quad (E=[-1,1]\setminus[c,d]),$$

то в каждой точке Лебега $x\in(c,d)$ (и, следовательно, почти всюду в (c,d)) ряд Фурье (2) Λ -суммируется к $f(x)$;

2) если, кроме того,

$$\sup_{c\le x\le d} p(x) \le C < \infty, \qquad (9)$$

то для любой L_p^2 -интегрируемой функции $f(x)$, непрерывной на $[c,d]$, равномерно на любом компакте из (c,d) для Λ - средних (4) справедливо соотношение (5).

Этот результат применяется к задаче о восстановлении функции по ее p -моментам.

Из теоремы I вытекает $(C,\delta>0)$-суммируемость почти всюду рядов Фурье-Поллачека (полиномы Поллачека - особый случай ортогональных полиномов[I]) и результат Г.И.Натансона[2]) о суммируемости рядов Фурье-Якоби методом, подобным способу Бернштейна-Рогозинского.

Доказательство теоремы I основано на следующем представлении ядер Валле-Пуссена

$$V_{n,k}(t,x) = \frac{1}{k+1} \sum_{l=n-k}^{n} \sum_{i=0}^{l} P_i(t) P_i(x) \quad (k=0,1,\dots,n;\ n\in\mathbb{Z}_+;\ t,x\in[-1,1])$$

I) Г.Сегё. Ортогональные многочлены. М.: ГИФМЛ. - 1962.

2) Г.И.Натансон // Ученые зап. ЛГПИ. - 1958.-Т.166.-С.185-211.

для произвольной ОНСП $\{P_n\}$ $(n\in \mathbb{Z}_+)$, полученном в [I]-[3]:

$$(k+1)(t-x)^2 V_{n,k}(t,x)=2a_{n-k}^2 P_{n-k}(t)P_{n-k}(x)-2a_n^2 P_{n+1}(t)P_{n+1}(x)+$$

$$+2\sum_{m=n-k+1}^{n}(a_m^2-a_{m-1}^2)P_m(t)P_m(x)+\sum_{m=n-k}^{n}a_m(u_{m+1}-u_m)[P_m(t)P_{m+1}(x)+P_{m+1}(t)P_m(x)]+$$

$$+a_n a_{n+1}[P_n(t)P_{n+2}(x)+P_{n+2}(t)P_n(x)]-a_{n-k-1}a_{n-k}[P_{n-k-1}(t)P_{n-k+1}(x)+P_{n-k+1}(t)P_{n-k-1}(x)].$$

Отсюда при $t=x$ и $k=n$ вытекает формула

$$\sum_{m=0}^{n}\left[(a_m^2-a_{m-1}^2)P_m^2(x)+a_m(u_{m+1}-u_m)P_m(x)P_{m+1}(x)\right]=a_n^2\left[P_n^2(x)-\frac{1}{a_n}(x-u_{n+1})P_n(x)P_{n+1}(x)+P_{n+1}^2(x)\right],$$

независимо (и другим методом) полученная в[3] и играющая важную роль в исследовании спектра разностного оператора L.

В § 3 Гл.I изучены средние Пуассона-Абеля

$$u(r,x)=\sum_{k=0}^{\infty} r^k \hat{f}_k P_k(x) \quad (0<r<1;\ x\in[-1,1]).$$

<u>Теорема 2.</u> Пусть выполняются предположения (6),(7),(9) и существует положительная функция $\varphi_0(x)$ $(\varphi_0\in L^1_p(E))$ такая, что

$$\max_{0\le k\le n+2}\ \sup_{x\in E}\frac{|P_n(x)|}{\varphi_0(x)}=O(n)\quad (n\to\infty). \tag{10}$$

Тогда для любой функции $f\in L^1_p[-1,1]$, удовлетворяющей условию

$$\int_E |f(t)|\,\varphi_0(t)\,p(t)\,dt<\infty, \tag{11}$$

имеют место следующие утверждения:

I) в каждой точке непрерывности $x_0\in(c,d)$ справедливо соотношение

$$u(r,x)\longrightarrow f(x_0) \tag{12}$$

как бы точка $M(r,x)$ ни стремилась к $M_0(1,x_0)$, оставаясь внутри области

2) в каждой точке Лебега $x_0\in(c,d)$ выполняется предельное равенство (I2), когда точка $M(r,x)$ стремится к $M_0(1,x_0)$ по любому некасательному пути

$$\Gamma=\begin{cases}(r,x),\ 0<r<1,\ c<x<d,\ |x-x_0|<\delta(1-r),\\ \text{постоянная } \delta>0 \text{ не зависит от } r,x.\end{cases} \tag{13}$$

---

3) J.Dombrowski // Pacif.J.Math. - II4. - I984. - P.325-334.

В § 4 Гл.I доказан следующий аналог теоремы Фату.

<u>Теорема 3.</u> Пусть выполняются условия теоремы 2 и, кроме того, для коэффициентов рекуррентного соотношения (I) имеет место оценка

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)\left[|\Delta^2 a_k|+|\Delta^2 u_k|+|\Delta u_k|^2\right]\le C \quad (n\in\mathbb{Z}_+).$$

Тогда в каждой точке $x_0\in(c,d)$, где f' существует и конечна, по любому некасательному пути Γ (см.(I3)) выполняется равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \hat f_k\, p_k'(x)\to f'(x_0).$$

Доказательства теорем 2 и 3 основаны на новых представлениях ядер Пуассона $P_r(t,x)$ и $\frac{\partial P_r(t,x)}{\partial x}$.

Последний параграф (§ 5) Гл.I посвящен проблеме весовых оценок частных сумм $S_n(f;x)$ ряда Фурье функции f по ОНСП $\{p_n\}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$.

Напомним, что пара весов (ω_1,ω_2) принадлежит A_r-классу Макенхоупта на промежутке $(-1,1)$, если

$$\sup_{I\subset(-1,1)}\left\{\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega_1(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int_I [\omega_2(x)]^{-\frac{1}{r-1}}dx\right)^{r-1}\right\}<+\infty \quad (1<r<\infty).$$

В том случае, когда $\omega_1(x)\equiv\omega_2(x)\equiv\omega(x)$, то вес $\omega(x)$ принадлежит A_r-классу Макенхоупта. Обозначения: $(\omega_1,\omega_2)\in A_r(-1,1)$ или $\omega\in A_r(-1,1)$, соответственно. Если при некотором δ $(\delta>1)$ выполняется $(\omega_1^\delta,\omega_2^\delta)\in A_r(-1,1)$, то $(\omega_1,\omega_2)\in A_r^\delta(-1,1)$. Рассмотрим ортонормированные полиномиальные системы $\{p_n^{(1)}\},\{p_n^{(2)}\}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$, ассоциированные с весами $\sigma(x)=(1-x)\rho(x)$, $\tau(x)=(1+x)\rho(x)$, соответственно. Будем говорить, что ортонормированная с весом $\rho(x)$ система полиномов $\{p_n\}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$ принадлежит классу P_0, если справедливы следующие оценки:

$$|p_n(x)|\le C(1-x^2)^{-\frac14}[\rho(x)]^{-\frac12};\ |p_n^{(1)}(x)|\le C(1-x^2)^{-\frac14}[\sigma(x)]^{-\frac12};\ |p_n^{(2)}(x)|\le C(1-x^2)^{-\frac14}[\tau(x)]^{-\frac12}\ (-1<x<1),$$

при этом постоянные $C>0$ в этих оценках не зависят от $x\in(-1,1)$ и $n\in\mathbb{Z}_+$. Классу P_0 принадлежат классические $\{p_n^{(\alpha,\beta)}\}$ $(\alpha,\beta\ge-\frac12)$ и обобщенные полиномы Якоби $\{p_n^{(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1})}\}$ $(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}\ge-\frac12)$.

<u>Теорема 4.</u> Пусть ОНСП $\{p_n\}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$ принадлежит классу P_0.
I) Если для пары весов (ω_1,ω_2) при некоторых r $(1<r<\infty)$ и δ $(\delta>1)$ имеет место условие

$$\left((1-x^2)^{\pm\frac{r}{4}}[\rho(x)]^{-\frac{r}{2}}\omega_1(x),\ (1-x^2)^{\pm\frac{r}{4}}[\rho(x)]^{-\frac{r}{2}}\omega_2(x)\right)\in A_r^\delta(-1,1),$$

то
$$\|S_n(f)\|_{r,\omega_1} \le C\|f\|_{r,\omega_2},$$
где постоянная $C>0$ не зависит $f\in L^2_{\omega_2}[-1,1]$ и $n\in\mathbb{Z}_+$.
2) Если при некотором $r\ (1<r<\infty)$ выполняется
$$(1-x^2)^{\pm\frac{1}{4}}[\rho(x)]^{-\frac{1}{2}}\omega(x)\in A_r(-1,1), \tag{I4}$$

то существует постоянная $C>0$, не зависящая от f и $n\in\mathbb{Z}_+$, такая, что
$$\|S_n(f)\|_{r,\omega} \le C\|f\|_{r,\omega}<\infty. \tag{I5}$$

Теорема 4 содержит новые результаты и для рядов Фурье-Якоби. Отметим также, что Р.Керман (I993), используя специфические свойства полиномов Якоби, доказал необходимость предположения (I4) для справедливости оценки (I5) в случае рядов Фурье--Якоби.

<u>Следствие.</u> Пусть ОНСП $\{p_n\}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$ принадлежит классу P_0 и вес удовлетворяет (I4). Тогда система $\{p_n\}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$ образует базис в весовом лебеговом пространстве $L^2_\omega[-1,1]$.

В главе II изучаются операторы сдвига по ортогональным полиномам. В §§ I-3 вводятся операторы обобщенного квазисдвига по трем системам полиномов $\{p_n\},\{q_n\},\{h_n\}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$ степени n с положительными старшими коэффициентами, ортономированным на $[-1,1]$ с весами $\rho_1(x)=\rho(x)$, $\rho_2(x)$, $\rho_3(x)$, соответственно. Эти системы удовлетворяют рекуррентным соотношениям (I) и
$$\begin{gathered} xq_n(x)=b_nq_{n+1}(x)+v_nq_n(x)+b_{n-1}q_{n-1}(x)\ (n\in\mathbb{Z}_+;q_{-1}(x)=0,\ b_{-1}=0)\\ xh_n(x)=c_nh_{n+1}(x)+w_nh_n(x)+c_{n-1}h_{n-1}(x)\ (n\in\mathbb{Z}_+;h_{-1}(x)=0,\ c_{-1}=0).\end{gathered} \tag{I6}$$
Пусть $\max\limits_{-1\le y\le 1}|q_n(y)|=q_n(1)\ (n\in\mathbb{Z}_+)$.

Тогда оператор обобщенного квазисдвига T^y имеет вид
$$T^y f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(f)\frac{q_k(y)}{q_k(1)}p_k(x),\quad c_k(f)=\int_{-1}^{1}f(t)h_k(t)\rho_3(t)\,dt\ (k\in\mathbb{Z}_+) \tag{I7}$$
$$(-1\le x,y\le 1,\quad y\ \text{- фиксировано}).$$
В частности, если полиномиальные системы $\{p_n\}$, $\{q_n\}$, $\{h_n\}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$ совпадают, то получается оператор обобщенного сдвига по ОНСП $\{p_n\}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$:
$$T^y f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\hat f_k\frac{p_k(y)}{p_k(1)}p_k(x),\quad \hat f_k=\int_{-1}^{1}f(t)p_k(t)\rho(t)\,dt\ (k\in\mathbb{Z}_+).$$

Введем обозначения

$$\gamma_n = \frac{1}{q_n(1)}, \quad N_n = 1 + \sum_{k=0}^{n} \left(|a_k - \tfrac{1}{2}| + |b_k - \tfrac{1}{2}| + |c_k - \tfrac{1}{2}| + |u_k| + |v_k| + |w_k|\right) (n \in \mathbb{Z}_+). \quad (18)$$

Следующее основное утверждение Гл. II дает весовую оценку нормы оператора T^y.

Теорема 5. Пусть ОНСП $\{p_n\}$, $\{q_n\}$, $\{h_n\}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ обладают положительными ρ_i-интегрируемым мажорантами

$$|p_n(x)| \leq \varphi_1(x), \ |q_n(x)| \leq \varphi_2(x), \ |h_n(x)| \leq \varphi_3(x) \ (n \in \mathbb{Z}_+, -1 < x < 1) \quad (19)$$

и для последовательностей $\{\gamma_n\}$ и $\{N_n\}$ (см. (18)) выполняется оценка

$$|\gamma_n| N_n \ln \frac{n+1}{N_n} + \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta \gamma_k| N_k \ln \frac{k+1}{N_k} \leq C \ (n = 1, 2, \ldots). \quad (20)$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

1) если

$$\int_{-1}^{1} |f(t)| \frac{\varphi_3(t) \rho_3(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt < \infty, \quad \int_{-1}^{1} \frac{\varphi_3(t) \rho_3(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt < \infty,$$

то ортогональный ряд (17) сходится почти при всех $x \in (-1,1)$ для каждого фиксированного $y \in (-1,1)$;

2) сумма T^y ортогонального ряда (17) допускает представление

$$T^y f(x) = \int_{-1}^{1} f(t) K(x,y,t) \rho_3(t) dt \quad (-1 < x, y < 1),$$

где для ядра $K(x,y,t)$ справедлива оценка

$$\int_{-1}^{1} \frac{|K(x,y,t)|}{\varphi_1(x) \varphi_2(y) \varphi_3(t)} dt \leq C \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}},$$

причем постоянная $C > 0$ не зависит от $x, y \in (-1,1)$;

3) если при некотором r, $1 < r < \infty$, имеет место соотношение

$$\int_{-1}^{1} |f(t)|^r \frac{\varphi_3^r(t) \rho_3^r(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt < \infty \quad \left(\int_{-1}^{1} \frac{\varphi_3^r(t) \rho_3^r(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt < \infty \right),$$

то существует постоянная $C > 0$, не зависящая от f, $y \in (-1,1)$, такая, что

$$\left\{ \int_{-1}^{1} |T^y f(x)|^r \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{\varphi_1(x)} \right)^r dx \right\}^{\frac{1}{r}} \leq C \frac{\varphi_2(y)}{\sqrt{1-y^2}} \left\{ \int_{-1}^{1} |f(x)|^r \frac{\varphi_3^r(x) \rho_3^r(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \right\}^{\frac{1}{r}}.$$

Теорема 6 (обобщенная формула умножения). Пусть ОНСП $\{p_n\}$, $\{q_n\}$, $\{h_n\}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$ удовлетворяют условиям (I9) и для заданной последовательности ненулевых вещественных чисел $\gamma=\{\gamma_n\}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$ справедлива оценка (20). Тогда при каждом фиксированном m $(m=0,1,2,\ldots)$ имеет место формула

$$\gamma_m p_m(x)\, q_m(y)=\int_{-1}^{1} h_m(t)\, \mathcal{L}(x,y,t;\gamma)\, \rho_3(t)\,dt,$$

где

$$\int_{-1}^{1}\frac{|\mathcal{L}(x,y,t;\gamma)|}{\varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(t)}\,dt\le C\,\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}},$$

при этом постоянная $C>0$ не зависит от $x,y\in(-1,1)$.

Отметим, что известные ранее формулы умножения для полиномов Якоби и обобщенных полиномов Чебышёва содержали лишь одну систему ортогональных полиномов.

Доказательства теорем 5 и 6 основаны на новом представлении трилинейного ядра

$$\mathcal{D}_n(x,y,t)=\sum_{k=0}^{n} p_k(x)\, q_k(y)\, h_k(t)\quad (n\in\mathbb{Z}_+;\ x,y,t\in(-1,1)),$$

установленном в § I Гл.II и имеющем сложный вид, причем в отличие от билинейных ядер Дирихле, Валле-Пуссена, Пуассона "сингулярность ядра $\mathcal{D}_n(x,y,t)$ расположена в точках $\zeta_\pm=xy\pm\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ $(-1\le x,y\le 1)$.

Неотрицательная функция $F_n^*(\xi,\eta)$ $(n\in\mathbb{Z}_+;\ \xi,\eta\in(a,b)\subset(-1,1))$ называется "горбатой мажорантой" функции $F_n(\xi,\eta)$ $(n\in\mathbb{Z}_+;\ \xi,\eta\in(a,b))$ по переменной η в точке ξ, если выполняются следующие условия: I) для всех $n\in\mathbb{Z}_+$ и $\xi,\eta\in(a,b)$ справедлива оценка $|F_n(\xi,\eta)|\le F_n^*(\xi,\eta)$; 2) для фиксированных $n\in\mathbb{Z}_+$ и $\xi\in(a,b)$ функция $F_n^*(\xi,\eta)$ не убывает на (a,ξ) и не возрастает на (ξ,b).

Лемма 7. Предположим, что ОНСП $\{p_n\}$, $\{q_n\}$, $\{h_n\}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$ удовлетворяют условиям (I9). Тогда функция

$$\widetilde{\mathcal{D}}_n(x,y,t)=\frac{\mathcal{D}_n(x,y,t)}{\varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(t)}\quad (n\in\mathbb{Z}_+;\ -1<x,y,t<1)$$

имеет на промежутках $(-1,xy)$ и $(xy,1)$ "горбатые мажоранты" $\Psi_n^{(1)}(x,y,t)$ и $\Psi_n^{(2)}(x,y,t)$ в точках $\zeta_\pm$, соответственно, такие, что для "двугорбой мажоранты" $\widetilde{\mathcal{D}}_n^*(x,y,t)$, состоящей из

$\Psi_n^{(1)}(x,y,t)$ и $\Psi_n^{(2)}(x,y,t)$, справедлива оценка

$$\int_{-1}^{1} \tilde{\mathfrak{D}}_n^*(x,y,t)\,dt \le C\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}},$$

где постоянная $C>0$ не зависит от $n\in\mathbb{Z}_+$ и $x,y\in(-1,1)$.

С помощью данного утверждения и леммы И.П.Натансона можно оценить мажоранты частных сумм ряда (17) через максимальную функцию Харди-Литтлвуда f^*, после чего применение весовых оценок для нормы f^* дает оценку нормы оператора T^γ.

Лемма 7 позволяет также установить весовую оценку для мажоранты

$$S_*(f;x,y)=\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\frac{\left|\sum\limits_{k=0}^{n} c_k(f)\frac{p_k(x)}{\varphi_1(x)}\frac{q_k(y)}{\varphi_2(y)}\right|}{N_n\ln\frac{n+1}{N_n}}\quad(-1<x,y<1),$$

играющей важную роль в исследовании квазипотенциальных функций.

В § 4 изучаются операторы усеченного взвешенного (правостороннего) сдвига

$$V_n^+ : f(x)\longrightarrow V_n^+f(x)=\sum_{k=0}^{n}\hat{f}_k P_{k+1}(x),\quad \hat{f}_k=\int_{-1}^{1}f(t)P_k(t)\rho(t)\,dt\quad(k\in\mathbb{Z}_+)$$

и их сопряженные операторы

$$V_n^- : f(x)\longrightarrow V_n^-f(x)=\sum_{k=1}^{n}\hat{f}_k P_{k-1}(x)\quad(n=1,2,\dots;\ x\in[-1,1]).$$

Для ОНСП $\{P_n\}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$ класса P_0 (при некоторых дополнительных условиях) установлены весовые оценки норм операторов $M_{\tilde\omega}V_n^{\pm}M_{\tilde\omega}^{-1}$, где $M_{\tilde\omega}$ - оператор умножения на функцию $\tilde\omega(x)$. В качестве следствия получается оценка нормы оператора

$$\mathring{W}_n : f(x)\longrightarrow \mathring{W}_nf(x)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\mathring{\hat{f}}_kP_k^{(0)}(x)+\sum_{k=1}^{n}\mu_k\mathring{\hat{f}}_kP_k^{(0)}(x),$$

$$\mathring{\hat{f}}_k=\int_{-1}^{1}f(t)P_k^{(0)}(t)\,dt\quad(k=0,1,\dots,n),$$

где $\{P_n^{(0)}\}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$ - ортонормированная система полиномов Лежандра; $\{\lambda_k\}$, $\{\mu_k\}$ $(k\in\mathbb{Z}_+)$ - заданные последовательности вещественных чисел: если весовая функция $\omega(x)$ удовлетворяет условиям

$$\omega(x)\in A_r(-1,1),\ (1-x^2)^{\pm\frac{r}{4}}\omega(x)\in A_r(-1,1)\ (1<r<\infty),$$

а для последовательностей $\{\lambda_k\}$, $\{\mu_k\}$ $(k\in\mathbb{Z}_+)$ выполняется оценка

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(|\Delta\lambda_k|+|\Delta\mu_k|\right)<\infty,$$

то

$$\|\overset{\circ}{W}_n\|_{L^r_\omega\to L^r_\omega}\le C\ (n\in\mathbb{Z}_+).$$

В Гл.III диссертации изучаются кратные ряды Фурье по ортогональным полиномам.

Пусть $\{p^{(i)}_{n_i}(x_i)\}$ $(n_i\in\mathbb{Z}_+,\ x_i\in[-1,1];\ i=1,2,\dots,m)$ – последовательность одномерных полиномов степени n_i, ортонормированных на промежутке $[-1,1]$ по весу $\rho^{(i)}$ $(i=1,2,\dots,m)$. Семейство

$$\{P_n\}\equiv\{P_n(x)\}=\left\{\prod_{i=1}^{m}p^{(i)}_{n_i}(x_i)\right\}\ (x=(x_1,x_2,\dots,x_m),\ n=(n_1,n_2,\dots,n_m)\in\mathbb{Z}^m_+)$$

будет ортонормированным на кубе $I^m=[-1,1]^m$ по весу $R(x)=\prod_{i=1}^{m}\rho^{(i)}(x_i)$. Каждой функции $f\in L^1_R(I^m)$ сопоставим ее кратный ряд Фурье по системе $\{P_n\}$ $(n\in\mathbb{Z}^m_+)$:

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\hat{f}_k P_k(x),\quad \hat{f}_k=\int_{I^m}f(y)P_k(y)R(y)\,dy\ (x\in I^m),\qquad (21)$$

при этом сходимость ряда (2I) понимается как предел при $n\to\infty$ (т.е. $\min\limits_{1\le i\le m}n_i\to\infty$) последовательности прямоугольных частных сумм (сходимость по Принсхейму)

$$S_n(f)\equiv S_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\hat{f}_k P_k(x)\quad (x\in I^m,\ n\in\mathbb{Z}^m_+).$$

В § I изучается поведение частных сумм $S_n(f)$, в частности, вопросы сходимости и оценки роста $S_n(f;x)$.

Вес $G(x_1,x_2,\dots,x_m)$ принадлежит классу $A_r(J^m)$ $(1<r<\infty)$ (по прямоугольникам), если он удовлетворяет A_r-условию по каждой переменной x_i $(i=1,\dots,m)$ равномерно относительно остальных переменных. Класс $A_r(J^m)$ введен В.М.Кокилашвили, Д.Куртцем, Ш.Фефферманом и Е.Стейном; условие $G\in A_r(J^m)$ $(1<r<\infty)$ необходимо и достаточно для ограниченности кратного преобразования Гильберта в пространстве $L^r_G(I^m)$ $(1<r<\infty)$.

<u>Теорема 8.</u> Пусть одномерные ОНСП $\{p^{(i)}_{n_i}\}$ $(n_i\in\mathbb{Z}_+;\ i=1,2,\dots,m)$ принадлежат классу P_0 и для заданного веса $V(x_1,x_2,\dots,x_m)$

при всех k_1, k_2 ($1 \le k_1 \le m, 1 \le k_2 \le m$) выполняется условие

$$\left(\prod_{i=k_1}^{k_2} (1-x_i^2)^{\frac{1}{2}} [p_i(x_i)]^{-\frac{1}{2}}\right) V(x_1, x_2, \dots, x_m) \in A_r(I^m) \quad (1<r<\infty).$$

Тогда для любой функции $f \in L_V^r(I^m)$ справедлива оценка

$$\|S_n(f)\|_{r,V} \le C \|f\|_{r,V},$$

где постоянная $C>0$ не зависит от функции f и $n \in \mathbb{Z}_+^m$.

Кратная полиномиальная система $\{P_n\}$ $(n \in \mathbb{Z}_+^m)$ образует базис по Принсхейму в весовом лебеговом пространстве $L_V^r(I^m)$ $(1 < r < \infty)$, если для любой функции $f \in L_V^r(I^m)$ существует единственный ортогональный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k(x)$ такой, что

$$\lim_{\substack{\min n_j \to \infty \\ 1 \le j \le m}} \left\| f - \sum_{k=0}^{\infty} C_k P_k \right\|_{r,V} = 0.$$

<u>Следствие.</u> Пусть выполняются условия теоремы 8. Тогда кратная система $\{P_n\}$ $(n \in \mathbb{Z}_+^m)$ образует базис по Принсхейму в $L_V^r(I^m)$, $1<r<\infty$.

В §§ 2 и 3 исследуются линейные методы суммирования кратных полиномиальных рядов Фурье.

С помощью "пространственной матрицы" вещественных чисел

$$\Lambda^m = \begin{cases} \lambda_k^{(n)} = \lambda_{k_1,k_2,\dots,k_m}^{(n_1,n_2,\dots,n_m)} & 0 \le k_i \le n_i+1 \\ & \qquad (i=1,2,\dots,m) \\ \lambda_0^{(n)} = 1, \ \lambda_{k_1,\dots,k_{i-1},n_i+1,k_{i+1},\dots,k_m}^{(n_1,\dots,n_{i-1},n_i,n_{i+1},\dots,n_m)} = 0 & \end{cases}$$

каждой функции $f \in L_R^1(I^m)$ по ее ряду Фурье (21) поставим в соответствие последовательность прямоугольных Λ^m -средних

$$U_n(f;x;\Lambda^m) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} \hat{f}_k P_k(x) \quad (n \in \mathbb{Z}_+^m, x \in I^m).$$

Изучается следующая задача: при каких условиях на кратную полиномиальную систему $\{P_n\}$ $(n \in \mathbb{Z}_+^m)$ и элементы матрицы Λ^m линейный процесс $U_n(f;x;\Lambda^m)$ аппроксимирует функцию f:

$$\lim_{\substack{\min n_j \to \infty \\ 1 \le j \le m}} U_n(f;x;\Lambda^m) = f(x) \quad (n=(n_1,n_2,\dots,n_m) \in \mathbb{Z}_+^m). \tag{22}$$

Введем следующую символику. Обозначим через Q^m множество всех мультииндексов, состоящих из m чисел, равных $0, \pm 1$:

$$Q^m = \{q, q=(q_1,q_2,\dots,q_m), q_i = 0,\pm 1; i=1,2,\dots,m\}.$$

Символ $\sum\limits_{k=0}^{n}{}^{(q)}$, где $k=(k_1,k_2,\dots,k_m)$, $n=(n_1,n_2,\dots,n_m)$, $q \in Q^m$, означает, что суммирование по k_i от 0 до n_i производится лишь для таких номеров i, что $q_i = 0$ либо $q_i = 1$. Символ $\Delta^{(q)}\lambda_k^{(n)}$ $(k=(k_1,k_2,\dots,k_m), n=(n_1,n_2,\dots,n_m))$ $q \in Q^m$, означает операцию взятия разности второго порядка лишь для номеров i таких, что $q_i = 0$ либо $q_i = 1$, в то время как по остальным k_i разности вообще не берутся и k_i заменяется на n_i. Если индекс q отсутствует, то полагаем, что $\Delta_{2k}\lambda_k^{(n)}$ есть вторая разность от элемента $\lambda_{k_1,k_2,\dots,k_m}^{(n_1,n_2,\dots,n_m)}$ по всем $k_1,k_2,\dots,k_m$.

Разобьем множество Q^m на два подмножества

$$\Omega^m = \{q, q \in Q^m, q=\{q_i\}, q_i = \pm 1, i=1,2,\dots,m\}, \quad S^m = \{q \in Q^m, q \notin \Omega^m\}.$$

Положим

$$\bar{a}_{k_i,n_i} = \begin{cases} \dfrac{(n_i+1)(n_i-k_i+1)}{n_i+1} \ln \dfrac{3(n_i+1)}{n_i-k_i+1}, & \text{если в данном } q \text{ на } i\text{-том месте стоит I} \\ 1 & \text{— " — — " — — " — } -1 \\ M_{n_i}^{(i)} & \text{— " — — " — — " — } 0 \end{cases} \quad (i=1,2,\dots,m)$$

где $M_{n_i}^{(i)}$ определяется из условия

$$M_{n_i}^{(i)} = M_{n_i}^{(i)}(\varphi_0^{(i)}; [c_i,d_i]; \{P_{n_i}^{(i)}\}) = \max_{0 \le k_i \le n_i+2} \sup_{x \in E_i} \frac{|P_{n_i}^{(i)}(x_i)|}{\varphi_0^{(i)}(x_i)} \quad (i=1,2,\dots,m),$$

при этом $\varphi_0^{(i)} \in L_p^1(E_i)$, $\varphi_0^{(i)}(x) \geq 1$, $[c_i,d_i] < [-1,1]$, $E_i = [-1,1] \setminus [c_i,d_i]$ $(i=1,2,\dots,m)$.

Обозначим

$$a_{kn}^{(q)} = \prod_{i=1}^{m} \bar{a}_{k_i,n_i}^{(q)}.$$

Следующие три утверждения показывают, что в отличие от теоремы Ш.Феффермана результаты о Λ^m-суммируемости по Принсхейму справедливы и в m-мерном случае.

<u>Теорема 9.</u> Пусть одномерные ОНСП $\{P_{n_i}^{(i)}\}$ $(n_i \in \mathbb{Z}_+; i=1,2,\dots,m)$

удовлетворяют условиям (6), (7), (9) (на промежутке $[c_i,d_i]\subset[-1,1]$, $i=1,2,\dots,m$) и для элементов матрицы Λ^m выполняются следующие предположения:

I) при каждом фиксированном наборе $k=(k_1,k_2,\dots,k_m)$

$$\lim_{\substack{\min n_i\to\infty\\ 1\le i\le m}} \lambda_k^{(n)}=1\,; \tag{23}$$

2) имеет место оценка

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+^m}\sum_{q\in\Omega^m}\sum_{k=0}^{n}{}^{(q)}\, a_{kn}^{(q)}\left|\Delta_{2k}^{(q)}\lambda_k^{(n)}\right|\le C<+\infty.$$

Тогда для любой непрерывной на I^m функции f равномерно на каждом компакте из $I_0^m=\prod_{i=1}^{m}(c_i,d_i)$ справедливо соотношение (22).

<u>Теорема 10.</u> Пусть одномерные ОНСП $\{P_{n_i}^{(i)}\}$ $(n_i\in\mathbb{Z}_+;\, i=1,2,\dots,m)$ и элементы Λ^m удовлетворяют предположениям предыдущей теоремы. Если, кроме того, выполняются условия "согласования"

$$M_{n_i}^{(i)}=O(n_i)\quad (n_i\to\infty;\, i=1,2,\dots,m) \tag{24}$$

и

$$\sum_{q\in S^m}\sum_{k=0}^{n}{}^{(q)}\, a_{kn}^{(q)}\left|\Delta_{2k}^{(q)}\lambda_k^{(n)}\right|=O(1)\quad (n\to\infty),$$

то для любой функции $f\in L_R^1(\log^+L_R^1)^{m-1}(I^m)$, удовлетворяющей условию

$$f\,\Phi^{(0)}\in L_R^1(I^m)\quad \left(\Phi^{(0)}(x)=\prod_{i=1}^{m}\varphi_i^{(0)}(x_i)\right), \tag{25}$$

R - почти всюду в I_0^m справедливо соотношение (22).

Мультииндекс $n=(n_1,n_2,\dots,n_m)$ ограниченно стремится к бесконечности, если $\min\limits_{1\le i\le m} n_i\to\infty$ и $\theta^{-1}\le\frac{n_i}{n_j}\le\theta$ $(\theta\ge1)$.

Как известно, существует периодическая функция $f(x_1,\dots,x_m)\in L^1[0,2\pi]^m$, ряд Фурье которой по кратной тригонометрической системе не суммируется всюду методом $(C;1,1,\dots,1)$, но ограниченно $(C;1,1,\dots,1)$ - суммируется к $f(x_1,x_2,\dots,x_m)$ почти всюду.

Теорема II. Пусть одномерные ОНСП $\{p_{n_i}^{(i)}\}$ $(n_i \in \mathbb{Z}_+; i=1,2,\dots,m)$ удовлетворяют условиям (6), (7), (9), (24) (на промежутке $[c_i,d_i] \subset (-1,1)$). Если для элементов матрицы Λ^m выполняются соотношение (23) и оценка

$$\prod_{i=1}^{m}(n_i+1)\sum_{k=0}^{n}|\Delta_{2k}\lambda_k^{(n)}| \le C,$$

то для любой функции f , удовлетворяющей (25), R - почти всюду в I_0^m имеет место предельное равенство (22), когда n ограниченно стремится к бесконечности.

Отметим, что теоремы 8-II являются новыми и в случае кратных рядов Фурье-Якоби.

Аналогичные утверждения справедливы и для суммируемости рядов Фурье (21) методом Пуассона-Абеля.

В §§ 4 и 5 изучены m -мерные операторы обобщенного квазисдвига и усеченного одностороннего взвешенного сдвига.

Рассмотрим три системы одномерных полиномов $\{p_{n_i}^{(i)}\}$, $\{q_{n_i}^{(i)}\}$, $\{h_{n_i}^{(i)}\}$ $(n_i \in \mathbb{Z}_+)$, ортонормированных на промежутке $[-1,1]$ с весами $\rho_1^{(i)}(x_i)$, $\rho_2^{(i)}(x_i)$, $\rho_3^{(i)}(x_i)$, соответственно, и образуем кратные полиномиальные системы

$$\{P_n(x)\} = \left\{\prod_{i=1}^{m} p_{n_i}^{(i)}(x_i)\right\}, \{Q_n(x)\} = \left\{\prod_{i=1}^{m} q_{n_i}^{(i)}(x_i)\right\}, \{H_n(x)\} = \left\{\prod_{i=1}^{m} h_{n_i}^{(i)}(x_i)\right\},$$

ортонормированные на кубе I^m с весами

$$R_1(x) \equiv R(x) = \prod_{i=1}^{m}\rho_1^{(i)}(x_i),\ R_2(x) = \prod_{i=1}^{m}\rho_2^{(i)}(x_i),\ R_3(x) = \prod_{i=1}^{m}\rho_3^{(i)}(x_i).$$

Для заданной последовательности

$$\Gamma = \{\Gamma_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+^m} = \left\{\Gamma_n \equiv \Gamma_{n_1,n_2,\dots,n_m},\ \Gamma_n \in \mathbb{R}^1, \Gamma_n \ne 0, n \in \mathbb{Z}_+^m\right\}$$

введем операторы

$$\mathfrak{M}_n^+ : f \longrightarrow \mathfrak{M}_n^+ f = \sum_{k=0}^{n}\Gamma_k \hat{f}_k P_{k+1},\ \hat{f}_k = \int_{I^m} f(z)P_k(z)R_1(z)\,dz\ \ (k,n \in \mathbb{Z}_+^m)$$

и

$$T^{(y;\Gamma)}: f \longrightarrow T^{(y;\Gamma)} f = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_k C_k(f) Q_k(y) P_k$$

(y -фиксированная точка, $y \in I^m$)

$$C_k(f) = \int_{I^m} f(z) H_k(z) R_3(z)\, dz \quad (k \in \mathbb{Z}_+^m),$$

при этом сумма ряда понимается как предел последовательности частных сумм по прямоугольникам (по Принсхейму).

Получены аналоги одномерных результатов, при этом, например, условие (20) в двумерном случае имеет вид

$$|\Gamma_{n_1,n_2}| N_{n_1}^{(1)} N_{n_2}^{(2)} \ln\frac{n_1+1}{N_{n_1}^{(1)}} \ln\frac{n_2+1}{N_{n_2}^{(2)}} + N_{n_1}^{(1)} \ln\frac{n_1+1}{N_{n_1}^{(1)}} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} N_{k_2}^{(2)} \ln\frac{k_2+1}{N_{k_2}^{(2)}} |\Delta_{k_2}\Gamma_{n_1,k_2}| +$$

$$+ N_{n_2}^{(2)} \ln\frac{n_2+1}{N_{n_2}^{(2)}} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} N_{k_1}^{(1)} \ln\frac{k_1+1}{N_{k_1}^{(1)}} |\Delta_{k_1}\Gamma_{k_1,n_2}| +$$

$$+ \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} N_{k_1}^{(1)} N_{k_2}^{(2)} \ln\frac{k_1+1}{N_{k_1}^{(1)}} \ln\frac{k_2+1}{N_{k_2}^{(2)}} |\Delta_{k_1,k_2}\Gamma_{k_1,k_2}| \le C_i \;(i=1,2),$$

причем

$$N_{n_i}^{(i)} = 1 + \sum_{s=0}^{n_i} \left(|a_s^{(i)} - \tfrac{1}{2}| + |b_s^{(i)} - \tfrac{1}{2}| + |c_s^{(i)} - \tfrac{1}{2}| + |u_s^{(i)}| + |v_s^{(i)}| + |w_s^{(i)}|\right) (n_i \in \mathbb{Z}_+; i=1,2),$$

где $\{a_s^{(i)}\}, \{b_s^{(i)}\}, \{c_s^{(i)}\}, \{u_s^{(i)}\}, \{v_s^{(i)}\}, \{w_s^{(i)}\}$ $(s=0,1,\dots,n_i;\ i=1,2)$ - коэффициенты рекуррентных соотношений для полиномов $\{P_{n_i}^{(i)}(x_i)\}$, $q_{n_i}(x_i)$, $h_{n_i}^{(i)}(x_i)$, соответственно (см. (I), (I6)).

В § 6 Гл.Ш дано приложение результатов и методов Гл.Ш к полиномиальному методу Бубнова-Галеркина для интегрального уравнения Фредгольма

$$f(t) - \int_{-1}^{1} K(t,s) f(s) \rho(s)\, ds = h(t) \quad (-1 \le t \le 1), \tag{26}$$

где в качестве координатной системы взята ортонормированная с весом $\rho(x)$ система полиномов $\{P_n\}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$:

$$h_n(t)=\sum_{k=0}^{n} \hat{h}_k P_k(t),\quad \hat{h}_k=\int_{-1}^{1} h(t)P_k(t)\rho(t)dt \ (k=0,1,\dots,n;\ n\in\mathbb{Z}_+)$$

$$h_n(t)=\sum_{k=0}^{n} \hat{h}_k P_k(t),\quad \hat{h}_k=\int_{-1}^{1} h(t)P_k(t)\rho(t)dt \ (k=0,1,\dots,n;\ n\in\mathbb{Z}_+)$$

$$K_n(t,s)=\sum_{k,l=0}^{n} c_{kl} P_k(t)P_l(s),$$

$$c_{kl}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} K(t,s)P_k(t)P_l(s)\rho(t)\rho(s)dt\,ds \ (k,l=0,1,\dots,n;\ n\in\mathbb{Z}_+).$$

Если $f^*(t)$ – единственное решение уравнения (26), а $f_n(t)$ – решение соответствующего вырожденного уравнения

$$f_n(t)-\int_{-1}^{1} K_n(t,s)f_n(s)\rho(s)ds=h_n(t) \ (-1\le t\le 1),$$

то доказана сходимость полиномиального процесса Бубнова-Галеркина в пространстве $L^r_\rho[-1,1]$ $(1<r<\infty)$ и получены априорные оценки для f^*-f_n, $h-h_n$, $K-K_n$ через соответствующие наилучшие приближения $E_n^{(r)}(h)$ и $E_n^{(r',r)}(K)$ $(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1)$:

$$E_n^{(r)}(h)=\inf_{a_k}\Big\|h-\sum_{k=0}^{n}a_k P_k\Big\|_{r,\rho},$$

$$E_n^{(r',r)}(K)=\inf_{b_{kl}}\Big\|K-\sum_{k,l=0}^{n}b_{k,l}P_k\otimes P_l\Big\|_{L^{r',r}_{\rho\times\rho}},$$

где

$$\|g\|_{L^{r',r}_{\rho\times\rho}}=\left\{\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}|g(t,s)|^{r'}\rho(s)ds\right]^{\frac{r}{r'}}\rho(t)dt\right\}^{\frac{1}{r}} \ (1<r<\infty).$$

Доказательства утверждений основаны на полученной в § 6 весовой оценке двукратного преобразования Гильберта в смешанных весовых лебеговых пространствах $L^{r',r}_{\rho\times\rho}([-1,1]^2)$.

Глава IУ диссертации посвящена изучению ряда вопросов гармонического анализа для матричных и операторных ортогональных полиномов.

Пусть $R(x)$ $(-1 \le x \le 1)$ - симметричная положительно-определенная матрица-функция порядка $N \times N$ $(1 < N < \infty)$ такая, что все ее элементы интегрируемы по Лебегу, и $\{\varphi_n\}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ - система матричных полиномов порядка $N \times N$, ортонормированных с весом $R(x)$:

$$\int_{-1}^{1} \varphi_n(x) R(x) \varphi_m^*(x)\, dx = \delta_{n,m} \mathbb{1} \quad (m, n \in \mathbb{Z}_+),$$

где $\mathbb{1}$ - единичная квадратная матрица порядка N. Имеет место трехчленное рекуррентное матричное соотношение

$$x \varphi_n(x) = A_n \varphi_{n+1}(x) + V_n \varphi_n(x) + A_{n-1}^* \varphi_{n-1}(x) \left(n \in \mathbb{Z}_+;\ \varphi_{-1}(x) = 0, A_{-1} = 0\right), \quad (27)$$

где $\varphi_0(x)$ - постоянная обратимая матрица, а матрицы A_n и V_n вычисляются по формулам

$$A_n = \int_{-1}^{1} x \varphi_n(x) R(x) \varphi_{n+1}^*(x)\, dx, \quad V_n = \int_{-1}^{1} x \varphi_n(x) R(x) \varphi_n^*(x)\, dx \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

Каждой матрице-функции $F(x)$ $(-1 \le x \le 1)$, для которой существуют матричные коэффициенты Фурье

$$C_k(F) = \int_{-1}^{1} F(x) R(x) \varphi_k^*(x)\, dx \quad (k \in \mathbb{Z}_+)$$

поставим в соответствие ряд Фурье по системе $\{\varphi_k\}$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$:

$$F(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} C_k(F) \varphi_k(x) \quad (-1 \le x \le 1). \quad (28)$$

В § I получен порядок роста частных сумм ряда Фурье (28) и рассмотрена задача о восстановлении матрицы - функции $F(x)$ с помощью линейных средних ее ряда Фурье

$$U_n(F; x; \Lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} C_k(F) \varphi_k(x) \quad (n \in \mathbb{Z}_+;\ x \in [-1, 1]),$$

где $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$ - матрица (3).

Теорема I2. Предположим, что существует вещественная матрица - функция $\Phi(x)$ с неотрицательными элементами такая, что при всех $x \in (-1, 1)$ справедлива оценка

$$|\varphi_n(x)| \le \Phi(x) \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \quad (29)$$

причем

$$\int_{-1}^{1} \Phi(x)\,|R(x)|\,\Phi'(x)dx \le B, \quad \int_{-1}^{1} |R(x)|\,\Phi'(x)\,dx \le B,$$

где B - ненулевые вещественные постоянные квадратные матрицы порядка N с конечными неотрицательными элементами и $\Phi'(x)$ - транспонированная матрица для $\Phi(x)$. Если для коэффициентов рекуррентного соотношения (27) имеет место оценка

$$\sum_{l=0}^{n}|A^*_{l-1}A_{l-1}-A_lA^*_l| + \sum_{l=0}^{n}\left(|A_lV_{l+1}-V_lA_l|+|V_{l+1}A^*_l-A^*_lV_l|\right)\le B\;(n\in\mathbb{Z}_+)$$

и для элементов суммирующей матрицы (3) выполняется (8), то в каждой точке Лебега $x\in(-1,1)$ матрицы - функции $F(x)$, удовлетворяющей условию

$$\int_{-1}^{1} |F(x)R(x)|\,\Phi'(x)\,dx \le B,$$

справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} U_n(F;x;\Lambda)=F(x).$$

В частности, отсюда следует $(C,\alpha>0)$ - суммируемость почти всюду ряда Фурье (28).

В § 2 вводится некоммутативный оператор обобщенного сдвига $\tilde{T}^y$ по ортонормированным матричным полиномам $\{\mathcal{P}_k\}(k\in\mathbb{Z}_+)$ по формуле

$$\tilde{T}^y F(x)=\sum_{k=0}^{\infty} C_k(F)\,\mathcal{P}_k^{-1}(1)\,\mathcal{P}_k(y)\,\mathcal{P}_k(x) \quad (-1<x,y<1,\ y \text{ - фиксировано}) \qquad (30)$$

В отличие от скалярного случая абстрактная теория операторов $\tilde{T}^y$ не построена (для неограниченных о.о.с., задаваемых матричными мерами и действующими в пространстве вектор-функций Л.И.Вайнерман[4]) доказал формулы Планшереля и обращения), наш подход, основанный на представлении матричного ядра $\sum_{k=0}^{n}\mathcal{P}_k^{-1}(1)\,\mathcal{P}_k(y)\,\mathcal{P}_k(x)$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$, позволяет получить оценку нормы $\tilde{T}^y$.

---

[4]) Л.И.Вайнерман // ДАН СССР. - 1988. - 302, № I. - С. I4-I8.

Теорема I3. Пусть ортонормированная система матричных полиномов $\{\mathcal{P}_k\}$ $(k\in\mathbb{Z}_+)$ удовлетворяет (29) и

$$\max_{-1\le y\le 1} |\mathcal{P}_k^{-1}(1)\mathcal{P}_k(y)|\le B \quad (k\in\mathbb{Z}_+).$$

Пусть, далее, для коэффициентов рекуррентного соотношения (27) выполняются условия

$$\sum_{k=0}^{n}\left|A_k-\tfrac{1}{2}\mathbb{1}\right|+\sum_{k=0}^{n}|V_k|\le B \ (n\in\mathbb{Z}_+)$$

и

$$|\mathcal{P}_n^{-1}(1)|\ln(n+2)+\sum_{k=0}^{n-1}|\mathcal{P}_k^{-1}(1)-\mathcal{P}_{k+1}^{-1}(1)|\ln(k+2)\le B \ (n=1,2,\dots).$$

Если для некоторого τ, $1<\tau<\infty$, матрица - функция $F(x)$ и матричный вес $R(x)$ удовлетворяют предположениям

$$\int_{-1}^{1}\|F(x)\|^{\tau}\|R(x)\Phi'(x)\|^{\tau}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}<\infty,\quad \int_{-1}^{1}\|R(x)\Phi'(x)\|^{\tau}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}<\infty,$$

то имеют место следующие утверждения:

I) ортогональный матричный ряд (30) сходится почти всюду в $(-1,1)$ при каждом фиксированном $y\in(-1,1)$;

2) справедлива оценка

$$\left\{\int_{-1}^{1}\|\tilde{T}^{y}F(x)\|^{\tau}(1-x^2)^{\frac{\tau}{2}}\|\Phi(x)\|^{-\tau}dx\right\}^{\frac{1}{\tau}}\le c\,\frac{\|\Phi(y)\|}{\sqrt{1-y^2}}\left\{\int_{-1}^{1}\|F(x)\|^{\tau}\|R(x)\Phi'(x)\|^{\tau}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right\}^{\frac{1}{\tau}}$$

$$(1<\tau<\infty),$$

где скалярная постоянная $c>0$ не зависит от матрицы - функции $F(x)$ и переменной $y\in(-1,1)$.

В § 3 Гл.IУ исследуются ряды Фурье векторнозначных функций по скалярной системе ортонормированных полиномов.

Для вектор - функции $\vec{f}=\{f_k\}(k\in\mathbb{Z}_+)$, $\vec{f}\in L_p^{\tau}([-1,1];\ell^2)(1<\tau<\infty)$ положим

$$\tilde{S}_{\mathfrak{N}}\vec{f}(x)=\left(S_{n_1}f_1(x),S_{n_2}f_2(x),\dots,S_{n_k}f_k(x),\dots\right)\ (x\in[-1,1];\ \mathfrak{N}=\{n_k\},\ n_k\in\mathbb{Z}_+;\ k=1,2,\dots)$$

и

$$|\tilde{S}_{\mathfrak{N}}\vec{f}(x)|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|S_{n_k}f_k(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad |\vec{f}(x)|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

<u>Теорема I4.</u> Пусть ортонормированная с весом $p(x)$ система полиномов $\{P_n\}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$ принадлежит классу P_0 и при некотором r, $1<r<\infty$, для весов $p(x)$ и $\omega(x)$ выполняется условие (I4). Тогда

$$\left\{\int_{-1}^{1}|\tilde{S}_{\mathfrak{N}}\vec{f}(x)|^r\omega(x)dx\right\}^{\frac{1}{r}}\le C\left\{\int_{-1}^{1}|\vec{f}(x)|^r\omega(x)dx\right\}^{\frac{1}{r}}$$

где постоянная $C>0$ не зависит от $\vec{f}\in L^r_{\omega}([-1,1];l^2)\cap L^r_p([-1,1];l^2)$ и $\mathfrak{N}$.

В случае конечной системы ультрасферических полиномов невесовой вариант получен Б.Макенхоуптом и Е.Стейном.[5)]

Для вектор - функций $\vec{f}$ со значениями в банаховом UMD-пространстве рассмотрены линейные методы суммирования рядов Фурье по системе $\{P_n\}$ $(n\in\mathbb{Z}_+)$ и введен оператор обобщенного квазисдвига T^y, для которых получены результаты о Λ-суммируемости и установлена оценка нормы.

В последнем параграфе Гл.IУ для рядов Фурье по операторным полиномам доказаны аналоги теорем 4 (одновесовой вариант) и 5.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

I. Осиленкер Б.П. О суммировании полиномиальных разложений Фурье функций классов L^p_{χ} $(1\le p<\infty)$ // Докл. АН СССР. - 1972. - 202, № 3. - С. 529-531.

---

5) B.Muckenhoupt, E.Stein // Trans. Amer. Math. Soc. - 1965. - 118, № 6. - P. 17-92.

2. Осиленкер Б.П. О линейных методах суммирования разложений Фурье по ортонормированным многочленам // Докл. АН СССР. - 1973. - 209, № 1. - С. 40-42.
3. Осиленкер Б.П. О сходимости и суммируемости разложений Фурье по ортонормированным полиномам, ассоциированным с разностными операторами второго порядка // Сиб. матем.журн. - 1974. - 15, № 4. - С. 892-908.
4. Осиленкер Б.П. Суммирование методом Пуассона-Абеля разложений по многочленам, ассоциированным с матрицей Якоби // Труды УI Всесоюзной Зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам. Функциональный анализ и его приложения. М., 1975. - С. 215-229.
5. Осиленкер Б.П. О линейных методах суммирования двойных полиномиальных разложений // ФА и его приложения. - 1977. - 11, № 1. - С. 77-78.
6. Осиленкер Б.П. О линейных процессах приближения функций многих переменных // В сб. "Исследования по теории функций многих вещественных переменных". - Ярославль. Изд-во ЯГУ.- 1978. - С. 176-195.
7. Осиленкер Б.П. О взвешенной полиномиальной аппроксимации линейными средними функций многих переменных // Докл. АН СССР. - 1979. - 247, № 6. - С. 1320-1324.
8. Осиленкер Б.П. Весовые оценки мажорант линейных средних рядов Фурье по ортогональным полиномам // Успехи матем. наук. - 1980. - 35, № 5. - С. 239-240.
9. Осиленкер Б.П. Весовые оценки мажорант чезаровских средних рядов Фурье ℓ^ν -значных вектор - функций // ФА и его приложения. - 1981. - 15, № 1. - С. 80-81.
10. Осиленкер Б.П. Аппроксимация функций многих переменных с помощью средних Пуассона-Абеля кратных полиномиальных разложений Фурье // Bull. Appl. Math., Budapest, 1981. - 83-88/81 (XIX). - P. 1-15.
11. Осиленкер Б.П. О взвешенной полиномиальной аппроксимации функций многих переменных // Сиб. матем. журн. - 1982. - 23, № 6. - С. 139-146.
12. Осиленкер Б.П. О рядах Фурье по ортогональным полиномам // Труды Международной конф. по конструктивной теории функций, Варна, 1984; София, 1984. - С. 61-65.

I3. Осиленкер Б.П. О восстановлении функции m -переменных по ее степенным моментам // Докл. расш. засед. ин-та прикладной математики им. И.Н.Векуа. - 1985. - I. - С. I03-I05.

I4. Осиленкер Б.П. Оператор обобщенного сдвига и структура свертки для ортогональных полиномов // Докл. АН СССР. - 1988. - 298, № 5. - С. I072-I076.

I5. Осиленкер Б.П. Об ортонормированных полиномиальных базисах в весовых лебеговых пространствах // Успехи матем. наук. - 1988. - 43, № 5. - С. 207-208.

I6. Осиленкер Б.П. Ряды Фурье по ортонормальным матричным полиномам // Известия ВУЗов, Матем. - 1988. - № 2. - С. 50-60.

I7. Осиленкер Б.П. Оператор обобщенного сдвига по ортогональным матричным полиномам // Докл. АН СССР. - 199I. - 3I8, № 2. - С. 282-284.

I8. Osilenker B.P. The representation of the trilinear Kernel for general orthogonal polynomials and some applications // Journ. Approximation Theory. - 199I. - 67, № I. - P.93-II4.

I9. Осиленкер Б.П. Оценка нормы оператора обобщенного векторного квазисдвига по ортогональным полиномам // ФА и его приложения. - 1992. - 26, № I. - С. 6I-63.

20. Osilenker B.P. The Generalized Λ-Translation in a multiple orthogonal polynomial system // Israel Math. Conf. Proceedings. - 1992. - v.5. - P. I65-I85.

2I. Osilenker B.P. Generalized Translation Operator, Convolution Structure and their Applications to the polynomial Approximation // Book of Abstracts, Math. Congress "Extrapolation and Rational Approximation", Tenerife, Spain. - 1992.

Подписано в печать 7.02.94. Формат 60х84 I/I6.Печать офсетная
И-I5 Объем 2 уч.-изд.л. Т.I00 Заказ 104
Московский государственный строительный университет.Типография МГСУ. I29337, Москва, Ярославское ш., 26.

13. Сокольнер Б.П. О пространствах функций [illegible] // Докл. Росс. акад. наук. – [illegible]. – Т. [illegible] – С. 109-[illegible].
14. Бондаренко Б.П. [illegible] // Докл. АН СССР. – [illegible]. – С. [illegible]-1027.
15. [illegible] // [illegible]. – 1994. – Т. 32, № 5. – С. 297-300.
16. Холманер В.П. [illegible] // Вестник ВГУ. [illegible]. – 1998. – № 2. – С. 59-60.
17. Бондаренко Б.П. [illegible] // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 316, № 2. – С. 290-294.
18. [illegible] // Journ. Approximation Theory. – 1993. – 67, № 1. – P. 95-114.
19. [illegible] // [illegible]. – 1992.
20. [illegible] // [illegible]. – 1995. – [illegible] – P. 107-130.
21. [illegible] Approximation // Book of Abstracts [illegible]. – 1995.

Подписано в печать 7.02.96. Формат 60х84 1/16. Печать офсетная.
[illegible]