КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ

імені Тараса Шевченка

На правах рукопису.

ШПОРТЮК Володимир Григорович

УДК 519.21

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ, ЯКІ ЗОБРАЖУЮТЬСЯ СТОХАСТИЧНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПО ПОЛЯХ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ПРИРОСТАМИ.

01.01.05 теорія ймовірностей та математична статистика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття вченого ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Київ - 1994

Робота виконана на кафедрі вищої математики №1 Київського політехнічного інституту.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор Булдигін Валерій Володимирович.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор Мішура Юлія Степанівна.
кандидат фізико-математичних наук, Маляренко Анатолій Андрійович

Провідна організація: Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАН України (м. Київ).

Захист дисертації відбудеться 31 жовтня 1994р. о 14.00 год. на засіданні спеціалізованої ради К 01.01.14 по присудженню вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук в Київському університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 252127, Київ, проспект Академіка Глушкова, 6, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці університету.

Автореферат розіслано 30 вересня 1994 року.

Вчений секретар спеціалізованої ради Курченко О.О.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

<u>Актуальність теми.</u> В теорії випадкових процесів і полів та її застосуванні в оптиці, сейсмографії, голографії, радіотехніці, електроніці, теорії зв"язку важливу роль відіграють випадкові поля, які зображуються стохастичними інтегралами по полях з незалежними приростами.

Серед робіт, присвячених вивченню полів з незалежними приростами слід відзначити роботи М.Л.Страфа, А.І.Каткаускайте, Н.Калінаускайте, Ю.С.Мішури, Н.М.Зінченко, С.М.Савенко. Теорія інтегралів по мірах з незалежними значеннями викладена в книзі А.В.Скорохода(1986) і роботах Н.В.Радченко. Властивості різних видів стохастичних інтегралів по полях з незалежними приростами вивчали R.Cairoli і J.Wolsh, Prakasa Rao, Ю.С.Мішура, С.М.Савенко.

$$\text{Нехай } \varkappa(\bar{t})=\int_{\mathbb{R}^m} f(\bar{t},\bar{s})\,d\zeta(\bar{s})$$

де $f(\bar{t},\bar{s})$- невипадкова дійсна функція, що називається функцією відгуку; $\zeta(\bar{s})$- стохастично нерерервне центроване однорідне поле з незалежними приростами.

З будови поля (Скороход А.В.1986) випливає співвідношення:

$$\varkappa(\bar{t})=\int_{\mathbb{R}^m} f(\bar{t},\bar{s})\,d\zeta(\bar{s}) = \int_{\mathbb{R}^m} f(\bar{t},\bar{s})\,d\xi(\bar{s}) + \int_{\mathbb{R}^m} \sigma_v f(\bar{t},\bar{s})\,dw(\bar{s}) = \eta(\bar{t})+\gamma(\bar{t})$$

де $w(\bar{s})$- стандартне вінерове поле за Ченцовим; $\xi(\bar{s})$- стохастично неперервне однорідне поле з незалежними приростами, в якого відсутня гаусова компонента; при цьому поля $\xi(\bar{s})$ і $w(\bar{s})$ - незалежні. Поле $\eta(\bar{t})$ будемо називати узагальненим полем дробового ефекту, а $\varkappa(\bar{t})$-лінійним полем. Поле $\gamma(\bar{t})$-гауссове. Прикладом фізичного процесу, що приводить до випадкового процесу типу дробового ефекту, є дробовий ефект у вакуумних трубках. Ряд прикладів процесів дробового ефекту і зв"язаних з ними математичних моделей є в роботах С.М.Ритова, В.М.Золотарьова, та інш. авторів. Деякі властивості як процесів дробового ефекту, так і узагальнених процесів дробового ефекту вивчались в роботах В.Ф. Синявського, Р. Луганані, С.О. Райса, В.В. Булдигіна і Н.В. Яровоі, В.В. Довгалюка, В.М. Мельника. В цих роботах вивчались локальні властивості таких процесів, оцінки для розподілу супремуму, функціональні граничні теореми та теореми типу Леві-Бакстера.

В даній дисертаційній роботі вивчаються умови нормалізаціі узагальнених полів дробового ефекту у просторі неперервних функцій та теореми Леві-Бакстера для однорідних узагальнених полів дробового ефекту .

Теореми Леві-Бакстера вивчають умови збіжності в середньому квадратичному або майже напевне квадратичноі варіаціі випадкових функцій до невипадковоі, відмінноі від нуля, сталоі. Ці теореми досить добре вивчені для гауссових процесів і полів (Е.Г.Гладишев, Ю.А.Розанов, Ю.М. Рижов, В.Г.Алексеев та інші). Умови збіжності бакстерових сум для гауссових процесів у нормах простору Орліча досліджувались Е.П.Бесклінською і Ю.В.Козаченком.

Теореми бакстерового типу для випадкових процесів і полів, які не є гауссовими, вивчались в роботах Ф.Козіна, П.Пірре, Ю.В.Бондаря, О.О.Курченко, В.В.Булдигіна та В.М.Мельника. Бакстерові теореми для узагальнених стохастичних інтегралів вивчались А.А.Дороговцевим. Теореми Леві-Бакстера для строго-субгауссових процесів були отримані В.В.Булдигіним і Ю.В.Козаченком.

Ці теореми використовуються для знаходження ефективних критеріїв сингулярності мір (Е.Г.Гладишев, В.Г.Алексеев, Ю.М.Рижов, О.О.Курченко, Ю.А.Розанов), що відповідають процесам, які мають бакстерову властивість. Цей підхід використовується в задачах виділення сигналу на фоні шуму (Д.Слепян).

Різні статистичні задачі, подібні до описаних вище, в застосуванні до узагальнених полів дробового ефекту обумовлюють необхідність вивчення теорем Леві-Бакстера для таких полів.

Мета роботи. Знайти умови нормалізації узагальнених полів дробового ефекту у просторі неперервних функцій. Отримати теореми Леві-Бакстера для одорідних узагальнених полів дробового ефекту та критерії сингулярності мір, що відповідають однорідним узагальненим полям дробового ефекту.

Методика дослідження. В дисертації використовуються теоретико-ймовірнісні методи дослідження, а також методи і факти спектральної теорії функцій.

Наукова новизна. В дисертаційній роботі отримані такі основні результати:

- знайдено умови нормалізації скінченновимірних розподілів узагальнених полів дробового ефекту ;
- знайдено семіінваріантні умови нормалізації цих полів у просторі неперервних функкій;
- знайдено умови бакстеровості однорідних узагальнених полів дробового ефекту на фіксованому та зростаючому параметричних інтервалах у термінах функцій відгуку та спектральних термінах;
- доведено теореми, типу тереми Гладишева, для однорідних узагальнених полів дробового ефекту зі спектральними

щільностями спеціального вигляду.

- знайдено достатні умови сингулярності мір, що відповідають однорідним узагальненим полям дробового ефекту.

<u>Теоретична і практична цінність.</u> Результати дисертаційної роботи можуть бути використані при вивченні аналітичних властивостей реалізацій полів дробового ефекту; в задачах побудови стохастичних інтегралів по узагальнених полях дробового ефекту; для знаходження ефективних критеріїв сингулярності мір; в задачах виділення сигналу на фоні завад та інших статистичних задачах для узагальнених полів дробового ефекту.

<u>Апробація роботи і публікації.</u> Основні результати дисертації доповідались на семінарах з теорії ймовірностей і теорії випадкових процесів Київського політехнічного інституту , першій (1992), другій (1993) і третій (1994) науково- молодіжних міжнародних конференціях імені Академіка М.Кравчука "Теоретичні та прикладні аспекти математики"(КПІ) Третій Донецькій міжнародній конференції "Ймовірнісні моделі процесів у керуванні та надійності" (1993) і опубліковані в роботах:[1 - 4]

<u>Структура і об"єм роботи.</u> Дисертація складається зі вступу і двох розділів, розбитих на сім параграфів. Об"єм роботи 150 ст. машинописного тексту.
Бібліографія включає 73 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ.

<u>У вступі</u> наведено короткий огляд досліджень, пов'язаних з темою дисертації, та викладено основні результати роботи.

У першому розділі досліджуються умови нормалізації узагальнених полів дробового ефекту

В §1 встановлено структуру характеристичної функції стохастичних інтегралів по випадкових мірах з незалежними значеннями. Нехай $\mu(B)$, $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$ – зліченноадитивна стохастично неперервна випадкова міра з незалежними значеннями, визначена на множинах борелевої σ-алгебри $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^m)$. Відомо [Скороход,1986,ст.144], що міра $\mu(B)$ допускає зображення: $\mu(B)=\mu_o(B)+\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}} x I_{\{|x|<S\}} I_B d[\nu-\Pi]+\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}} x I_{\{|x|\ge S\}} I_B d\nu$,

де $\mu_o(B)$-гауссова зліченноадитивна стохастично неперервна міра, незалежна від пуасонової випадкової міри з незалежними значеннями $\nu(U\times B)$, $U\subset R\setminus\{0\}$, а $\Pi(U\times B)$ – міра Леві випадкової міри $\mu(B)$, тобто $\Pi(U\times B)=E\nu(U\times B)$.

ТЕОРЕМА1.1 Нехай випадкова міра $\mu(B)$ є зліченноадитивною стохастично неперервною однорідною центрованою випадковою мірою з незалежними значеннями без гауссової компоненти і задовольняє умови: $\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}} |x| I_B d\Pi < \infty$, (1) $\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}} x^2 I_B d\Pi < \infty$. (2)

а невипадкова функція $f(\bar{t})$ така, що: $\int\limits_{\mathbb{R}^m} f^2(\bar{t})d\bar{t}<\infty$.

Тоді визначений стохастичний інтеграл $I(f)=\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(\bar{t})d\mu$

і його характеристична функція має вигляд: $E\, exp\{i\lambda I(f)\} =$

$$= exp\left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}} \left[e^{i\lambda x f(\bar{t})}-1-i\lambda x f(\bar{t})\right] \Pi(dx)\, d\bar{t}\right\}.$$

У § 2 встановлюється взаємозв'язок між стохастичними інтегралами по випадкових мірах з незалежними значеннями і між стохастичними інтегралами по випадкових полях з незалежними приростами. Якщо задано випадкову міру μ, що задовольняє умови (1) і (2), то поставимо їй у відповідність випадкове поле $\xi(\bar{t}) := \mu((0,\bar{t}])$. А якщо задано випадкове поле $\xi(\bar{t})$ то визначимо на R_o (R_o - злічене кільце, породжене півкільцем напіввідкритих інтервалів з раціональними кінцями $(\bar{s},\bar{t}]\subset(\bar{a},\bar{b}])$ випадкову міру μ: $\mu((\bar{s},\bar{t}]) := \Delta_{\bar{t}-\bar{s}}\xi(\bar{t})$ де $\Delta_{\bar{b}-\bar{a}}\xi(\bar{a}) = (\prod_{r=1}^{m}\Delta_{r,b_r-a_r})\xi(\bar{a})$,- приріст поля $\xi(\bar{t})$ на m-вимірному інтервалі $(\bar{a},\bar{b}]\subset\mathbb{R}^m$,

а $\Delta_{r,b_r-a_r}\xi(\bar{a}) = \xi(b_1,\dots,b_r,\dots,b_m) - \xi(b_1,\dots,a_r,\dots,b_m)$.

Нехай поле $\xi(\bar{t})$ таке, що: 1) для $\forall\ B\in R_o$ $E(\mu(B))^2<\infty$, (3)

2) для довільної послідовності $\{B_n,\ n\geq1\}\in R_o$ такої, що

$B_n\supset B_{n+1}\in R_o$ і $\bigcap_n B_n = 0$ $\lim_{n\to\infty} E(\mu(B))^2 = 0$. (4)

При цих умовах міру μ, породжену полем з незалежними приростами $\xi(\bar{t})$ на R_o можна продовжити до σ-адитивної міри μ на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.

ТЕОРЕМА 2.1. Нехай $\zeta(\bar{t})$ - дійсне сепарабельне стохастично неперервне однорідне центроване випадкове поле з незалежними приростами, яке задовольняє умови (3) і (4), а невипадкова функція $f(\bar{t})$ така, що $\int_{\mathbb{R}^m} f^2(\bar{t})d\bar{t}<\infty$.

Тоді визначений стохастичний інтеграл

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^m} f(\bar{t})d\xi(\bar{t}) := \int_{\mathbb{R}^m} f(\bar{t})d\mu$$

і його характеристична функція $E\ exp\{i\lambda I(f)\} =$

$$= exp\left\{-\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\int_{\mathbb{R}^m} f^2(\bar{t})\ d\bar{t} + \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}}\left[e^{i\lambda x f(\bar{t})} - 1 - i\lambda x f(\bar{t})\right]\Pi(dx)\ d\bar{t}\right\}.$$

Нехай $f(\bar{t},\bar{s})$ така дійсна функція, що для довільного $\bar{t}\in\mathbb{R}^m$

$f_{\bar t}=(f(\bar t,\bar s),\ \bar s\in\mathbb{R}^m)\in L_2(\mathbb{R}^m)$. Якщо $\zeta(\bar s)$, $\bar s\in\mathbb{R}^m$ –стохастично неперервне однорідне центроване поле з гауссовою компонентою і незалежними приростами то, згідно з теоремою 2.1, визначене випадкове поле $\varkappa(\bar t)=\int_{\mathbb{R}^m} f(\bar t,\bar s)\,d\zeta(\bar s)$ (5)

з характеристичною функцією

$$\varphi_t(\lambda) = E\,exp\Big\{i\lambda\varkappa(\bar t)\Big\} = exp\Big\{-\frac{\lambda^2\sigma_v^2}{2}\int_{\mathbb{R}^m} f^2(\bar t,\bar s)\,d\bar t +$$

$$+\int_{\mathbb{R}^m}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[exp\Big\{i\lambda f(\bar t,\bar s)x\Big\}-1-i\lambda f(\bar t,\bar s)x\Big]\Pi(dx)d\bar s\Big\}. \qquad (6)$$

Поле $\varkappa(\bar t)$, $\bar t\in\mathbb{R}^m$ будемо називати лінійним полем, породженим полем $\zeta(\bar s)$ і функцією відгуку $f(\bar t,\bar s)$, $\bar t,\bar s\in\mathbb{R}^m$.

Якщо $\zeta(\bar s)=w(\bar t),\bar t\in\mathbb{R}^m$ є стандартне вінерове поле за Ченцовим то визначене гауссове поле, яке зображується стохастичним інтегралом $\eta_v(\bar t)=\int_{\mathbb{R}^m} f(\bar t,\bar s)dw(\bar s)$, $\bar t\in\mathbb{R}^m$ (7)

Якщо у поля $\zeta(\bar s)=\xi(\bar s)$ відсутня гауссова компонента, то визначене поле, яке зображується стохастичним інтегралом

$$\eta(\bar t)=\int_{\mathbb{R}^m} f(\bar t,\bar s)d\xi(\bar s),\ \bar t\in\mathbb{R}^m \qquad (8)$$

Поле $\eta(\bar t)$, $\bar t\in\mathbb{R}^m$ будемо називати узагальненим полем дробового ефекту, породженим полем $\xi(\bar s)$ і функцією відгуку $f(\bar t,\bar s)$.

Якщо функція відгуку $f(\bar t,\bar s)$ залежить від різниці аргументів, тобто $f(\bar t,\bar s) = f(\bar t-\bar s)$, $\bar t,\bar s\in\mathbb{R}^m$ і $f\in L_2(\mathbb{R}^m)$, то поле $\eta(\bar t)=\int_{\mathbb{R}^m} f(\bar t-\bar s)d\xi(\bar s)$ є стаціонарним (однорідним).

Тому будемо називати такі поля однорідними узагальненими полями дробового ефекту.

У §3 встановлено умови нормалізації скінченновимірних розподілів стохастичних інтегралів по випадкових полях з незалежними приростами та узагальнених полів дробового ефекту і умови нормалізації узагальнених полів дробового ефекту у просторі неперервних функцій.

ТЕОРЕМА 3.1. Нехай H – топологічний простір, $\Theta \subset H$, $(\xi_\theta(\bar t), \bar t \in \mathbb{R}^m)$, $\theta \in \Theta$ –сім'я полів з незалежними приростами, таких, що для кожного $\theta \in \Theta$ міра μ_θ, порджена полем ξ_θ, задовольняє умови теореми 1.1. Якщо, як і раніше, функція $f \in L_2(\mathbb{R}^m)$ і додатково: 1) $G_2 = \int_{\mathbb{R}^m} |f(\bar t)|^2 d\bar t < \infty$,

2) $\delta^2(\theta) = \Lambda_2(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \Pi_\theta(dx) > 0$,

3) для довільного $\varepsilon > 0$ $\displaystyle \lim_{\theta \to \theta_0} \frac{\int_{|x| > \varepsilon\delta(\theta)} x^2 \Pi_\theta(dx)}{\delta^2(\theta)} = 0$,

де $\theta_0 \in H \setminus \Theta$, і θ_0 є граничною точкою H, то

$$\frac{1}{\delta(\theta)} \int_{\mathbb{R}^m} f(\bar t)\, d\xi_\theta(\bar t) \xrightarrow[\theta \to \theta_0]{} \int_{\mathbb{R}^m} f(\bar t)\, dw(\bar t).$$

ТЕОРЕМА 3.2. Нехай H-топологічний простір, $\Theta \subset H$, $(\xi_\theta(\bar t), \bar t \in \mathbb{R}^m)$, $\theta \in \Theta$ –сім'я полів з незалежними приростами, таких, що для кожного $\theta \in \Theta$ μ_θ задовольняє умови теореми 1.1. Нехай $f(\bar t, \bar s)$, $\bar t, \bar s \in \mathbb{R}^m$ – функція відгуку і

$\eta_\theta(\bar t) = \int_{\mathbb{R}^m} f(\bar t, \bar s)\, d\xi_\theta(\bar s)$ –узагальнені поля дробового ефекту.

Якщо додатково для кожного $\bar t \in \mathbb{R}^m$ $\int_{\mathbb{R}^m} |f(\bar t, \bar s)|^2 d\bar s < \infty$

і виконана умова 3) Теореми 3.1, то для довільних $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}^m$, $n \geq 1$

$$\left[\frac{\eta_\theta(\bar t_1)}{\delta(\theta)}, \ldots, \frac{\eta_\theta(\bar t_m)}{\delta(\theta)}\right] \xrightarrow[\theta \to \theta_0]{} \left[\eta_\omega(\bar t_1), \ldots, \eta_\omega(\bar t_m)\right],$$

тобто усі скінченновимірні розподіли поля

$\hat\eta_\theta(\bar t) = \frac{1}{\delta(\theta)} \int_{\mathbb{R}^m} f(\bar t, \bar s)\, d\xi_\theta(\bar s)$, $\bar t \in \mathbb{R}^m$ збігаються при $\theta \to \theta_0$ до відповідних скінченновимірних розподілів поля

$$\eta_\omega(\bar t)=\int_{\mathbb{R}^m} f(\bar t,\bar s)\,dw(\bar s),\ \bar t\in\mathbb{R}^m.$$

ТЕОРЕМА 3.3. Нехай виконуються умови:

А) для довільного $\theta\in\Theta$ і довільного $k\ge 1$

$$\Delta_k(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^k\,\Pi_\theta(dx)<\infty,$$

Б) для довільного $\bar t\in[\bar a,\bar b]\subset\mathbb{R}^m$ і довільного $k\ge 1$

$$\int_{\mathbb{R}^m}|f(\bar t,\bar s)|^k d\bar s<\infty,$$

В) псевдометрика $\rho(t,s)=\sup\limits_{\theta\in\Theta}\rho_\theta(t,s)$ неперервна на метричному компакті $(\mathbb{S},d)$;

Г) для кожного $\theta\in\Theta$ $\quad\int_{0^+} H_\theta^{\frac12}(\mathbb{S},\varepsilon)\,d\varepsilon<\infty;$

Д) $\lim\limits_{u\to 0}\sup\limits_{\theta\in\Theta}\int_0^u H_\theta^{\frac12}(\mathbb{S},\varepsilon)\,d\varepsilon=0$, де $H_\theta(\mathbb{S},\varepsilon)$ – метрична ентропія множини $\mathbb{S}=[\bar a,\bar b]\subset\mathbb{R}^m$ відносно псевдометрики ρ_θ, а псевдометрики ρ_θ, $\theta\in\Theta$ визначаються співвідношенням:

$$\rho_\theta(t,\tau)=\sup_{k\ge 2}\left[\frac{\Delta_k(\theta)\int_{\mathbb{R}^m}|f(\bar t,\bar s)-f(\bar\tau,\bar s)|^k d\bar s}{(k-2)!\,\delta^k(\theta)}\right]^{\frac{1}{2(k-1)}}$$

і, крім того, виконується умова 3) теореми 3.1 Тоді

$$P\left\{\eta_\theta\in C[\bar a,\bar b]\right\}=1,\quad P\left\{\eta_\omega\in C[\bar a,\bar b]\right\}=1$$

і нормовані поля $\hat\eta_\theta$ збігаються слабко у просторі неперервних функцій до гауссового центрованого поля η_ω.

<u>У другому розділі</u> розглядаються теореми Леві-Бакстера для однорідних узагальнених полів дробового ефекту.

<u>У §4</u> доведено теореми Леві-Бакстера для однорідних узагальнених полів дробового ефекту на фіксованому параметричному інтервалі у термінах функції відгуку та у

спектральних термінах.

Розглянемо однорідне узагальнене поле дробового ефекту ($\eta=\eta(t), t\in[0;1]^m\subset R^m$), яке зображується стохастичним інтегралом: $\eta(t)=\int_{R^m} f(t-s)d\xi(s)$ де $f(t), t\in R^m$ є функція відгуку, така, що $\int_{R^m} |f(s)|^k ds<\infty$, $k=\overline{1,4}$, а $\xi(t), t\in R^m$ є дійсне сепарабельне стохастично неперервне однорідне центроване випадкове поле з незалежними приростами без гаусової компоненти, визначене на основному ймовірнісному просторі $(\Omega,\mathfrak{F},P)$, яке задовольняє умови: $\sigma_k=\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k\Pi(dx)<\infty, k=\overline{1,4}$

Розіб'емо кожен інтервал $[0,1]$ точками вигляду $t_k=k\tau_n$, де $k=\overline{1,N_n}$, а $(\tau_n)^{-1}=N_n$ - натуральне число. Позначимо $\bar{N}=(N_n,N_n,\dots,N_n)$. і визначимо приріст порядку $p=(p_1,p_2,\dots,p_m)$ (де p_r- ціле невід'ємне число $r=\overline{1,m}$) випадкового поля $\eta(t)$ на m-вимірному кубі $[t,t+h]$, $(t,h)\in R^m$, $h=(h,h,\dots,h)$ як $\Delta_h^{\bar{p}}\eta(t)=\left[\prod_{r=1}^{m}\Delta_{r,h}\left(\prod_{i=1}^{p_r-1}\Delta_{r,h}\right)\right]\eta(t)$,

де $\Delta_{r,h}\eta(t)=\eta(t_1,\dots,t_r+h,\dots,t_m)-\eta(t_1,\dots,t_r,\dots,t_m)$ і при $p_r=0$, r-й співмножник у добутку є одиничним оператором. Нехай тепер $\tau_n\to0$ при $n\to\infty$ так, що для $\forall n:\tau_n^{-1}\in N$

Розглянемо послідовність бакстерових сум

$$S_n^{(2)}(\eta)=C_n\sum_{\bar{k}=1}^{\bar{N}}\left[\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}}\eta((\bar{k}-1)\tau_n)\right]^2,\ n\geq1 \text{ де } \sum_{\bar{k}=1}^{\bar{N}}=\sum_{k_1=1}^{N_n}\dots\sum_{k_m=1}^{N_n}$$

і $\{C_n, n\geq1\}$ - невипадкова нормуюча послідовність.

ТЕОРЕМА 4.1 Для того, щоб послідовність $\left\{S_n^{(2)}(\eta),\ n\geq1\right\}$ збігалась у середньому квадратичному до невипадкової сталої C , необхідно і досить, щоб вона задовольняла умови:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} C_n\sigma_2\tau_n^{-m}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}} f(\bar{s})\right)^2 d\bar{s} = C$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^2 \sum\limits_{\bar{k}=1}^{N} \sum\limits_{\bar{j}=1}^{N}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left[\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}} f((\bar{k}-\bar{j})\tau_n+\bar{s})\right]\left[\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}} f(\bar{s})\right]d\bar{s}\right]^2 = 0;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^2 \sum\limits_{\bar{k}=1}^{N} \sum\limits_{\bar{j}=1}^{N}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left[\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}} f((\bar{k}-\bar{j})\tau_n+\bar{s})\right]^2\left[\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}} f(\bar{s})\right]^2 d\bar{s} = 0.$

Певним недоліком у формулюванні теореми 4.1 є наявність у її умовах наростаючих сум. Перехід від функції відгуку $f(\bar{s})$ до її перетворення Фур'є $\hat{f}(\bar{\lambda})$ дозволяє уникнути цього недоліку і отримати зручніші для перевірки умови теореми Леві-Бакстера. Крім того, введення в умови відповідних теорем перетворення Фур'є функції відгуку є природнім, оскільки $\sigma_2\left|\hat{f}(\bar{\lambda})\right|^2$ є спектральною щільністю однорідного узагальненого поля дробового ефекту.

Нехай $\hat{f}(\lambda)=(2\pi)^{-\frac{m}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}^m} exp\{-i\langle\lambda,\bar{s}\rangle\}f(\bar{s})d\bar{s}\quad \lambda\in\mathbb{R}^m$

ТЕОРЕМА 4.2. Для того щоб послідовність $\left\{S_n^{(2)}(\eta),\ n\geq 1\right\}$ збігалась у середньому квадратичному до невипадкової сталої C, необхідно і досить, щоб вона задовольняла умови:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} C_n\sigma_2\tau_n^{-m}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(\prod\limits_{r=1}^{m}\left[2\sin\frac{\tau_n\lambda_r}{2}\right]^{2p_r}\right)\left|\hat{f}(\lambda)\right|^2 d\lambda = C$;

2) $$\lim\limits_{n\to\infty} C_n^2\int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(\prod\limits_{r=1}^{m}\frac{\sin^2\frac{(\lambda_r+\mu_r)}{2}}{\sin^2\frac{\tau_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}}\ *\right.$$

$$\left. *\left[4\sin\frac{\tau_n\lambda_r}{2}\sin\frac{\tau_n\mu_r}{2}\right]^{2p_r}\right)\left|\hat{f}(\lambda)\right|^2\left|\hat{f}(\mu)\right|^2 d\lambda d\mu = 0.$$

$$3)\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, C_n^2 \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m}\left[\prod_{r=1}^{m}\frac{\sin^2\frac{(\lambda_r+\mu_r)}{2}}{\sin^2\frac{\tau_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}}\right]\hat{f}(\lambda)\hat{f}(\mu)\,*$$

$$*\hat{f}^*(\lambda+\theta)\hat{f}^*(\mu-\theta)h_{\bar{p},\tau_n}(\lambda)h_{\bar{p},\tau_n}(\mu)h_{\bar{p},\tau_n}(-\lambda-\theta)h_{\bar{p},\tau_n}(-\mu+\theta)\,d\lambda d\mu d\theta = 0$$

де $h_{\bar{p},\tau_n}(\lambda)=\left\{\Delta_{\tau_n}^{\bar{p}}\exp(i\langle\lambda,t\rangle)\Big|_{t=0}\right\}$.

У §5 доведено теореми Леві-Бакстера для однорідних узагальнених полів дробового ефекту на зростаючому параметричному інтервалі. Розглядатимемо поле $\eta(t)$ на інтервалі $[0,\alpha_n]^m$, де $\{\alpha_n, n\geq1\}$ є невипадкова послідовність така, що $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\infty$. Розіб'ємо кожен інтервал $[0,\alpha_n]$ точками вигляду $t_k=k\alpha_n\tau_n$, де $\tau_n^{-1}=N_n\in\mathbb{N}$, $k=1,N_n$ і $\lim_{n\to\infty}\alpha_n\tau_n=0$. Розбиття $[0,\alpha_n]^m$ влаштуємо як декартів добуток розбиттів кожного $[0,\alpha_n]$. Розглянемо Бакстерову суму:

$$S_n^{(2)}(\eta)=C_n\alpha_n^{-m}\sum_{\bar{k}=1}^{N}\left[\Delta_{\tau_n\alpha_n}^{\bar{p}}\eta((\bar{k}-1)\alpha_n\tau_n)\right]^2,\ n\geq1$$

ТЕОРЕМА 5.2. Для того щоб послідовність $\left\{S_n^{(2)}(\eta),\ n\geq1\right\}$ збігалась у середньому квадратичному до невипадкової сталої C, необхідно і досить, щоб вона задовольняла умови:

$$1)\ \lim_{n\to\infty} C_n\sigma_2(\alpha_n\tau_n)^{-m}\int_{\mathbb{R}^m}\left(\prod_{r=1}^{m}\left[2\sin\frac{\tau_n\alpha_n\lambda_r}{2}\right]^{2p_r}\right)\left|\hat{f}(\lambda)\right|^2 d\lambda = C\ ;$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} C_n^2\alpha_n^{-2m}\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m}\left[\prod_{r=1}^{m}\frac{\sin^2\frac{\alpha_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}}{\sin^2\frac{\alpha_n\tau_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}}\left[\sin\frac{\tau_n\alpha_n\lambda_r}{2}\right]^{2p_r}*\right.$$

$$\left.*\left[\sin\frac{\tau_n\alpha_n\mu_r}{2}\right]^{2p_r}\right]\left|\hat{f}(\lambda)\right|^2\left|\hat{f}(\mu)\right|^2 d\lambda d\mu = 0.$$

$$3)\lim_{n\to\infty} C_n^2\alpha_n^{-2m}\mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m}\left[\prod_{r=1}^{m}\frac{\sin^2\frac{\alpha_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}}{\sin^2\frac{\alpha_n\tau_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}}\right]\hat{f}(\lambda)\hat{f}(\mu)*$$

$$*\hat{f}^*(\lambda+\theta)\hat{f}^*(\mu-\theta)h_{p,\tau_n\alpha_n}^-(\lambda)h_{p,\tau_n\alpha_n}^-(\mu)h_{p,\tau_n\alpha_n}^-(-\lambda-\theta)*$$

$$*h_{p,\tau_n\alpha_n}^-(-\mu+\theta)d\lambda d\mu d\theta = 0.$$

де $h_{p,\tau_n\alpha_n}^-(\lambda)=\left\{\Delta^{\bar{p}}_{\tau_n\alpha_n} exp(i\langle\lambda,t\rangle)\Big|_{t=0}\right\}$.

З цієї теореми випливають зручні для перевірки достатні умови бакстеровості:

НАСЛІДОК 5.2. Для того щоб послідовність $\left\{S_n^{(2)}(\eta), n\geq 1\right\}$ збігалась у середньому квадратичному до невипадкової сталої C досить, щоб вона задовольняла умови 1) і 2) теореми 5.2 і умову: 3)

$$\lim_{n\to\infty} C_n(\tau_n\alpha_n^{-1})^m\int_{R^m}\int_{R^m}\left\{\prod_{r=1}^{m}\frac{\sin^2\frac{\alpha_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}}{\sin^2\frac{\alpha_n\tau_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}}*\right.$$

$$\left.*\left|\sin\frac{\tau_n\alpha_n\lambda_r}{2}\right|^{p_r}\left|\sin\frac{\tau_n\alpha_n\mu_r}{2}\right|^{p_r}\right\}\left|\hat{f}(\lambda)\right|\left|\hat{f}(\mu)\right| d\lambda d\mu = 0.$$

У §6 доведено теореми Леві-Бакстера на зростаючому параметричному інтервалі для однорідних узагальнених полів дробового ефекту перетворення Фур'є функції відгуку яких має степеневий характер малості на нескінченності.
Такі задачі для гауссових процесів розглядав Е.Гладишев, а для узагальнених процесів дробового ефекту і полів дробового ефекту - В.В.Булдигін і В.М.Мельник.
ТЕОРЕМА 6.1. Нехай $\eta(t)$, $t\in R^m$ -однорідне узагальнене поле дробового ефекту з фунцією відгуку $f(t)$, перетворення Фур'е якої задовольняе умову

I) $|\hat{f}(\lambda)| = M\,\|\lambda\|^{-\beta}+ o(\|\lambda\|)^{-\beta}$ при $\|\lambda\|\to\infty$

де $\|\lambda\|=\left(\sum_{r=1}^{m}\lambda_r^2\right)^{1/2}$, $M>0$, $\beta>m$.

Нехай $p=p(\beta)=k$, якщо $2km-m < 2\beta < 2km+m$

$$C_n=\begin{cases}(\alpha_n\tau_n)^{2m-2\beta}, & \text{якщо } 2\beta \neq 2k\pi+m\\ (\alpha_n\tau_n)^{2m-2\beta}\left|ln(\alpha_n\tau_n)\right|^{-1}, & \text{якщо } 2\beta = 2k\pi+m\end{cases}$$

Тоді якщо 2) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\infty$, 3) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n\tau_n=0$,

а у випадку, коли $2\beta=2k\pi+m$ додатково ще і

4) $\exists\theta>0$: $\alpha_n^2\tau_n\geq\theta$ для $\forall n$,

то $$\underset{n\to\infty}{l.i.m.}=C_n\alpha_n^{-m}\sum_{k}^{\bar{N}}\left[\Delta^{P}_{\alpha_n\tau_n}\eta((\bar{k}-1)\alpha_n\tau_n)\right]^2=C,$$

де $$C=\lim_{n\to\infty}\sigma_2 C_n(\alpha_n\tau_n)^{-m}\int_{R^m}\left[\prod_{r=1}^{m}\left(2sin\frac{\lambda_r\alpha_n\tau_n}{2}\right)^{2p}\right]|\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda.$$

ТЕОРЕМА 6.2. Нехай $\eta(t),t\in R^m$ – однорідне узагальнене поле дробового ефекту з функцією відгуку $f(t)$, перетворення Фур'є якої задовольняє умову

1) $|\hat{f}(\lambda)|=M\prod_{r=1}^{m}|\lambda_r|^{-\beta_r/2}+o\left(\prod_{r=1}^{m}|\lambda_r|^{-\beta_r/2}\right)$ при $\sup_{1\leq r\leq m}|\lambda_r|\to\infty$; $M>0$.

Нехай $$p_r=p_r(\beta_r)=\begin{cases}1, & \text{якщо } 2<\beta_r\leq 3\\ k, & \text{якщо } 2k-1<\beta_r\leq 2k+1, k\geq 2\end{cases}\quad r=\overline{1,m}$$

$C_n=\prod_{r=1}^{m}C_{nr}$, $\quad C_{nr}=\delta_n(\beta_r)(\alpha_n\tau_n)^{2-\beta_r}$

де $$\delta_n(\beta_r)=\begin{cases}1, & \text{якщо } \beta_r\neq 2k+1\\ |ln(\alpha_n\tau_n)|^{-1} & \text{якщо } \beta_r=2k+1\end{cases}$$

Тоді якщо 2) $\alpha_n\to\infty$, при $n\to\infty$ 3) $\tau_n\alpha_n\to 0$, при $n\to\infty$

4) $\exists$ $\theta>0$: $\forall n$ $(\tau_n)^{\frac{m-1}{2}}(\alpha_n)^{\frac{3m-1}{2}}>\theta>0$

то $$\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\ C_n\alpha_n^{-m}\sum_{k=1}^{N}(\Delta^{p}_{\tau_n\alpha_n}\eta((k-1)\tau_n\alpha_n))^2=C$$

де $$C=\lim_{n\to\infty}\sigma_2 C_n(\alpha_n\tau_n)^{-m}\int_{R^m}\left[\prod_{r=1}^{m}\left(2sin\frac{\lambda_r\alpha_n\tau_n}{2}\right)^{2p_r}\right]|\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda<\infty$$

У §7 розглядаються твердження про сингулярність мір, які відповідають узагальненим полям дробового ефекту.

Нехай $\eta_1(\bar t)$, $\eta_2(\bar t)$, $\bar t\in\mathbb{R}^m_+$ – узагальнені однорідні поля дробового ефекту з функціями відгуку $\varphi_1(\bar t)$ і $\varphi_2(\bar t)$, тобто:

$$\eta_1(\bar t)=\int_{\mathbb{R}^m}\varphi_1(\bar t-\bar s)d\xi(\bar s),\quad \eta_2(\bar t)=\int_{\mathbb{R}^m}\varphi_2(\bar t-\bar s)d\xi(\bar s),$$

ТЕОРЕМА 7.1. Якщо η_1, η_2 узагальнені однорідні поля дробового ефекту з функціями відгуку, перетворення Фур'є яких задовольняють умови:

$$|\hat\varphi_i(\lambda)| = M_i\|\lambda\|^{-\beta_i}+o(\|\lambda\|^{-\beta_i}) \text{ при } \|\lambda\|\longrightarrow\infty,\ M_i>0,\ \beta_i>m,\ i=1,2;$$

і $$\lim_{\|\lambda\|\to\infty}|\hat\varphi_1(\lambda)|/|\hat\varphi_2(\lambda)|\neq 1,$$

то ймовірнісні міри, що відповідають цим полям у функціональному просторі реалізацій будуть сингулярні.

Основні положення дисертації опубліковані в роботах:

1. Шпортюк В.Г. Про стохастичні інтеграли по полях з незалежними приростами.//Случайные процессы и бесконечномерный анализ. (сб. научн. трудов). Киев Ин-т. математики АН Украины 1992 С. 115-125.
2. Булдигін В.В. та Шпортюк В.Г. Про нормалізацію випадкових полів, які зображуються стохастичними інтегралами по полях з незалежними приростами. //Теорія ймовірностей і мат. статистика 49 (1993) ст. 65-82.
3. Шпортюк В.Г. Деякі граничні теореми для узагальнених полів дробового ефекту.//Деп. в Укр.НДІНТІ 12.04.1994 №682 Ук.94
4. Шпортюк В.Г. Про деякі граничні теореми для узагальнених полів дробового ефекту. //Праці Всеукраїнської конференції молодих вчених (математика). Ч.2. С. 283-290. Деп. в Укр.НДІНТІ 20.07.1994 №1302 Ук.94.

Шпортюк В.Г. О некоторых свойствах случайных полей, представимых стохастическими интегралами по полям с независимыми приращениями. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика. Киевский университет. Киев. 1994.

Получены условия нормализации конечномерных распределений обобщенных полей дробового эффекта. Найдены семиинвариантные условия нормализации таких полей в пространстве непрерывных функций. Доказаны теоремы типа Леви-Бакстера для однородных обобщенных полей дробового еффекта и типа Гладышева для обобщенных полей дробового эффекта с функциями отклика специального вида.

Shportyouk V.Gr. On some properties of random fields represented by stochastic integrals over fields with independent increments. Manuscript. Thesis for a degree of candidate of sciences (Ph.D) in physics and mathematics, speciality 01.01.05 -theory of probability and mathematical statistics. Kiev University. Kiev. 1994.

Conditions of the normalization of finite-dimensional distributions of a generalized Schottky effect fields are given. Semi-invariant conditions of the normalizations of these fields in the space of continuous functions are found. Levi-Baxters theorems and Gladyshev theorems for homogeneous generalized Schottky effect fields with response function of special type are proved.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нормалізація, стохастчний інтеграл, випадкове поле, сингулярність, незалежні прирости, бакстеровість.

Підп. до друку . .94. Формат 60х84/16. Папір друк. Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,16.
Ум. фарбо-відб. 1.6. Обл.-вид. арк. 0.85. Тираж 100 пр. Зам. 200

representation by stochastic integrals over fields with independent increments. Manuscript. Thesis for a degree of candidate of sciences (Ph.D) in physics and mathematics, speciality 01.01.05 - theory of probability and mathematical statistics. Kiev University. Kiev. 1994.

Conditions of the normalization of finite-dimensional distributions of a generalized Schottky effect fields are given. Best possible conditions of the normalizations of these fields in the space of continuous functions are found.