

На правах рукопису

В Р И Н Е Ц Ь

Володимир Євстахович

**НАПРУЖЕННИ СТАН НЕОДНОРІДНИХ ОРТОТРОПНИХ ДВОВИМІРНИХ
ТІЛ ПІД ДІЄЮ СТАТИЧНИХ, ДИНАМІЧНИХ І ТЕМПЕРАТУРНИХ
НАВАНТАЖЕНЬ**

01.02.04 - Механіка деформівного твердого тіла

А в т о р е ф е р а т

дисертації на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Володимир Євстахович

Львів - 1994

ІНД ім. В. Стефанів
НА України

Дисертацією в рукописі
Робота виконана на кафедрі будівельної механіки
державного університету "Львівська політехніка"

Науковий консультант: доктор фіз.-мат. наук, професор
Мартинівич Тимофій Лазарович

Офіційні опоненти: - доктор техн. наук, професор
Флейшман Наум Петрович
- доктор фіз.-мат. наук, професор
Пелех Богдан Любомирович
- доктор фіз.-мат. наук, професор
Осадчук Василь Антонович

Провідна установа: Харківський авіаційний інститут
ім. М. С. Жуковського

Захист відбудеться "21" грудня 1994 р. о 16⁰⁰ год.
на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 016.42.01 при
Фізико-механічному інституті ім. Г. В. Карпенка НАН України
(290601, м. Львів, МПС, вул. Наукова, 5)

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Фізико-
механічного інституту ім. Г. В. Карпенка НАН України
(290601, м. Львів, МПС, вул. Наукова, 5)

Автореферат розіслано "11" листопада 1994 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради
доктор технічних наук

Григорук
Г. М. Никифорчин

ЛНБ ім. В. Стефаника
АН України

ЛНБ України ім. В. Стефаника



00755857 (.)

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність проблеми. Для виготовлення складових частин конструкцій поряд з матеріалами, які при розрахунках вважаються ізотропними і однорідними, все ширше використовуються анізотропні і неоднорідні матеріали, в яких спостерігається відмінність у пружних властивостях як для різних напрямків, так і вздовж певного напрямку.

Неоднорідність пружних властивостей різноманітних тіл може бути природною, виникнути в процесі формування заготовки, зокрема внаслідок особливостей технологічних процесів виробництва відповідних виробів, або з'явитися в процесі експлуатації конструкцій під впливом агресивних середовищ тощо. Крім того, до задач теорії пружності неоднорідних тіл можна звести багаточисленні задачі механіки, наприклад теорії пластичності, термопружності та інших.

У теорії пружності неоднорідних тіл виділяється три основних розділи: пружні тіла з неперервною неоднорідністю, кусково-однорідні і випадково-неоднорідні пружні тіла. Кожен із розділів має свою область застосування і характеризується певною специфікою використовуваних методів дослідження. Розв'язування задач теорії пружності для неоднорідних тіл пов'язано із значними труднощами, що зумовлено складною структурою вихідних співвідношень і необхідністю задоволення крайових умов. Це спонукало розробку різних методів і підходів, необхідних при розв'язуванні багатьох важливих прикладних задач.

Значний внесок у розвиток основних положень теорії

пружності неперервно-неоднорідних тіл зроблено у відомих працях Я.М.Григоренка, Г.Б.Колчина, С.Г.Лехницького, В.О.Ломакіна, В.С.Нікішина, В.П.Плевако, Б.Я.Попова, М.А.Ростовцева, В.С.Саркісяна, Л.П.Хорошуня та інших.

Переважна більшість досліджень в цій області стосується неоднорідних ізотропних середовищ і базується на тому, що модуль пружності - певного виду функція однієї з координат, наприклад експоненціальна, лінійна чи степенева. В цьому плані виділяються наукові праці І.І.Воровича, В.С.Жгенті, С.Г.Лехницького, Г.Б.Колчина, В.П.Плевако, М.А.Ростовцева, I. Bakitgas, G. A. Maugin та інші. Разом з тим багаточисленні аспекти розв'язування задач неоднорідних ізотропних середовищ вимагають поглибленого вивчення і проведення відповідних досліджень. Слід зауважити, що в науковій літературі не приведені подібні дослідження для неоднорідних ортотропних тіл.

Для розв'язування багатьох практичних задач механіки неоднорідних тіл важливе місце займає розробка і використання наближених та чисельних методів. До них належать апроксимаційні методи, метод малого параметра, метод граничного елемента, модифікований метод допоміжних функцій, метод скінчених різниць, матричні алгоритми, метод скінчених елементів, метод R-функцій та багато інших, які знайшли конкретне застосування у наукових працях Д.В.Весилевича, І.В.Гончаржика, Д.Н.Коперника, В.А.Крисько, Д.М.Немиша, В.Л.Рвачова, Є.С.Сянайського, Н.С.Сивекопа, В.С.Саркісяна, Д.А.Шевлякова, Н.Д.Швайка, J. R. Hutchinson, I. Marksova та ін.

В наш час багато дослідників шукають підходи до розв'язування задач, в яких неоднорідні тіла перебувають в усклад-

нених зовнішніх умовах, зокрема під дією динамічних і температурних навантажень. Подібні задачі розглядаються в працях В.М.Вігака, Ф.М.Джафарова, Г.С.Кіта, А.Г.Колпакова, В.А.Осадчука, Б.Л.Пелеха, А.О.Сяського, А.В.Чигарьова, Y. Sugano, W. Visscher, Z. Wendowski та інших авторів.

У вітчизняній і зарубіжній літературі досить велика увага приділяється розробці методів розрахунку кусково-однорідних конструкцій, в яких певного типу пластини контактують з пружними стержневими елементами. Дослідження таких об'єктів відображено в наукових працях Є.О.Андрейківа, Н.М.Бородачова, Г.М.Валова, В.В.Власова, Е.Х.Григоряна, Д.В.Гриліцького, Т.Л.Мартиновича, В.В.Панасюка, І.О.Прусова, Г.М.Савіна, М.П.Саврука, В.С.Саркісяна, В.І.Тульчія, Н.П.Флейшмана, Н.Н.Шавлакадзе, М.П.Шереметева, А. Deb, M. Booton, K. N. Ronal та інших. В переважній більшості праць, присвячених цій проблемі, контактуючий елемент вважався дуже тонким і його спрощення з торцем пластини здійснювалося по осі. Крім того в розрахунковій схемі враховувалося, що пластини із одворідного матеріалу, розташування стержневого елемента відносно її середньої площини - симетричне, а зовнішнє навантаження - статичне.

Отже, актуальність вибору предмету і об'єкту дослідження викликана такими міркуваннями:

- все ширшим застосуванням у різноманітних конструкціях матеріалів з неперервною і дискретною неоднорідністю пружних властивостей;

- зростаючими вимогами до зменшення металомісткості і підвищення надійності та довговічності інженерних конструкцій;

- потребою при моделюванні розрахункових схем конструкцій більш повного врахування реальних властивостей матеріалів;
- необхідність дослідження впливу дії на неоднорідні тіла статичних, динамічних і температурних навантажень.

Мета роботи полягає:

- в розробці методу розрахунку напруженого стану неоднорідних ортотропних двовимірних тіл при дії статичних, динамічних і температурних навантажень;
- в одержанні диференціальних рівнянь, які описують плоский напружений стан і згин неоднорідних ортотропних двовимірних тіл під дією різних зовнішніх навантажень;
- в розробці математичного підходу знаходження аналітичних розв'язків ключових диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами;
- в побудові розв'язків ключових диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами для певних законів зміни пружних властивостей неоднорідних ортотропних тіл;
- в дослідженні поперечних коливань і стійкості ортотропних пластин, пружні властивості яких - неперервні функції однієї з декартових координат;
- в дослідженні напруженого стану неоднорідних ортотропних пластин під дією температурного навантаження;
- в розробці варіанту теорії моделювання конструкції, яка складається з пластини і контактуючого з нею пружного стержневого елемента, підданої дії динамічного навантаження;
- в дослідженні контактної взаємодії стержневих елементів з анізотропними та неоднорідними ортотропними пластинами.

Наукова новизна полягає в наступному:

1. Розроблено метод розрахунку напруженого стану ортотропних двовимірних тіл з певною неперервною неоднорідністю пружних властивостей при дії зовнішніх статичних, динамічних і температурних навантажень.

2. Виведені диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами, які описують плоский напружений стан і згин неоднорідних ортотропних пластин. Показано, що диференціальні рівняння, які описують згин окремих типів неоднорідних ортотропних пластин, можуть бути використані для розв'язування задач згину однорідних ортотропних пластин змінної товщини.

3. Розроблено математичний підхід знаходження розв'язків одержаних диференціальних рівнянь. Використовуючи його, збудовані аналітичні розв'язки цих рівнянь для певних законів зміни пружних властивостей матеріалу неоднорідних ортотропних тіл.

4. Проведено дослідження поперечних коливань неоднорідних ортотропних пластин. Записано ключове диференціальне рівняння і збудовано його розв'язки для окремих законів зміни неоднорідності матеріалу. Одержані рівняння власних частот вільних поперечних коливань пластин для різних крайових умов закріплення.

5. Розв'язані задачі про згин і поперечні коливання неоднорідних ортотропних пластин, розташованих на суцільній неоднорідній пружній основі.

6. Розв'язані задачі стійкості неоднорідних ортотропних пластин. На підставі одержаних розв'язків вихідного рівняння записані формули для критичних навантажень при певних законах зміни пружних характеристик матеріалу. Розглянуто випад-

ки навантаження пластини сталими і змінними стискаючими зовнішніми зусиллями.

7. Проведено дослідження напруженого стану неоднорідних ортотропних пластин, підданих дії зовнішнього стаціонарного температурного поля. В цьому плані розв'язані задачі узагальненого плоского напруженого стану і згину тонких пластин, для різних випадків закріплення їх країв.

8. Розроблено варіант теорії моделювання конструкції, яка складається із пластини і несиметрично контактуючого з її торцем стержневого елемента, при дії динамічного навантаження. На підставі цього досліджено контактну взаємодію несиметрично розташованого пружного елемента з анізотропними і неоднорідними ортотропними пластинами при дії статичного та динамічного навантаження. Одержані рівняння власних частот коливань конструкції. Записані формули для розрахунку компонент контактних зусиль і моментів.

Методика досліджень базується на пошуку класу функціональних залежностей, який допускає застосування методу розкладання на множники диференціальних операторів ключових рівнянь і зведення процесу побудови їх розв'язків для певних законів зміни неоднорідності до розв'язування послідовності диференціальних рівнянь нижчих порядків. Залучався апарат теорії диференціальних рівнянь, теорії спеціальних функцій, теорії рядів та інтегральних перетворень. Як основні методи дослідження використовуються математичне моделювання та машинний експеримент.

Достовірність основних наукових положень і одержаних результатів забезпечується строгістю постановки задач і ко-

ректністю використання математичних методів їх розв'язування; знаходженням точних аналітичних розв'язків основних вихідних диференціальних рівнянь; співпадінням окремих результатів дисертації з відомими в літературі для однорідних тіл.

Практична цінність. Представлені в роботі математичні моделі дають можливість правильно описати і пояснити пружну поведінку неоднорідних ортотропних тіл, підданих дії статичних, динамічних і температурних навантажень, що до цього часу не знайшло належного відображення в науковій літературі. Диференціальні рівняння, які описують згин окремих типів неперервно-неоднорідних ортотропних пластин, можна застосовувати для розв'язування задач згину однорідних ортотропних пластин змінної товщини.

Результати впливу різних навантажень на напружений стан, згин, коливання і стійкість неоднорідних ортотропних пластин можуть бути використані в інженерних розрахунках при проектуванні конструкцій із відповідних матеріалів, а також при аналізі та прогнозуванні надійності і довговічності їх роботи в реальних реактивних середовищах. Для цієї ж мети можуть бути використані і результати дослідження контактної взаємодії різнотипних пластин з несиметрично розташованими пружними стержневими елементами. Так, окремі результати роботи знайшли конкретне втілення в конструкціях деревообробних станків, про що свідчать авторські свідоцтва [39], [40].

Проведені дослідження здійснювалися у відповідності з програмою наукових досліджень кафедри будівельної механіки університету "Львівська політехніка" по проблемі "Розвиток методів розрахунку міцності, стійкості і коливань конструк-

цій, скерованих на створення нових форм, які дозволяють знизити металомісткість" - № Державної реєстрації 01880006217.

На захист виносяться:

- метод розрахунку напруженого стану неоднорідних ортотропних двовимірних тіл з певними законами неперервної зміни пружних властивостей, підданих дії зовнішніх статичних, динамічних і температурних навантажень;

- аналітичні розв'язки диференціальних рівнянь, які описують плоский напружений стан, згин, стійкість і поперечні коливання ортотропних пластин з певною неоднорідністю пружних характеристик;

- результати дослідження поперечних коливань і стійкості неоднорідних ортотропних пластин;

- результати дослідження впливу пружної неоднорідної основи на згин і поперечні коливання неоднорідних ортотропних пластин;

- результати дослідження впливу стаціонарного температурного поля на узагальнений плоский напружений стан і згин неоднорідних ортотропних пластин;

- варіант теорії моделювання конструкції, яка складеться з пластини і несиметрично контактуючого з її торцем пружного стержневого елемента, при дії динамічного навантаження;

- результати дослідження контактної взаємодії анізотропних і неоднорідних ортотропних пластин із несиметрично розташованим пружним елементом при дії зовнішніх статичних і динамічних навантажень.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідалися на таких симпозіумах, семінарах, нарадах і конфе-

ренціях: II і III Всесоюзних конференціях "Механіка неоднорідних структур" (Львів, 1987 і 1991), науково-технічній конференції "Шляхи удосконалення техніки і технології деревообробної промисловості (Київ, 1976), Всесоюзній конференції "Проблеми оптимізації і надійності в будівельній механіці" (Вільнюс, 1983), Всесоюзній нараді з теорії пружності неоднорідного тіла (Кишинів, 1983), XIV науково-технічній конференції "Науково-технічний прогрес у лісовій і деревообробній промисловості" (Київ, 1983), Всесоюзній конференції з теорії пружності (Тбілісі, 1984), Всесоюзній науково-технічній конференції "Моделювання-85. Теорія, засоби, застосування" (Київ, 1985), XVI науково-технічній конференції "Основні напрямки прискорення науково-технічного прогресу в деревообробній промисловості в XII п'ятиріччі" (Київ, 1986), Всесоюзній конференції "Сучасні проблеми деревиноведення" (Красноярськ, 1987), VI Всесоюзній конференції з композитних матеріалів (Бреван, Ленінякан, 1987), вільному засіданні наукової Ради АН СРСР з тертя і змазування (Луцьк, 1987), Всесоюзній конференції "Температурні задачі і стійкість пластин та оболонок" (Саратов, 1988), Регіональній конференції "Динамічні задачі механіки суцільного середовища" (Краснодар, 1988), I Всесоюзному симпозіумі "Механіка і фізика руйнування композитних матеріалів і конструкцій" (Ужгород, 1988), науково-технічних конференціях "Застосування обчислювальної техніки і математичних методів у наукових та економічних дослідженнях" (Київ, 1988 і Севастополь, 1990), IV Всесоюзній нараді з детонації (Телаві, 1988), VII Міжнародному симпозіумі з динаміки конструкцій (Польща, Рвашів, 1989), Міжреспублікан-

ській науково-технічній конференції "Числові методи розв'язування задач будівельної механіки, теорії пружності та пластичності" (Волгоград, 1990), Всесоюзній науково-технічній конференції "Математичне моделювання в енергетиці" (Київ, 1990), Всесоюзному науковому семінарі "Актуальні проблеми неоднорідної механіки" (Бреван, 1991), I Міжнародному симпозиумі "Фізико-хімічна механіка композитних матеріалів" (Івано-Франківськ, 1993), науковому семінарі "Механіка крихкого руйнування" Фізико-механічного інституту ім.Г.В.Карпенка НАН України (Львів, 1994), науковому семінарі кафедри будівельної механіки і міжфакультетському науковому семінарі університету "Львівська політехніка" (Львів, 1994).

Публікації. По темі дисертації опубліковано 51 наукову працю, з них 1 монографія, 25 статей в періодичних наукових виданнях, 8 публікацій в матеріалах Міжнародних і Всесоюзних симпозиумів, семінарів та конференцій, 2 авторські свідчення і 15 - тези Всесоюзних та Республіканських конференцій.

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається із вступу, восьми розділів, висновків, списку літератури і містить 375 сторінок, з них 43 рисунки, 2 таблиці і 145 бібліографічних найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обгрунтована актуальність і важливість теми дослідження, приведений короткий огляд і аналіз наукових праць, близьких до теми дисертації, визначена мета роботи, викладено короткий зміст роботи і його розподіл по розділах.

В першому розділі на підставі відомих співвідношень виведені диференціальні рівняння, які описують плоский напру-

жений стан і згин неоднорідних ортотропних двовимірних тіл. Вважається, що модулі пружності E_1, E_2 , модуль зсуву G і коефіцієнти Пуассона ν_1, ν_2 - довільні визначено-додатні функції декартових координат, які зображено наступним чином

$$E_1 = E_1^{(0)} e^{-f(x,y)}, \quad E_2 = E_2^{(0)} e^{-f(x,y)}, \quad G = G^{(0)} e^{-f(x,y)},$$

$$\nu_1 = \nu_1^{(0)} e^{-\varphi(x,y)}, \quad \nu_2 = \nu_2^{(0)} e^{-\varphi(x,y)}, \quad (1)$$

де $f(x,y), \varphi(x,y)$ - довільні визначено-додатні функції.

В загальному випадку плоска задача теорії пружності неоднорідних середовищ зводиться до розв'язування диференціальних рівнянь шостого порядку із змінними коефіцієнтами при заданих крайових умовах. Так, якщо пружні характеристики - функції лише координати y , то плоский напружений стан неоднорідного ортотропного тіла описується рівнянням

$$\frac{\partial^6 L}{\partial x^2 \partial y^4} + 2f_y \frac{\partial^5 L}{\partial x^2 \partial y^3} + (f_{yy} + f_y^2) \frac{\partial^4 L}{\partial x^2 \partial y^2} + \left(\frac{E_1^{(0)}}{G^{(0)}} - \right.$$

$$\left. - 2\nu_1^{(0)} e^{-\varphi} \right) \frac{\partial^5 L}{\partial x^4 \partial y^2} + \left[f_y \frac{E_1^{(0)}}{G^{(0)}} + 2\nu_1^{(0)} e^{-\varphi} (\varphi_y - f_y) \right] \frac{\partial^5 L}{\partial x^4 \partial y} +$$

$$+ \nu_1^{(0)} e^{-\varphi} (\varphi_{yy} - \varphi_y^2 + 2f_y \varphi_y - f_{yy} - f_y^2) \frac{\partial^4 L}{\partial x^4} + \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} \frac{\partial^6 L}{\partial x^6} = 0. \quad (2)$$

Функція $L(x,y)$ зв'язана з відомою функцією Ері $F(x,y)$ співвідношенням $F = \partial^2 L / \partial x^2$.

Для цього ж випадку рівняння, яке описує згин тонких неоднорідних ортотропних пластин, має вигляд

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - 2\left(f_y + \frac{2\nu_1}{1-\nu_1}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left[f_y^2 - \frac{2\nu_1}{1-\nu_1} (2\varphi_y f_y + 2\varphi_y^2 \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1}) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\varphi_{yy}) - f_{yy}] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \left[\frac{2G^{(0)}}{E_2^{(0)}} (1-\nu_\varphi) + \nu_1^{(0)} e^{-\varphi} \right] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - 2 \left\{ f_y \left[\nu_1^{(0)} e^{-\varphi} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2G^{(0)}}{E_2^{(0)}} (1-\nu_\varphi) \right] + \nu_1^{(0)} \varphi_y e^{-\varphi} \left(1 + \frac{2\nu_\varphi}{1-\nu_\varphi} \right) \right\} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \left[\nu_1^{(0)} e^{-\varphi} (f_y^2 - \right. \\
& \left. - f_{yy} + \varphi_y^2 - \varphi_{yy} + 2f_y \varphi_y) - \frac{2\nu_\varphi}{1-\nu_\varphi} \left(\frac{4\varphi_y^2}{1-\nu_\varphi} + \varphi_{yy} - 2f_y \varphi_y \right) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\
& \left. + \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{12 e^{\int \varphi} \varphi(x, y)}{(2h)^3 E_2^{(0)}} (1-\nu_\varphi), \quad (3)
\end{aligned}$$

де $2h$ - товщина пластини,

$$\begin{aligned}
f_y &= \frac{df}{dy}, & \varphi_y &= \frac{d\varphi}{dy}, & f_{yy} &= \frac{d^2 f}{dy^2}, & \varphi_{yy} &= \frac{d^2 \varphi}{dy^2}, \\
\nu_\varphi &= \nu_1^{(0)} \nu_2^{(0)} e^{-2\varphi}.
\end{aligned}$$

Функції $L(x, y)$ і $w(x, y)$ розвиваються в ряди по координаті x . Тоді рівняння (2), (3) зводяться до звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку із змінними коефіцієнтами. Процес знаходження аналітичних розв'язків таких рівнянь досить важкий. Якщо у випадку неоднорідних ізотропних тіл для деяких функцій зміни пружних характеристик розв'язки аналогічних рівнянь в літературі відомі, то для неоднорідних ортотропних тіл - відсутні і їх побудова не уявлялась можливою. Проведені автором дослідження виявили, що побудова аналітичних розв'язків рівнянь виду (2)-(3) можлива при існуванні взаємозв'язку між модулями пружності, модулем зсуву і коефіцієнтами Пуансона в деякій точці неперервно-неоднорідного тіла.

Для побудови аналітичних розв'язків отриманих рівнянь в

роботі проводяться дослідження, що полягають у визначенні функцій $f(y)$ і $\varphi(y)$, для яких диференціальні оператори вихідних рівнянь допускають розкладання на множники, зокрема на множники першого і третього порядку

$$\left[\frac{d}{dy} + \alpha(y) \right] \left[\frac{d^3 L_k}{dy^3} + \beta(y) \frac{d^2 L_k}{dy^2} + \gamma(y) \frac{d L_k}{dy} + \delta(y) L_k \right] = 0, \quad (4)$$

або на множники другого порядку

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + \alpha(y) \frac{d}{dy} + \beta(y) \right] \left[\frac{d^2 L_k}{dy^2} + \gamma(y) \frac{d L_k}{dy} + \delta(y) L_k \right] = 0. \quad (5)$$

В кожному випадку для знаходження коефіцієнтів α , β , γ , δ записується система диференціальних співвідношень. Якщо коефіцієнти α , β , γ , δ відомі, то знаходження розв'язків рівнянь (2) і (3) зводиться до розв'язування послідовності диференціальних рівнянь вищих порядків, які для багатьох видів функцій $f(y)$, $\varphi(y)$ шляхом заміни змінних і ряду підстановок зводяться до відомих в літературі рівнянь.

Так, використовувачи запропонований математичний підхід, побудовані аналітичні розв'язки диференціального рівняння (2), коли функції $f(y)$, $\varphi(y)$ мають вигляд:

$$f(y) = a + by, \quad \varphi(y) = 0, \quad (6)$$

$$f(y) = \ln(a + by), \quad \varphi(y) = 0, \quad (7)$$

$$f(y) = -\ln(a + by)^s, \quad \varphi(y) = 0, \quad (8)$$

$$f(y) = \ln(a \cos 2a_0 y + b \sin 2a_0 y), \quad \varphi(y) = 0, \quad (9)$$

$$f(y) = 0, \quad \varphi(y) = -\ln(\alpha + by - \alpha_0 y^2), \quad (10)$$

$$f(y) = 2\varphi(y), \quad \varphi(y) = \ln\left\{\frac{1}{4\alpha}\left[e^{\sqrt{\alpha}y} + (b^2 - 4\alpha c)e^{-\sqrt{\alpha}y} + 2b\right]\right\}, \quad (11)$$

$$f(y) = n\varphi(y), \quad \varphi(y) = \ln\left\{\frac{1}{y^2}\left[\frac{(n-1)(1-2n)}{\alpha_0^2}\right]^{\frac{1}{2(n-1)}}\right\}, \quad (12)$$

де $\alpha, b, c, \alpha_0, S, n$ - деякі сталі.

Аналогічним чином будуться розв'язки диференціального рівняння (3), яке описує згин тонких неоднорідних ортотропних пластин.

В другому розділі досліджуються поперечні коливання неоднорідних ортотропних пластин. Вважається, що модулі пружності, модуль зсуву і густина матеріалу пластини - функції декартової координати y .

Задачу визначення вільних поперечних коливань неоднорідних ортотропних пластин зведено до розв'язування диференціального рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - 2f_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (f_y^2 - f_{yy}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\sqrt{\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \\ & - 2f_y \sqrt{\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}}} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu_1^{(0)} (f_y^2 - f_{yy}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ & + \frac{3\rho_n}{h^2 E_2^{(0)}} (1 - \nu_1^{(0)} \nu_2^{(0)}) e^{f(y)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

при відповідних крайових умовах.

Будуться аналітичні розв'язки рівняння (13) для певних законів зміни пружних характеристик матеріалу. Розглядаються конкретні задачі вільних та вимушених поперечних коливань

неоднорідної ортотропної пластини. Для випадку (6) складені рівняння власних частот вільних поперечних коливань пластини із вільними і жорстко закріпленими краями.

$\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}}$	b	$\omega_1 \cdot 10^2, \text{ Гц}$		
		Всі краї пластини вільно оперті	Край $x=0, x=l_1, y=0$ - вільно оперті, край $y=l_2$ - жорстко закріплений	Край $x=0, x=l_1$ - вільно оперті, край $y=0, y=l_2$ - жорстко закріплені
1,0	0	4,755	4,756	6,975
	1,0	4,765	4,805	7,015
	2,0	4,825	4,955	7,135
	3,0	4,925	5,215	7,335
	4,0	5,075	5,595	7,635
2,0	0	4,035	4,036	5,445
	1,0	4,055	4,075	5,475
	2,0	4,115	4,185	5,565
	3,0	4,204	4,376	5,724
	4,0	4,354	4,637	5,946

В наведеній таблиці показані значення власної частоти основного тону ω_1 для різних випадків закріплення країв пластини. Матеріал пластини - бетон. Розрахунок проведений при таких характеристиках пластини: $h = 0,01 \text{ м}$; $l_1 = l_2 = 1 \text{ м}$; $E_1^{(0)} = 3,4 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$; $\rho_n^{(0)} = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; $\nu_1^{(0)} = 0,15$.

В третьому розділі розглядається згин і поперечні коливання ортотропних пластин, розташованих на пружній основі. Вважається, що пружні і фізичні характеристики пластин - неперервні функції декартової координати. Крім того, приймається, що прогин пластини малий і реакція основи R в даному місці пластини пропорціональна прогину в цьому ж місці, тобто

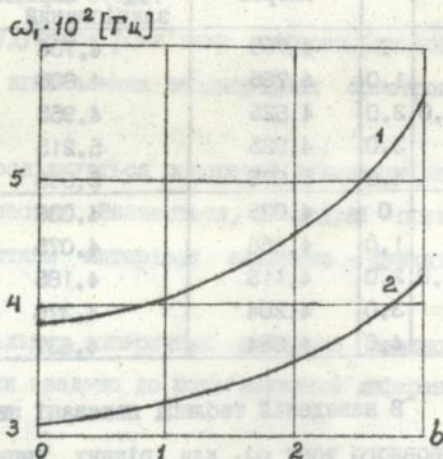
$$R = k_n^{(0)} e^{-f(y)} w(x, y, t), \quad (14)$$

де $k_n^{(0)}$ - коефіцієнт пружності основи на лінії $y = 0$.

Виведено загальне диференціальне рівняння, яке описує прогин пластини в залежності від величини дії зовнішнього навантаження та реакції основи, і збудовані його розв'язки для окремих законів зміни пружних властивостей пластини і основи. Проведено числові розрахунки власних частот вільних поперечних коливань

неоднорідних ортотропних пластин при різних умовах закріплення їх країв.

На рис.1 приведена залежність власної частоти основного тону ω , від параметра b , що характеризує неоднорідність пластини.



Бетонна пластинка розміщена на піщаній основі: $h = 0,05$ м; $E_1^{(0)} = 3,4 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $l_1 = l_2 = 4$ м; $\rho_n^{(0)} = 2 \cdot 10^3$ кг/м³; $k_n^{(0)} = 2,5 \cdot 10^6$ Н/м³; $\nu_1^{(0)} = 0,15$. Вважається, що краї пластини $x = 0, x = l_1$ - вільно оперті, а краї $y = 0, y = l_2$ - жорстко закріплені. Криві 1, 2 відповідають значенням $E_1^{(0)}/E_2^{(0)} = 1, 2$.

У четвертому розділі розглядається стійкість неоднорідних ортотропних пластин. Вважається, що краї пластини навантажені нормальними T_x, T_y і дотичними S_{xy} зусиллями, які діють у площині пластини.

Одержане в роботі диференціальне рівняння для визначення критичного навантаження, під дією якого неоднорідна ортотропна пластина може втратити стійкість, має вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - 2f_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left[f_y^2 - f_{yy} - \frac{3(1-\nu_1^{(0)})\nu_2^{(0)}}{2h^3 E_2^{(0)}} T_y \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ & + 2\sqrt{\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - 2f_y \sqrt{\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}}} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{3(1-\nu_1^{(0)})\nu_2^{(0)}}{h^3 E_2^{(0)}} S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\ & + \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left[\nu_1^{(0)} (f_y^2 - f_{yy}) - \frac{3(1-\nu_1^{(0)})\nu_2^{(0)}}{2h^3 E_2^{(0)}} T_x \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

З використанням методики, запропонованої в першому розділі, знайдено

конкретні види функції $f(y)$, для яких диференціальний оператор рівняння (15) допускає розкладання на множники, і збудовані для них аналітичні розв'язки цього рівняння. Досліджуються випадки

$$\frac{P_{кр}}{D_2^{(0)}}$$

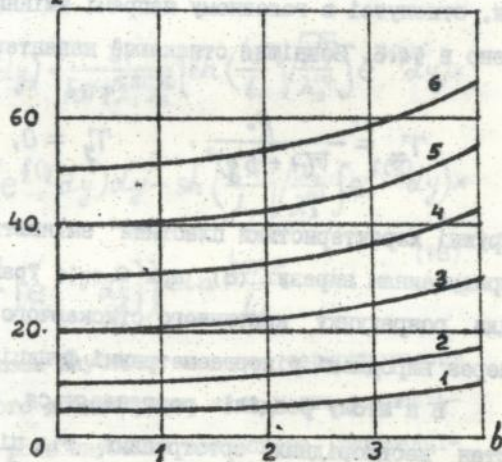


Рис.2

можливості втрати стійкості неоднорідними ортотропними пластинами при певному їх зовнішньому навантаженні.

В §4.4 досліджується стійкість прямокутної неоднорідної

ортотропної пластини, стиснутої в головному напрямі сталими зусиллями. Модулі пружності і модуль зсуву змінюються за законом (1) з врахуванням виразу (6). Одержано трансцендентні рівняння для розрахунку критичного навантаження при різних умовах закріплення країв.

На рис.2 приведена залежність величини критичного навантаження $P_{кр}$ від параметра b при $l_1 = l_2 = 1$ м, $\nu_1^{(0)} = 0,3$. Криві 1-6 відповідають значенням $E_1^{(0)}/E_2^{(0)} = 1/2, 1, 2, 3, 4, 5$ для випадку, коли край $x = 0, x = l_1$ - вільно оперті, а край $y = 0, y = l_2$ - жорстко закріплені.

В §4.5 досліджується стійкість прямокутної неоднорідної ортотропної пластини, стиснутої по краях сталими зусиллями.

Дослідження стійкості неоднорідної ортотропної пластини, стиснутої в головному напрямі змінними зусиллями, приведено в §4.6. Зовнішнє стискаюче навантаження задане так

$$T_x = -\frac{P_0}{(1+by)^2}, \quad T_y = 0, \quad S_{xy} = 0. \quad (16)$$

Пружні характеристики пластини змінюються за законом (1) з врахуванням виразу (8) при $\alpha = 1$. Трансцендентне рівняння для розрахунку критичного стискаючого зусилля виражається через вироджені гіпергеометричні функції Уіттекера.

В п'ятому розділі розглядається напружено-деформівний стан неоднорідних ортотропних тіл під дією температурного поля. Допускається, що модулі пружності E_1, E_2 , модуль зсуву G , температурні коефіцієнти лінійної деформації λ_1, λ_2 і коефіцієнти теплопровідності $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ матеріалу - неперевні функції декартової координати y .

Дослідження проводиться у два етапи. На першому етапі розв'язується задача теплопровідності для неоднорідного ортотропного двовимірного тіла, яка зведена до розв'язування диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - f_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\lambda_1^{(0)}}{\lambda_2^{(0)}} e^{2f} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = - \frac{1}{\lambda_2^{(0)}} e^f W(x, y), \quad (17)$$

де $T(x, y)$ - функція температур; $W(x, y)$ - інтенсивність розподілу джерел тепла; $\lambda_1^{(0)}$, $\lambda_2^{(0)}$ - температурні коефіцієнти лінійної деформації на лінії $y = 0$.

Розв'язуючи рівняння (17), для функції $T(x, y)$ знаходимо

$$\begin{aligned} T(x, y) = & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ C_1^{(k)} \operatorname{ch} \left(\frac{k\pi}{l_1} \sqrt{\frac{\lambda_1^{(0)}}{\lambda_2^{(0)}}} \int e^{f(y)} dy \right) + \right. \\ & + C_2^{(k)} \operatorname{sh} \left(\frac{k\pi}{l_1} \sqrt{\frac{\lambda_1^{(0)}}{\lambda_2^{(0)}}} \int e^{f(y)} dy \right) - \frac{l_1}{k\pi \sqrt{\lambda_1^{(0)} \lambda_2^{(0)}}} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{k\pi}{l_1} \sqrt{\frac{\lambda_1^{(0)}}{\lambda_2^{(0)}}} \int e^{f(y)} dy \right) x \right. \\ & \times \int W_k(y) \operatorname{sh} \left(\frac{k\pi}{l_1} \sqrt{\frac{\lambda_1^{(0)}}{\lambda_2^{(0)}}} \int e^{f(y)} dy \right) dy - \operatorname{sh} \left(\frac{k\pi}{l_1} \sqrt{\frac{\lambda_1^{(0)}}{\lambda_2^{(0)}}} \int e^{f(y)} dy \right) x \\ & \left. \left. \times \int W_k(y) \operatorname{ch} \left(\frac{k\pi}{l_1} \sqrt{\frac{\lambda_1^{(0)}}{\lambda_2^{(0)}}} \int e^{f(y)} dy \right) dy \right] \right\} \sin \frac{k\pi x}{l_1}. \quad (18) \end{aligned}$$

На другому етапі розв'язується задача термопружності неоднорідного ортотропного двовимірного тіла, яка в загальному випадку зведена до розв'язування наступного диференціального рівняння із змінними коефіцієнтами

$$\frac{\partial^6 L}{\partial x^2 \partial y^4} + 2f_y \frac{\partial^5 L}{\partial x^2 \partial y^3} + (f_{yy} + f_y^2) \frac{\partial^4 L}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \sqrt{\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}}} \frac{\partial^6 L}{\partial x^4 \partial y^2} +$$

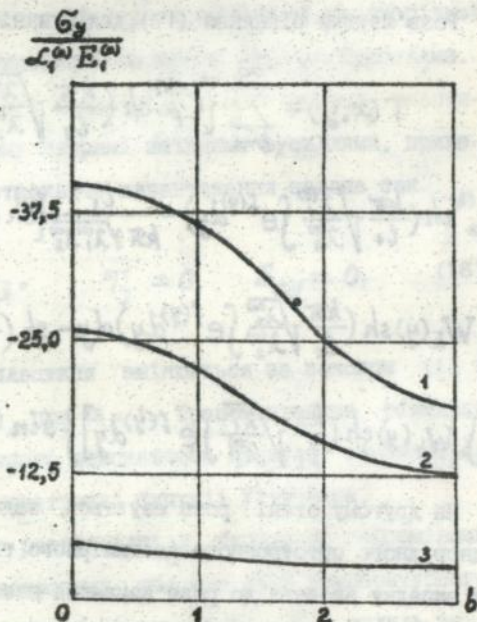
$$+2f_y \sqrt{\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}}} \frac{\partial^5 L}{\partial x^4 \partial y} - \lambda_1^{(0)} (f_{yy} + f_y^2) \frac{\partial^4 L}{\partial x^4} + \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} \frac{\partial^6 L}{\partial x^6} =$$

$$= -E_1^{(0)} \alpha_1^{(0)} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - 2f_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\alpha_2^{(0)}}{\alpha_1^{(0)}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (f_y^2 - f_{yy}) T \right]. \quad (19)$$

На основі методики, запропонованої в першому розділі роботи, шукається вид функції $f(y)$, коли диференціальний оператор рівняння (19) допускає розкладання на множники і знаходження розв'язків цього рівняння зводиться до розв'язування послідовності диференціальних рівнянь нижчих порядків.

Для кожної знайденої функції $f(y)$ будуться розв'язки рівняння (19).

В §5.4 досліджується термомеханічний стан несиметрично нагрітої неоднорідної ортотропної пластини. З допомогою ЕОМ проведено розрахунок компонент тензора напруження.



На рис.3 приведена залежність

Рис.3

компоненти тензора напруження від параметра b при $\lambda_1^{(0)}/\lambda_2^{(0)} = 1,1$; $l_1 = l_2 = 0,1$ м; $E_1^{(0)} = 1,83 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $\nu_1^{(0)} = 0,12$; $x =$

$l_1/2; \lambda_1^{(0)} = 0,3 \text{ Вт/(м·К)}; y = l_2/2; \alpha_1^{(0)}/\alpha_2^{(0)} = 1,05; T_2 - T_1 = 1 \text{ К}; \alpha_1^{(0)} = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$. Криві 1-3 відповідають значенням $E_1^{(0)}/E_2^{(0)} = 1; 1,5; 2$.

Параграфи 5.5 - 5.7 присвячені дослідженню згину неоднорідних ортотропних пластин під дією зовнішнього температурного поля.

Поставлена задача зведена до розв'язування рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - 2f_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (f_y^2 - f_{yy}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \sqrt{\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \\ & - 2f_y \sqrt{\frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}}} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \gamma_1^{(0)} (f_y^2 - f_{yy}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \\ & = -\frac{1}{h} e^{-f(y)} \left\{ (\gamma_1^{(0)} \alpha_1^{(0)} + \alpha_2^{(0)}) \left[\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} - 4f_y \frac{\partial T^*}{\partial y} + 2(2f_y^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - f_{yy}) T^* \right] + (\alpha_1^{(0)} + \gamma_2^{(0)} \alpha_2^{(0)}) \frac{E_1^{(0)}}{E_2^{(0)}} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

де

$$T^* = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h z \cdot T(x, y, z) dz. \quad (21)$$

На основі результатів першого розділу збудовані аналітичні розв'язки диференціального рівняння із змінними коефіцієнтами (20) для окремих законів зміни пружних властивостей пластини. Розглядається термопружне випинання неоднорідної ортотропної пластини із вільно опертими та жорстко закріпленими краями. За одержаними формулами проведено числовий аналіз термопрогину пластини.

В шостому розділі, використовувачи теорію тонких криво-лінійних стержнів, подано виклад основних співвідношень на-

дліного геометричними розмірами пружного стержневого елемента. Вважається, що стержневий елемент підданий дії зовнішнього динамічного навантаження: нормальних $N(x, t)$, тангенціальних $T(x, t)$, перерізаючих $P(x, t)$ зусиль і згинаючих моментів $M(x, t)$. Бракується, що при сумісній роботі конструкції, коли стержневий елемент контактує з торцем пластини, з боку стержневого елемента на пластину передаються контактні згинаючі моменти $M^{(i)}(x, t)$ і відповідні зусилля $N^{(i)}(x, t)$, $T^{(i)}(x, t)$, $P^{(i)}(x, t)$. Пружний елемент може бути підданий також дії температурного поля і розташовуватися несиметрично відносно середньої площини пластини.

Бракуючи перераховані фактори, виведено систему диференціальних рівнянь для компонент вектора переміщення u^* , v^* , w^* пружного стержневого елемента, яка має вигляд

$$\begin{aligned} & \frac{d^3 u^*}{dx^3} - \rho^* \frac{F_0}{g_1} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 u^*}{dt^2} \right) + \rho^* F_0 \frac{\varepsilon_1}{g_1} \frac{d^2 v^*}{dt^2} - \rho^* F_0 \frac{G_0}{A} \frac{d^2 w^*}{dt^2} - \\ & - \rho^* I_x \frac{\varepsilon_1}{g_2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 v^*}{dt^2} \right) + \rho^* I_y \frac{G_0}{A} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 w^*}{dt^2} \right) = 2h^* \frac{\varepsilon_1}{g_2} N - \\ & - 2h \frac{\varepsilon_1}{g_2} N^{(i)} - 2h^* \left(\frac{1}{G_2} + \frac{G_0 G_1}{A} \right) \frac{dT}{dx} + 2h \left(\frac{1}{G_1} + \frac{G_0^2}{A} \right) \frac{dT^{(i)}}{dx} + \\ & + \frac{G_0}{A} P^{(i)} - \frac{G_0}{A} P + \mathcal{L}_T E^* \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\theta_1}{g_1} - \frac{\varepsilon_1}{g_2} \theta_2 + \frac{G_0}{A} \theta_2 \right), \\ & \frac{d^4 v^*}{dx^4} - \rho^* \frac{I_x}{g_2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 v^*}{dt^2} \right) + \rho^* I_x \frac{G_0}{C} \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 w^*}{dt^2} \right) \right] + \\ & + \rho^* \frac{F_0}{g_2} \frac{d^2 v^*}{dt^2} = \frac{2h^*}{g_2} N - \frac{2h}{g_2} N^{(i)} - 2h^* \frac{G_0 G_1}{C} \frac{d^2 N}{dx^2} - \frac{G_0}{C} \frac{d^2 M}{dx^2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2h \frac{\zeta_0^2}{C} \frac{d^2 N^{\omega}}{dx^2} + 2h^* \frac{\varepsilon_2}{g_2} \frac{dT}{dx} + 2h \frac{\varepsilon_1}{g_2} \frac{dT^{\omega}}{dx} + \frac{\varepsilon_2 \zeta_0}{C} \frac{d^2 P}{dx^2} + \\
& + \frac{\varepsilon_1 \zeta_0}{C} \frac{d^2 P^{\omega}}{dx^2} + \frac{\zeta_0}{C} \frac{d^2 M^{\omega}}{dx^2} - \frac{\alpha_T E^*}{g_2} \frac{d^2 \theta_2}{dx^2}, \\
& \frac{d^4 w^*}{dx^4} + \rho^* I_x \frac{\varepsilon_1}{C} \frac{d^2}{dx^2} \left[\frac{d}{dy} \left(\frac{d^2 w^*}{dt^2} \right) \right] - \rho^* \frac{I_y}{A} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 w^*}{dt^2} \right) + \\
& + \rho^* \frac{F_0}{A} \frac{d^2 w^*}{dt^2} = 2h \frac{\varepsilon_1 \zeta_0}{C} \frac{d^2 N^{\omega}}{dx^2} - 2h^* \frac{\varepsilon_1 \zeta_1}{C} \frac{d^2 N}{dx^2} + \\
& - 2h^* \frac{\zeta_1}{A} \frac{dT}{dx} - 2h \frac{\zeta_0}{A} \frac{dT^{\omega}}{dx} + \frac{1}{A} P - \frac{1}{A} P^{\omega} - \frac{\varepsilon_1}{C} \frac{d^2 M}{dx^2} + \\
& + \frac{\varepsilon_1}{C} \frac{d^2 M^{\omega}}{dx^2} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{C} \frac{d^2 P}{dx^2} + \frac{\varepsilon_1^2}{C} \frac{d^2 P^{\omega}}{dx^2} - \frac{\alpha_T E^*}{A} \frac{d^2 \theta_2}{dx^2}, \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dw^*}{dy} \right) - \rho^* \frac{I_x}{C} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 w^*}{dt^2} \right) = 2h^* \frac{\zeta_1}{C} N - 2h \frac{\zeta_0}{C} N^{\omega} - \\
& - \frac{\varepsilon_2}{C} P - \frac{\varepsilon_1}{C} P^{\omega} + \frac{1}{C} M - \frac{1}{C} M^{\omega},
\end{aligned}$$

де $2h^*$, b^* , F_0 - ширина, висота і площа поперечного перерізу пружного елемента; ρ^* - густина матеріалу; I_x , I_y , I_z - моменти інерції поперечного перерізу; ζ_0 - ексцентриситет розташування; ζ_1 - ексцентриситет дії результуючого зовнішнього зусилля; g_1 , g_2 , A , C - жорсткості на розтяг, згин і кручення; α_T - коефіцієнт лінійного теплового розширення; θ_1 , θ_2 , θ_3 - температурні функції; E^* - модуль пружності.

Зауважимо, що система рівнянь (22) у випадку дії статичного навантаження розпадається на незалежні рівняння.

В цьому розділі досліджується контактна взаємодія різнотипних пластин з прямолінійними пружними стержневими

елементами. В загальному випадку пружний елемент розташований до деформації несиметрично відносно середньої площини пластини і підданий дії довільного статичного навантаження. Крім того, в розрахунковій схемі приймається, що вісь стержневого елемента віддалена на деяку відстань від площини контакту з торцем пластини ε , тобто спряження здійснюється на фактичній площині контакту.

При наявності ексцентриситету розташування ζ_0 незалежно від виду навантаження стержневого елемента пластинка перебуває в узагальненому плоскому напруженому стані і в стані згину.

В §7.1 зроблена постановка контактних задач, записано крайові умови та умови спряження пружних стержневих елементів з пластинками.

В §§7.2 -7.3 розглядається контактна взаємодія анізотропної пластини з пружним елементом, який несиметрично розташований вздовж її прямокутного торця. Використовуючи інтегральне перетворення Фур'є, записані формули для розрахунку контактних зусиль і моментів. Досліджуються випадки навантаження пружного елемента зовнішніми нормальними зусиллями і згинаючими моментами, зокрема при дії на стержневий елемент зовнішньої зосередженої сили співвідношення для компонент контактних зусиль і моментів мають вигляд

$$N^{(i)}(x) = \frac{N_0}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{R_1(\lambda)}{R_0(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda,$$

$$T^{(i)}(x) = \frac{N_0}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{R_2(\lambda)}{R_0(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda,$$

$$P^{\omega}(x) = \frac{N_0}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{R_3(\lambda)}{R_0(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda,$$

$$M^{\omega}(x) = \frac{N_0}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{R_4(\lambda)}{R_0(\lambda)} e^{i\lambda x} d\lambda, \quad (23)$$

де $R_i(\lambda)$ - функції, які залежать від пружних, жорсткостних і геометричних характеристик стержневого елемента і пластини.

В §§7.4 - 7.7 досліджується кон-

тактна взаємодія між неоднорідними ортотропними пластинами і несиметрично розташованими пружними елементами, причому розглядаються випадки, коли пружні властивості пластин змінюються по експоненціальному і степеневому за-

конах. Для кожного випадку розглядаються конкретні задачі, для яких проводяться числові розрахунки контактних зусиль і моментів при навантаженні стержневого елемента зовнішніми зосередженими силами і моментами.

На рис.4 наведена залежність нормальних контактних на-

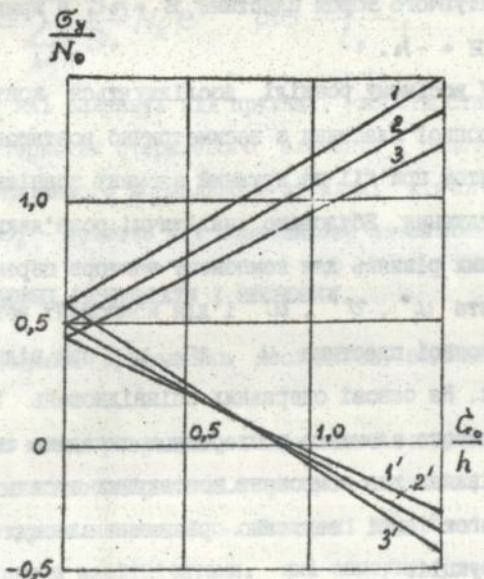


Рис.4

пружень σ_y від ексцентриситету розташування \dot{G}_0 при $x = 0$; $E^* / E_1^{(0)} = 2$; $b = 0,1$; $E_1^{(0)} / E_2^{(0)} = 1$; $\nu_1^{(0)} = 0,3$. Функція $f(y)$, яка характеризує зміну пружних властивостей пластин, має вигляд

$$f(y) = -\ln(1+by)^3. \quad (24)$$

Криві 1-1', 2-2', 3-3' відповідають значенням параметра $S = -0,9; 0; 0,9$; причому криві 1, 2, 3 збудовані для краю контактної торця пластини $\xi = h$, а криві 1', 2', 3' - для краю $\xi = -h$.

У восьмому розділі досліджується контактна взаємодія ортотропної пластини з несиметрично розташованим стержневим елементом при дії на пружний елемент зовнішнього динамічного навантаження. Збудовано аналітичні розв'язки систем диференціальних рівнянь для компонент вектора переміщення пружного елемента u^* , v^* , w^* і для компонент вектора переміщення ортотропної пластини u , v , w при відповідних крайових умовах. На основі одержаних співвідношень і умов спряження стержневого елемента з пластиною складена система алгебраїчних рівнянь для компонент контактних зусиль і моментів, за допомогою якої записано рівняння власних частот коливань конструкції.

При відсутності ексцентриситету розташування стержневого елемента ($\dot{G}_0 = 0$) система рівнянь відносно контактних зусиль і моментів розпадається на дві незалежні системи, з яких одержуються рівняння власних частот плоских коливань і рівняння власних частот поперечних коливань конструкції.

В §8.6 записані співвідношення для розрахунку компонент контактних зусиль і моментів, які мають вигляд

$$N^{(i)}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_1}{S_0} N_k e^{-i\omega_b t} \cos \frac{k\pi x}{l_1},$$

$$T^{(i)}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_2}{S_0} N_k e^{-i\omega_b t} \sin \frac{k\pi x}{l_1},$$

$$P^{(i)}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_3}{S_0} N_k e^{-i\omega_b t} \cos \frac{k\pi x}{l_1}, \quad (25)$$

$$M^{(i)}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_4}{S_0} N_k e^{-i\omega_b t} \cos \frac{k\pi x}{l_1},$$

де S_i - функції, які залежать від пружних, жорсткостних і геометричних характеристик стержневого елемента і пластини; N_k - амплітуда зовнішнього нормального зусилля, діючого на пружний елемент; ω_b - частота дії зовнішнього навантаження.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ І ВИСНОВКИ

Підводячи підсумки проведених досліджень, відзначимо наступне:

1. Розроблено метод розрахунку напруженого стану неоднорідних ортотропних двовимірних тіл при дії статичних, динамічних і температурних навантажень. Виведені диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами, які описують плоский напружений стан і згин неоднорідних ортотропних пластин. Показано, що диференціальні рівняння, які описують згин окремих типів неоднорідних ортотропних пластин, можуть бути використані для дослідження згину ортотропних пластин змінної товщини. Розроблено математичний підхід знаходження розв'язків цих рівнянь, на основі якого збудовані їх розв'язки для

певних законів зміни пружних властивостей матеріалу неоднорідних ортотропних тіл.

2. Проведено дослідження поперечних коливань неоднорідних ортотропних пластин. Записано вихідне диференціальне рівняння і збудовано його розв'язки для окремих законів зміни пружних характеристик матеріалу. Одержані рівняння власних частот вільних поперечних коливань пластин для різних крайових умов закріплення.

Показано, що неоднорідність матеріалу пластин помітно впливає на величину власних частот вільних поперечних коливань, причому частота коливань зростає із збільшенням значення параметра δ . Ця властивість яскравіше проявляється для пластин із жорстко закріпленими кінцями і навпаки - при зростанні ортотропії матеріалу величина власної частоти коливання зменшується.

3. Розв'язані задачі про статичний згин і поперечні коливання неоднорідних ортотропних пластин, розташованих на суцільній неоднорідній пружній основі. Як показали результати числового розрахунку, при збільшенні значень параметрів неоднорідності матеріалу пластини або основи спостерігається зростання величини власних частот поперечних коливань неоднорідної пластини.

4. Зроблено постановку і розв'язані задачі стійкості неоднорідних ортотропних пластин. Записані співвідношення для визначення критичного навантаження на пластину при окремих законах зміни пружних властивостей матеріалу. Розглянуто випадки навантаження пластин сталими і змінними стискаючими зовнішніми зусиллями.

Числові розрахунки критичного навантаження $\rho_{кр}$ виявили, що при збільшенні значення параметра b , який характеризує неоднорідність матеріалу пластини, величина критичного навантаження зростає. Особливо це проявляється для пластин з двома протилежно жорстко закріпленими краями. Крім того, збільшення ортотропії матеріалу підвищує несучу здатність неоднорідних пластин, стиснутих зовнішніми зусиллями в головному напрямку.

5. Досліджено напружений стан неоднорідних ортотропних пластин, що знаходяться під дією стаціонарного температурного поля. В цьому плані розв'язана задача про узагальнений плоский напружений стан несиметрично нагрітої неоднорідної ортотропної пластини і задача термозгину тонкої пластини для різних випадків закріплення її країв.

Для прямокутної неоднорідної ортотропної пластини зміна рівняці температур на протилежних краях прямо пропорційно впливає на величину компонент тензора напруження. При збільшенні параметра неоднорідності b напруження спадають, причому їх величина різко зменшується із зростанням ортотропії.

6. Розроблено варіант теорії моделювання конструкції, яка складається із пластини і несиметрично контактуючого з її торцем пружного елемента, при дії зовнішнього навантаження. На цій основі досліджено контактну взаємодію несиметрично спаяного пружного елемента, при дії статичного і динамічного навантажень. Одержані рівняння власних частот коливання конструкції.

Незалежно від виду навантаження стержневого елемента

при наявності ексцентриситету розташування C_0 однорідні та неоднорідні пластини зазнають плоского напруженого стану і згину. Зміна ексцентриситету розташування C_0 і параметрів b , C , S , що характеризують неоднорідність пружних властивостей матеріалу пластин, значно впливає на величину і перерозподіл напружень на контурі контакту, причому на одному краю торця пластини вони зростають, а на другому – спадають, змінюючи при деякому значенні C_0 знак на протилежний.

ОСНОВНІ ПУБЛІКАЦІЇ

1. Мартынович Т.Л., Дринец В.Е. Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами. – Львов: Вища школа, 1984. – 160 с.
2. Апостолик С.А., Дринец В.Е. К вопросу моделирования профиля обработанной поверхности при цилиндрическом фрезеровании древесины с учетом вибраций систем СИДП // Изв. высших учебн. завед. Лесной журнал. – 1981. – №5. – С.104-107.
3. Апостолик С.А., Дринец В.Е. К расчету сил удара резца о заготовку при цилиндрическом фрезеровании древесины // Изв. высших учебн. завед. Лесной журнал. – 1982. – №1. – С.81-85.
4. Апостолик С.А., Дринец В.Е. Оптимизация угла наклона винтовой линии режущей кромки дереворежущего инструмента // Реферат. сб.: "Механическая обработка древесины". – М., 1980. – №11. – С.46-47.
5. Апостолик С.А., Дринец В.Е., Белошицкий В.И. Автоматическая балансировка дереворежущего инструмента // Экспресс-информ. "Деревообрабатывающее оборудование". – М., 1981. – №4. – С.20-21.
6. Апостолик С.А., Дринец В.Е., Владыка М.И. К вопросу исследования вибраций системы СИДП при цилиндрическом фрезеровании древесины // Респ. межвед. сб.: "Лесное хозяйство, лесная, бумажная и деревообраб. промышл." – Киев,

1983. - в.13. - С.86-96.

7. Вобик О.І., Дринец В.Є. Про розв'язування диференціального рівняння, яке описує згин неперервно-неоднорідних ортотропних пластин // Вісн.Львів.ун-ту:"Питання алгебри і теорії функцій".Сер.мех.-мат. - 1986.- в.25.- С.86-90.
8. Крета В.М., Дринец В.Є. Контактное взаимодействие упругой пластины с полосой // Вест.Львов.политех.ин-та "Резервы прогресса в архитектуре и строительстве". - 1989.- С.53-55.
9. Мартынович Т.Л., Дринец В.Є. Неоднородная изотропная полуплоскость с подкрепленным краем // Прикл.мех. - 1975. - т.11, №10. - С.63-69.
10. Мартынович Т.Л., Дринец В.Є. Упругая изотропная полубесконечная пластина с несимметрично подкрепленным краем // Изв.АН СССР. МТТ. - 1976. - №3. - С.91-96.
11. Мартынович Т.Л., Дринец В.Є. Упругая анизотропная полуплоскость с несимметрично подкрепленным краем // Прикл. мех. - 1976. - т.12, №5. - С.79-84.
12. Мартынович Т.Л., Дринец В.Є., Нищенко Н.А. Неоднородная ортотропная полуплоскость с подкрепленным краем // Изв. АН Арм.ССР. Механика. - 1976. - т.39, №3. - С.16-22.
13. Мартынович Т.Л., Дринец В.Є., Апостолук С.А.Исследование напряженного состояния упругих оснований деревообрабатывающих станков, покоящихся на неоднородной среде // Экспресс-информ. "Деревообаб. оборудов."- М., 1976. - №5.- С.12-14.
14. Мартынович Т.Л., Дринец В.Є. Неоднородная изотропная полуплоскость с несимметрично подкрепленным краем // Прикл.мех. - 1977. - т.13., №3. - С.48-56.
15. Мартынович Т.Л., Дринец В.Є. Контактное взаимодействие неоднородной ортотропной пластины с несимметрично подкрепленным упругим элементом // Изв.АН Арм.ССР. Механика. - 1978. - т.31, №3. - С.73-81.
16. Мартынович Т.Л., Дринец В.Є., Божидарник В.В. Контактное взаимодействие неоднородной полубесконечной пластины с несимметрично подкрепляющим упругим элементом // Прикл. мех. - 1981. - т.17, №1. - С.77-85.

17. Мартынович Т.Л., Бринец В.Е. К теории термоупругости непрерывно-неоднородных ортотропных пластин // Сб.: "Механика неоднородных структур". Тез. докл. II Всес.конф. - Львов, 1987. - С.170-171.
18. Мартынович Т.Л., Бринец В.Е., Крета В.М. Непрерывно-неоднородные пластины под воздействием температурного поля // Межд.науч.сб.: "Темпер.задачи и устойчивость пластин и оболочек", Изд-во Саратов. ун-та. - 1988. - С.134-135.
19. Ніщенко І.О., Мартинович Т.Л., Бринець В.Е. Пружна рівновага несиметрично з'єднаних пластинок // Вісн. Львів. ун-ту "Теорет.і прикл.мат.". - 1976. - в.№11. - С.85-92.
20. Бринець В.Е. Напружений стан пружної пластини з несиметрично підкріпленням краєм // Вісн. Львів.ун-ту "Теорет. і прикл. мат.". - 1976. - в.11. - С.98-104.
21. Бринец В.Е. Теория и расчет непрерывно-неоднородных ортотропных пластин и их контактного взаимодействия с упругими элементами // Крат.содер.докл.совещ.по теории упругости неоднородного тела. - Кишинев, 1983. - С.62.
22. Бринець В.Е. До питання оптимізації виробничої програми випуску деталей // Вісн. Львів.ун-ту, сер.екон. - 1984. - С.50-52.
23. Бринец В.Е. Динамические перемещения упругой пластины с подкрепленным краем // Тез. II Всес.конф. по теории упругости. - Тбилиси, 1984. - С.300-301.
24. Бринец В.Е. Об исследовании напряженного состояния неоднородных ортотропных пластин // Прикл.мех. - 1984. - т.20, №10. - С.69-75.
25. Бринец В.Е. К исследованию напряженного состояния неоднородных ортотропных пластин, подкрепленных упругим элементом // Изв.АН Арм.ССР. Механика. - 1986. - т.39, №3. - С.47-55.
26. Бринец В.Е., Апостолик С.А. К вопросу определения напряженного состояния базирующих элементов деревообрабатывающих станков // Изв.высш.учебн.завед. Лесной журнал. - 1986. - №4. - С.125-128.
27. Бринец В.Е. Расчет собственных частот поперечных колебаний непрерывно-неоднородных ортотропных пластин // Матем.

- риалы VI Всес. конф. по композ. материалам. - Ереван; Лени-
накан, 1987. - т.2. - С.230-231.
28. Дринец В.Е. Поперечные колебания непрерывно-неоднородных
пластин, лежащих на сплошном упругом основании // Сб.:
"Соврем. пробл. теории контакт. взаимод.". Материалы выездн.
заседания научного Совета АН СССР по трению и смазкам. -
1987. - С.49-50.
 29. Дринец В.Е. О решении дифференциального уравнения, опи-
сывающего устойчивость непрерывно-неоднородных двумерных
тел // Сб.: "Прим. выч. техн. и мат. методов в научн. исслед."
Тез. докл. научн.-техн. конф. - Киев, 1988. - С.45-46.
 30. Дринец В.Е., Крета В.М. Непрерывно-неоднородные двумер-
ные тела под воздействием поперечной динамической на-
грузки // Доклады IV Всес. совещ. по детонации. - Телави,
1988. - т.2. - С.252-255.
 31. Дринец В.Е. Устойчивость плоских деталей из непрерывно-
неоднородной модифицированной древесины // Изв. высших
учебн. завед. Лесной журнал. - 1989. - №4. - С.79-83.
 32. Дринец В.Е. Термоупругость непрерывно-неоднородных дву-
мерных тел // Материалы докл. Всес. научн.-техн. конф. "Мат.
моделир. в энергетике". - Киев, 1990. - ч.4. - С.207-208.
 33. Дринец В.Е., Крета В.М. Контактное взаимодействие балки
с упругой полосой // Вестн. Львов. политехн. ин-та. - 1990. -
№243. - С.90-92.
 34. Дринец В.Е. Упругое состояние неоднородных ортотропных
пластин, подверженных воздействию силовых и температур-
ных нагрузок // Сб.: "Актуальные проблемы неоднородной
механики". Материалы Всес. научн. семинара. - Ереван,
1991. - С.349-354.
 35. Дринец В.Е. Влияние неоднородности материала на попереч-
ные колебания двумерных тел // Тез. докл. III Всес. конф.
"Мех. неоднор. структур". - Львов, 1991. - ч.2. - С.369.
 36. Дринец В.Е. Модель і розрахунок стійкості двовимірних
ортотропних структур // Анот. допов. I Міжнародн. сімп. фі-
зико-хімічна мех. композ. матеріалів". - Івано-Франківськ,
1993. - С.62-63.
 37. Дринец В.Е. Об устойчивости скатой непрерывно-неоднород-

- ной пластины // Прикл. мех. - 1994. - т.30, №2. - с.84-89.
38. Martynowicz T. L., Juriniec W. E., Kreta W. M. Własne drganie organicznej płyty nitprzezwanie niejednorodnych // Mechanika, z. 18, VII symposium dynamiki konstrukcji, Rzeszow. - 1989. - с.147-150.
39. А.с.№1341030. Механизм резания лесопильной рамы / Носовский Т.А., Белошицкий В.И., Дринец В.Е., Плишник И.М. // ГК СССР по делам изобр. и отк. Заявка №4001536. Приор. изобр. 3.01.1986 г. Зарегистрировано 1.06.1987 г.
40. А.с.№1404342. Дисковый инструмент / Носовский Т.А., Белошицкий В.И., Плишник И.М., Апостолик С.А., Дринец В.Е. // ГК СССР по делам изобр. и отк. Заявка №162910. Приор. изобр. 18.12.1986 г. Зарегистрировано 22.02.1988г.

А Н Н О Т А Ц И Я

Дринец В.Е. Напряженное состояние неоднородных ортотропных двумерных тел под воздействием статических, динамических и температурных нагрузок.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.04 - механика деформируемого твердого тела. Физико-механический институт им. Г.В.Карпенко НАН Украины, Львов, 1994.

Защищается 49 научных работ и 2 авторских свидетельства.

Диссертационная работа содержит теоретические исследования и разработку метода расчета напряженного состояния неоднородных ортотропных двумерных тел. Решены задачи о поперечных колебаниях и устойчивости неоднородных ортотропных пластин. Исследовано влияние неоднородного упругого основания на изгиб и колебания неоднородных ортотропных пластин. Решены задачи о плоском напряженном состоянии и изгибе неоднородных ортотропных пластин, подверженных воздействию температурного поля. Разработан вариант теории расчета контактного взаимодействия анизотропных и неоднородных ортотропных пластин с упругим стержневым элементом под воздействием статических и динамических нагрузок.

A B S T R A C T

Yurinetz V.E. The Stress State of Heterogeneous Orthotropic Two-dimensional Bodies Subjected to the Influence of Static, Dynamic and Temperature Loading.

Thesis submitted to a doctor's degree (physics and mathematics) on speciality 01.02.04 - Mechanics of Deformable Solid. Karpenko Physics-Mechanical Institute of the National Academie of Sciences, Lviv, Ukraine, 1994.

The 49 scientific works and the 2 author's certificates are defended.

The thesis contains theoretical investigations and development of the method for calculation of stress state of heterogeneous orthotropic two-dimensional bodies. Problems on lateral oscillations and stability of heterogeneous orthotropic plates were solved. The influence of heterogeneous elastic basis on heterogeneous plates bending and oscillation was investigated. Problems on the plane stress state and bending of heterogeneous orthotropic plates, subjected to the influence of temperature field were solved. A variant of the calculation theory of contact interaction of anisotropic and heterogeneous orthotropic plates, with elastic rod under the influence of static and dynamic leading was developed.

Ключові слова: Неоднорідні ортотропні тіла, стержневий елемент, пластина, неоднорідна основа, плоский напружений стан, згин, коливання, стійкість, статичне навантаження, динамічне навантаження, температурне поле, контактна взаємодія.

455344

AB31.457

AB 31.457

Список на 29.10.94. Всего 5000 1/16. Сеть 1000.
Копы 1000. Угол. 200. 1-2,5. 100. 100. 100.
Список на 29.10.94. Всего 5000 1/16. Сеть 1000.
Копы 1000. Угол. 200. 1-2,5. 100. 100. 100.
Список на 29.10.94. Всего 5000 1/16. Сеть 1000.
Копы 1000. Угол. 200. 1-2,5. 100. 100. 100.

1000 1000 200 700-1000 1000, 4.