НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР
ім. Б.І.ВЄРКІНА

На правах рукопису

ГУБРЄЄВ Генадій Михайлович

СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ БІОРТОГОНАЛЬНИХ РОЗКЛАДАНЬ, ЩО ПОРОДЖУЮТЬСЯ ВАГАМИ МАКЕНХАУПТА

01.01.01. - математичний аналіз

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Харків - 1994

Дисертація є рукопис

Робота виконана на кафедрі математичного аналізу Південноукраїнського державного педагогічного університету.

Офіційні опоненти : доктор фізико-математичних наук, професор Л.А.Сахнович
доктор фізико-математичних наук Г.М.Фельдман
доктор фізико-математичних наук, доцент А.П.Гришин

Провідна організація - Інститут математики Національної АН України

Захист дисертації відбудеться "___" 01 1994 р. в 15 годин на засіданні спеціалізованої ради Д 016.27.02 при Фізико-технічному інституті низьких температур ім.Б.І.Вєркіна Національної Академії Наук України /310164,м.Харків, пр.Леніна, 47/

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б.І.Вєркіна Національної Академії Наук України.

Автореферат розіслано "05" 12 1994 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фізико-математичних наук В.П.Котляров

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми та мета роботи. Перші результати Н.Вінера і Р.Пелі про негармонічні ряди Фур'є породили цілу галузь дослідження, в якій одне з центральних місць займала проблема безумовної базисності сімей експонент в просторах L_2 на скінченних інтервалах. Цій тематиці були присвячені також праці Р.Даффіна, Дж.Ічаса, А.Інгама, А.Шаффера, Б.Я.Левіна, В.Д.Головіна, М.І.Кадеця, В.Е.Кацнельсона, Р.Юнга, А.М.Седлецького, С.А.Авдоніна та ін. У працях цих авторів, окрім інших результатів, було виділено деякі спеціальні класи базисів Рісса із експоненціальних функцій. Наприкінці 70-х років відбулися важливі події, грунт для яких був підготовлений однією публікацією Б.С.Павлова*). С цього моменту починається новий етап у дослідженні проблеми базисів із експонент, який грунтується на широкому застосуванні спектральної теорії операторів. Суть методу проектування Б.С.Павлова полягає в тому, що сім'ї експонент на скінченому інтервалі "порівнюються" не з ортогональними базисами, а з цими ж сім'ями експонент, розглянутими у просторі $L_2(\mathbb{R}_+)$. Завдяки тому, що від "еталона" не вимагалось занадто багато, Б.С.Павлову вдалось довести, що безумовними базисами на скінченому інтервалі будуть саме ті сім'ї експоненціальних функцій, котрі в певному сенсі близькі до відповідного базису із тих же функцій у просторі $L_2(\mathbb{R}_+)$. Згадана близькість формулюється у термінах оборотності спеціального оператора Теплиця з унімодулярним символом, а базиси із експонент в $L_2(\mathbb{R}_+)$ досліджуються за допомогою відомих результатів про найпростішу функціональну модель С.-Надя-Фойаша з дискретним спектром. Ці та

*) Павлов Б.С. Спектральный анализ дифференциального оператора с "размазанным" граничным условием// Проблемы матем. физики. ЛГУ. 1973. Вып. 6. С. 101 - 119.

інші важливі результати було викладено в підсумковій публікації*), котра послужила першим поштовхом до наших досліджень.

В роботах автора [I - 3] метод проектрування було проаналізовано з інших позицій. Наприклад, з'ясувалось, що фігуруюча в теоремі Б.С.Павлова умова Макенхаупта рівносильна тому, що спеціальний оператор диференціювання, множина власних векторів якого збігається зі заданою сім'єю експонент, генерує півгрупу класу C_0. Це спостереження спричинило декілька висновків. По-перше, використання теорії однопараметричних півгруп операторів дало змогу розв'язати низку важливих задач, котрі раніше або не розглядались зовсім, або були недостатньо повно досліджені. Серед таких задач відзначимо розв'язок задачі С.Г.Крейна про опис генераторів C_0-півгруп у термінах їх дисипативних розширень, опис дельсартових функціоналів у деяких гільбертових просторах, опис сімей експонент, що мають ортогоналізатори заданого класу. По-друге, оскільки вивчення півгруп тісно пов'язане з інтегральними оцінками норм резольвент їх генераторів, то це наштовхнуло на можливість отримання аналогічних оцінок для широкого класу несамоспряжених операторів, кореневі вектори яких виражаються через ядра $\gamma_{\rho,w}(z,t)$. Ці ядра введені в дисертації і стали одним із основних об'єктів дослідження. Вони канонічним способом будуються по довільних вагах Макенхаупта w^2 на спеціальних контурах γ_ρ. Згадані інтегральні оцінки норм резольвент дозволяють побудувати функціональні моделі розглядуваних класів несамоспряжених операторів у вигляді дробових степенів моделі С.-Надя-Фойаша, характеристична функція якої дорівнює добутку Бляшке. Тим самим метод проектування допускає поширення на сім'ї ядер, що породжуються вагами Макенхаупта.

---

*) Hruscev S.V., Nikolskii N.K., Pavlov B.S. Unconditional bases of exponentials and reproducing kernels//Lect. Notes in Math. I98I. V.864. P.214-335.

Другим стимулом дослідження базисних властивостей сімей вигляду $\left\{ y_{\rho,w}(z_k,t) \right\}_{-\infty}^{+\infty}$ послужив ряд праць М.М.Джрбашяна, в яких сформульована задача про критерії базисності у просторах L_2 на скінчених інтервалах сімей функцій типу Міттаг-Леффлера та одержані перші результати у цьому напрямку. Ця проблематика лежить у руслі наших досліджень, оскільки у випадку степеневої ваги $w^2(z)=|z|^{\omega}$ $(-1<\omega<1)$ ядра $y_{\rho,w}(z,t)$ просто виражаються через функції Міттаг-Леффлера. Відзначимо також, що ще на Московському Міжнародному Математичному Конгресі М.Г.Крейн вказував на необхідність знаходження відповідних об'єктів спектральної теорії несамоспряжених операторів, пов'язаних з чисто аналітичними результатами М.М.Джрбашяна*). В дисертації такі зв'язки були встановлені, принаймні, з тією частиною теорії М.М.Джрбашяна, котра стосується біортогональних розкладень по ядрах типу Міттаг-Леффлера.

І, нарешті, тема дисертації актуальна ще з однієї причини. В роботі показано, що дослідження базисів із значень ядер $y_{\rho,w}(z,t)$ становить інтерес не тільки для загальної теорії безумовних базисів, але і для спектральної теорії несамоспряжених операторів. Відзначимо тут лише властивість універсальності таких базисів у класі безумовних базисів абстрактних гільбертових просторів, котрі спеціальним способом будуються за вольтеровими дисипативними операторами. Цей факт лежить в основі нового підходу до добре відомої проблеми подібності операторів класу $\Lambda^{(exp)}$ найпростішому оператору інтегрування.

Таким чином, метою роботи є дослідження біортогональних розкладень, що породжуються вагами Макенхаупта, а також з'ясування спектральної структури різноманітних класів несамоспряжених операторів, пов'язаних з такими розкладаннями. Крім цього, значне

---

*) Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. - М.: Наука, 1966.

місце відведено застосуванням загального методу дослідження до розв'язання важливих задач математичного аналізу та теорії диференціальних рівнянь, що являють собою самостійний інтерес.

Методика дослідження. При спектральному підході до дослідження біортогональних розкладань головним об'єктом вивчення є оператори із класів $\mathcal{K}(\rho,\omega^2)$, кореневі вектори яких виражаються через ядра $y_{\rho,\omega}(z,t)$. Оскільки у нетривіальних випадках ці оператори недисипативні та "сильно" несамоспряжені, то скільки-небудь загальні методи спектральної теорії операторів непридатні для їх дослідження.

У дисертації спектральна структура таких операторів вивчається за допомогою підходу, котрий є розвитком метода проектування Б.С.Павлова, причому цей розвиток здійснюється у трьох напрямках. По-перше, це метод інтегральних оцінок норм резольвент операторів із класів $\mathcal{K}(\rho,\omega^2)$, який дозволяє побудувати спеціальні функціональні моделі, що діють у вагових класах Харді в кутових областях (Розділ II). У найпростішій ситуації $\rho = 1$, $\omega^2(z) \equiv 1$ (випадок експонент) ці оцінки фактично рівносильні процедурі проектування. По-друге, це прозорі геометричні міркування (§ 4, Розділ III), які дозволяють одержати критерій базисності в термінах оборотності операторів Теплиця. У такому вигляді метод проектування найбільш близький до оригінальних побудов Б.С.Павлова. І, нарешті, у розділі IУ розглядається регуляризація методу проектування, що полягає у множенні ортопроектора на підходящий оператор з наступним звуженням на відповідний підпростір. Необхідність такої регуляризації пояснюється тим, що тут вперше вивчались задачі, для яких звуження просто ортопроектора вже не є ізоморфізмом на свій образ.

Далі, для реалізації загальної програми виникла потреба як у відомих, так і у нових засобах теорії функцій та теорії операторів. Згадані нові результати - це, в основному, властивості інтегральних перетворень з ядрами $y_{\rho,w}(z,t)$, вагові класи Харді в кутових областях, дослідження функціональних моделей у цих класах.

Наукова новизна, теоретична та практична цінність. Як уже відзначалося, в роботі одержано ряд нових теорем теорії функцій, які є узагальненнями відповідних результатів теорії М.М.Джрбашяна (степенева вага) на випадок довільних ваг Макенхаупта. Разом з дослідженням функціональних моделей у вагових класах Харді в кутових областях ці результати викладені у розділі I, котрий можна розглядати як аналітичну основу усієї дисертації.

За допомогою запропонованого в роботі методу інтегральних оцінок норм резольвент побудовані функціональні моделі "сильно" несамоспряжених операторів із класів $\mathcal{K}(\rho,w^2)$, котрі дозволили досить повно дослідити спектральну структуру цих операторів. Можливість побудови скалярних функціональних моделей досягається за рахунок розширення цього поняття: модельні оператори подібні (але не унітарно еквівалентні) операторам із класів $\mathcal{K}(\rho,w^2)$. Далі, одержані в дисертації інтегральні оцінки норм резольвент становлять самостійний інтерес і лежать в основі застосувань до теорії лінійних диференціальних рівнянь, до теорії періодичних у середньому функцій. Наприклад, розв'язана задача С.Г.Крейна про опис генераторів C_0-півгруп у термінах їх дисипативних розширень з виходом із простору, дається опис дельсартових функціоналів у просторах C, L_2, W_2^1 на скінчених інтервалах.

В дисертації вперше отримано критерії безумовної базисності сімей функцій, що породжуються вагами Макенхаупта w^2, у просторах L_2 на скінчених інтервалах. В частковому випадку $w^2(z)=|z|^{\omega}$ $(-1<\omega<1)$ тут міститься розв'язок задачі М.М.Джрбашяна про безумовну базисність сімей функцій типу Міттаг-Леффлера. Ці та супровідні результати можуть бути застосовані щодо задач математичної фізики (оператор Штурма-Ліувілля з некласичними граничними умовами, при обгрунтуванні принципу невідчутності границі М.Каца (Л.А.Сахнович)) , до задач інтерполяції цілими функціями скінченного порядку, до вивчення сингулярних інтегральних рівнянь.

Вперше шляхом порівняння з базисами, що складаються із значень ядер $y_{1,w}(z,t)$, вивчаються базисні властивості сімей векторів в абстрактних гільбертових просторах, асоційованих з вольтеровими операторами із класів $\Lambda^{(exp)}$. Доводиться, що такі сім'ї утворюють безумовний базис лише у тому випадку, коли оператор із класу $\Lambda^{(exp)}$ подібний до оператора інтегрування. Цей факт лежить в основі принципово нового підходу до добре відомої проблеми подібності вольтерових операторів, який дозволив, наприклад, одержати просту ознаку такої подібності, що формулюється лише у термінах поведінки характеристичної оператор-функції на безкінечності. За допомогою цих результатів вперше розв'язується задача про безумовну базисність сімей функцій, побудованих по розв'язанню дисипативної канонічної системи диференціальних рівнянь, формулюється критерій подібності інтегральних вольтерових операторів до найпростішого оператора інтегрування. Аналогічні задачі розглядаються також і в моделі С.-Надя-Фойаша.

На захист виносяться такі основні положення:

1. Інтегральні перетворення з ядрами $y_{\rho,w}(z,t)$ та теорія вагових класів Харді в кутових областях.

2. Дослідження спектральної структури операторів із класів $K(\rho,w^2)$. Застосування до теорії лінійних диференціальних рівнянь, до теорії періодичних у середньому функцій.

3. Розвиток методу проектування і критерії безумовної базисності сімей ядер, що породжуються вагами Макенхаупта. Розв'язання задачі М.М.Джрбашяна про безумовну базисність сімей функцій типу Міттаг-Леффлера.

4. Дослідження безумовних базисів абстрактних гільбертових просторів, асоційованих з дисипативними вольтеровими операторами. Новий підхід до проблеми подібності вольтерових операторів, ознака подібності в термінах характеристичної оператор-функції.

Апробація роботи. Викладені у дисертації результати доповідались на конференціях, присвячених памяті В.П.Потапова та М.Г.Крейна (Одеса, 1981р., 1990 р.), у школах з теорії операторів у функціональних просторах (Челябінськ, 1986 р., Нижній Новгород, 1991 р.), на семінарах з спектральної теорії операторів та спектральної теорії функцій (кер. М.Г.Крейн при фізико-хімічному інституті АН УРСР, Л.А.Сахнович при Одеському державному інституті зв'язку, Д.З.Аров при Одеському державному педагогічному інституті, Н.К.Нікольський та В.П.Хавін при ЛОМІ АН СРСР, Б.Секефальві-Надь при Сегедському університеті, Угорщина), з теорії функцій (кер. М.М.Джрбашян при Інституті математики АН Вірм.РСР, Б.Я.Левін та І.В.Островський при ХДУ), з теорії диференціальних рівнянь (кер. М.Л.Горбачук при Інституті математики АН України).

Публікації. Основний зміст дисертації опубліковано у 11 роботах [1 - 11].

Структура і об'єм роботи. Дисертація викладена на 267 сторінках і містить вступ, чотири розділи та список літератури, що цитується (126 найменувань). Кожний розділ має параграф "Літературні вказівки та доповнення". В дисертації теореми мають подвійну нумерацію, яка вказує на номер відповідного параграфа та порядковий номер теореми у цьому параграфі. В авторефераті та у вступі до подвійного номеру теореми дисертації зліва дописано номер відповідного розділу.

ЗМІСТ РОБОТИ

В розділі I викладається аналітична основа всього дослідження, яка являє собою, в основному, узагальнення деяких важливих результатів М.М.Джрбашяна та його учнів на випадок довільних ваг Макенхаупта.

Почнемо з визначення одного із основних об'єктів роботи - ядра $y_{\rho,w}(z,t)$, яке будується по вазі w^2 на спеціальному контурі γ_ρ . Для кожного $\rho > \frac{1}{2}$ через γ_ρ позначимо контур в комплексній площині, що являє собою кут з вершиною в початку координат, аргументи точок сторін якого дорівнюють $-\frac{\pi}{\rho}$ та 0 відповідно. В граничному випадку $\rho = \frac{1}{2}$ під γ_ρ розуміємо піввісь $\mathbb{R}_+$. Для двох областей, на які розбивається комплексна площина, будемо використовувати позначення:

$$\gamma_\rho^- = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : -\tfrac{\pi}{\rho} < \arg\lambda < 0\right\}; \quad \gamma_\rho^+ = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < \arg\lambda < \tfrac{\pi}{\alpha}\right\}, \quad (I)$$

де $\rho^{-1} + \alpha^{-1} = 2$. Якщо $\rho = \frac{1}{2}$, то область $\gamma_\rho^- = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

Якщо на контурі γ_ρ задана вага $p(z) \geq 0$, то через $L_2(\gamma_\rho, p)$ позначається простір функцій з нормою:

$$\|f\|^2 = \int_{\gamma_\rho} |f(z)|^2 p(z)\,|dz| < \infty.$$

Вага $p = w^2$ називається A_2-вагою Макенхаупта на контурі γ_ρ , якщо

$$\sup_{z\in\gamma_\rho} \sup_{r>0} \left\{ r^{-1} \int_{B(z,r)\cap\gamma_\rho} w^2(\lambda)\,|d\lambda|\; r^{-1} \int_{B(z,r)\cap\gamma_\rho} w^{-2}(\lambda)\,|d\lambda| \right\} < \infty, \qquad (A^2_{\gamma_\rho})$$

де $B(z,r)$ - круг з центром z , радіуса r .

Аналітичну в області γ_ρ^- функцію φ будемо називати зовнішньою в γ_ρ^- , якщо $\varphi(\lambda^{\frac{1}{2\rho}})$ є зовнішньою в нижній півплощині.

Твердження I.I.I. Нехай $\rho \geq \frac{1}{2}$, а w^2 - довільна A_2-вага Макенхаупта на контурі γ_ρ . Тоді:

1). Якщо $\rho > \frac{1}{2}$, то існує аналітична в області γ_ρ^- функція $\mathcal{W}_-(\lambda)$, що задовольняє умовам:

а) $\mathcal{W}_-(\lambda)$ має майже всюди при $\lambda \to z$ недотичні граничні значення $\mathcal{W}_-(z)$, причому $\mathcal{W}(z) \overset{\text{м.в.}}{=} |\mathcal{W}_-(z)|$, $z \in \gamma_\rho$;

в) функція $\mathcal{W}_-(\lambda)$ зовнішня в області γ_ρ^-;

с) має місце інтегральне представлення

$$\mathcal{W}_-(\lambda) = \lambda^{\frac{1+\rho}{2}} \int_0^\infty e^{-i\lambda^\rho t} y_{\mathcal{W}}(t)\,dt \quad , \ \lambda \in \gamma_\rho^- \tag{2}$$

з деякою функцією $y_{\mathcal{W}} \in L_2^{loc}(\mathbb{R}_+)$.

2). Якщо $\rho = \frac{1}{2}$, то попередні твердження залишаються в силі та, крім того, модулі граничних значень зовнішньої в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ функції $\mathcal{W}_-(\lambda)$ на верхньому та нижньому берегах розрізу майже всюди збігаються:

$$|\mathcal{W}_-(x-i0)| \overset{\text{м.в.}}{=} |\mathcal{W}_-(x+i0)| \overset{\text{м.в.}}{=} \mathcal{W}(x) \quad , \ x \in \mathbb{R}_+$$

Відзначимо, що тут і далі гілки багатозначних функцій виду λ^δ в областях $\gamma_\rho^\pm$ фіксуються умовами зміни аргументу (1).

Таким чином, довільній вазі Макенхаупта $\mathcal{W}^2$ на контурі γ_ρ $(\rho \geqslant \frac{1}{2})$ відповідає єдина (з точністю до постійного унімодулярного множника) функція $y_{\mathcal{W}} \in L_2^{loc}(\mathbb{R}_+)$. Тепер згадане раніше ядро $y_{\rho,\mathcal{W}}(\lambda,t)$ будується як розв'язання інтегрального рівняння

$$y_{\rho,\mathcal{W}}(\lambda,t) - \lambda e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \Gamma^{-1}\left(\tfrac{1}{\rho}\right) \int_0^t (t-s)^{\frac{1}{\rho}-1} y_{\rho,\mathcal{W}}(\lambda,s)\,ds = y_{\mathcal{W}}(t) \ , \ t \geqslant 0. \tag{3}$$

Одразу відзначимо, що в частковому випадку степеневої ваги Макенхаупта роль ядер $y_{\rho,\mathcal{W}}(\lambda,t)$ в гармонічному аналізі була відома. Дійсно, якщо

$$\mathcal{W}^2(z) = |z|^\omega \ , \quad -1 < \omega < 1,$$

то $y_{\mathcal{W}}(t) = \Gamma^{-1}(\mu)$, $\mu = (1+\rho-\omega)(2\rho)^{-1}$ і розв'язком рівняння (3) з такою правою частиною буде функція:

$$y_{\rho,w}(\lambda,t)=t^{\mu-1}E_\rho(e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\lambda t^{1/\rho};\mu),$$

де $E_\rho(z;\mu)$ - ціла функція типу Міттаг-Леффлера, яка визначається розкладанням

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})}.$$

Теорія інтегральних перетворень з такими ядрами була побудована в циклі праць М.М.Джрбашяна, підсумок якого підведено в його монографії. Тому всі результати про оператори

$$(\mathcal{D}_{\rho,w}f)(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty y_{\rho,w}(z,t)f(t)dt\ ,\ z\in\gamma_\rho \qquad (4)$$

являють собою поширення цієї теорії на випадок довільних ваг Макенхаупта.

Теорема I.I.I. Для довільної ваги Макенхаупта w^2 на контурі γ_ρ $(\rho\geq\frac{1}{2})$ оператор $\mathcal{D}_{\rho,w}$ неперервно відображає простір $L_2(R_+)$ в $L_2(\gamma_\rho, w^{-2})$. Крім того, він обмежений знизу і має місце формула обернення:

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,i}\int_{\partial\gamma_\rho^-}\frac{(\mathcal{D}_{\rho,w}f)(z)}{w_-(z)}z^{\frac{\rho-1}{2}}e^{-iz^\rho t}dz\ ,\ t\in R_+,$$

де $\partial\gamma_\rho^-$ - межа області γ_ρ^-, яка при інтегруванні проходиться так, щоб область γ_ρ^- зоставалась справа.

Природне питання про область значень оператора $\mathcal{D}_{\rho,w}$ веде до поняття вагових класів Харді в кутових областях. Вага Макенхаупта w^2 на контурі γ_ρ $(\rho>\frac{1}{2})$ крім функції w_- в γ_ρ^-, про яку йдеться в твердженні I.I.I, породжує також зовнішню функцію w_+ в області γ_ρ^+ з аналогічними властивостями. Клас Харді $H^2(\gamma_\rho^-, w^{-2})$ визначається як сукупність усіх аналітичних в області γ_ρ^- функцій F, для яких скінченна величина

$$\|F\|_-^2=\sup_{-\frac{\pi}{\rho}<\varphi<0}\int_0^\infty\left|\frac{F(re^{i\varphi})}{w_-(re^{i\varphi})}\right|^2dr<\infty$$

Аналогічно, клас $H^2(\gamma_\rho^+, w^{-2})$ складається із аналітичних в γ_ρ^+

функцій, що відповідають умові

$$\|F\|_+^2 = \sup_{0<\varphi<\frac{\pi}{\alpha}} \int_0^\infty \left| \frac{F(re^{i\varphi})}{\omega_+(re^{i\varphi})} \right|^2 dr < \infty .$$

Простори $H^2(\gamma_\rho^\pm, \omega^{-2})$ стандартним способом ототожнюються з підпросторами простору $L_2(\gamma_\rho, \omega^{-2})$ та має місце розклад

$$L_2(\gamma_\rho, \omega^{-2}) = H^2(\gamma_\rho^+, \omega^{-2}) \dotplus H^2(\gamma_\rho^-, \omega^{-2}) \;,\; \rho > \tfrac{1}{2}$$

Наступна теорема відповідає на запитання про область значень оператора $\mathcal{D}_{\rho,\omega}$.

Теорема I.2.3. Якщо $\rho > \frac{1}{2}$, то оператор $\mathcal{D}_{\rho,\omega}$, що породжується вагою Макенхаупта на контурі γ_ρ, простір $L_2(R_+)$ відображає на клас Харді $H^2(\gamma_\rho^+, \omega^{-2})$. Якщо $\rho = \frac{1}{2}$, то $\mathcal{D}_{\rho,\omega}$ відображає $L_2(R_+)$ на весь простір $L_2(R_+, \omega^{-2})$.

Перейдемо тепер до опису деяких підпросторів класів Харді $H^2(\gamma_\rho^\pm, \omega^{-2})$, які зустрічаються на протязі всієї роботи.

Розглянемо контур Γ_ρ, вважаючи, що $\Gamma_\rho = \gamma_\rho$ при $\frac{1}{2} \le \rho \le 1$, а при $\rho > 1$ він отримується з γ_ρ приєднанням додаткових променів, що виходять з початку координат та лежать в області γ_ρ^+. Кількість додаткових променів дорівнює $n = [2\rho] - 1$, причому кожний із $n+1$ кутів, на які розбивається кут γ_ρ^+, має розхил безумовно менше π/ρ. Через $h_F(\theta)$ позначається індикатор росту функції F.

Теорема I.3.I. Нехай ω^2 - вага Макенхаупта на контурі γ_ρ $(\rho \geq \frac{1}{2})$. Функція F тоді і тільки тоді допускає інтегральне представлення виду

$$F(z) = \int_0^a y_{\rho,\omega}(z,t) f(t) dt \quad , f \in L_2(0,a)$$

якщо дотримується сукупність умов:

I) F - ціла функція порядку ρ та нормального типу;

2) $\int_{\Gamma_\rho} |F(z)|^2 |\omega_+(z)|^{-2} |dz| < \infty$;

3) $h_F(-\frac{\pi}{2\rho}) \leq a$ при $\rho \neq 1$ та $h_F(-\frac{\pi}{2}) \leq a, h_F(\frac{\pi}{2}) \leq 0$, якщо $\rho = 1$.

Далі клас цілих функцій, що описуються цією теоремою, позначається через $A_a^2(\Gamma_\rho, \omega^{-2})$.

Відзначимо, що у найпростішому випадку $\rho = 1$, $\omega^2(z) \equiv 1$ сформульовані вище теореми становлять основний зміст класичної теорії Вінера-Пелі.

Розглянемо тепер підпростори класів Харді $H^2(\gamma_\rho^-, \omega^{-2})$, які породжуються системами раціональних функцій. Нехай $\Lambda = \{\lambda_k\}_1^\infty$ - довільна послідовність комплексних чисел із області $\gamma_\rho^+ (\rho > \frac{1}{2})$, яка занумерована в порядку незменшення модулей. Нехай також $s_j(p_j)$ - кратність появи числа λ_j на відрізку $\{\lambda_k\}_1^j$ (у всій послідовності). З послідовністю Λ пов'яжемо систему раціональних функцій

$$r_k(z) = (s_k - 1)!\,(z - \lambda_k)^{-s_k}, \; k \geq 1, \; \Lambda \subset \gamma_\rho^+$$

та розглянемо підпростір

$$\mathcal{L}_\Lambda = \operatorname{clos\,span}_{H^2(\gamma_\rho^-, \omega^2)} \{ r_k(z) : k \geq 1 \}$$

Введемо послідовність чисел із верхньої півплощини

$$\Lambda^\alpha = \{ \lambda_k^\alpha : \lambda_k \in \Lambda \}, \quad 1/\alpha + 1/\rho = 2$$

Опис підпросторів $\mathcal{L}_\Lambda$ дається наступною теоремою.

Теорема I.3.3. Нехай ω^2 - довільна вага Макенхаупта на контурі γ_ρ, $\rho > \frac{1}{2}$. Мають місце такі твердження:

I). $\mathcal{L}_\Lambda \neq H^2(\gamma_\rho^-, \omega^2)$ тоді і тільки тоді, якщо виконується умова

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\operatorname{Im} \lambda_k^\alpha}{|\lambda_k^\alpha + i|^2} < \infty \tag{5}$$

2). У випадку збіжності ряду (5) функція $f \; (\in H^2(\gamma_\rho^-, \omega^2))$ тоді і тільки тоді належить підпростору $\mathcal{L}_\Lambda$, якщо

$$B_\alpha(z^\alpha) f(z) \in H^2(\gamma_\rho^+, w^{-2}),$$

де $B_\alpha(z)$ - добуток Бляшке, побудований за послідовністю нулів Λ^α.

Простори $\mathcal{L}_\Lambda$ відіграють важливу роль на протязі всієї роботи. В них діють оператори $\mathcal{A}_{m,\alpha}$, котрі є функціональними моделями різних класів несамоспряжених операторів, що досліджуються в дисертації. На природній області визначення задамо оператор $\mathcal{A}_{m,\alpha}$ формулою

$$(\mathcal{A}_{m,\alpha} f)(z) = z f(z) - \lim_{z\to\infty} z f(z) \quad , f \in \mathcal{L}_\Lambda \qquad (6)$$

де $z\to\infty$ по бісектрисі кута γ_ρ^-. Добре відомо, що у випадку $\rho=1$, $w^2(z)\equiv 1$ оператор (6) збігається з функціональною моделлю С.-Надя-Фойаша дисипативного оператора з повною системою кореневих підпросторів. Спектральну структуру загального оператора $\mathcal{A}_{m,\alpha}$ проясняє такий результат. За послідовністю Λ^α із верхньої півплощини побудуємо сім'ю функцій

$$\tau_k^-(z) = (s_k-1)!\,(z-\lambda_k^\alpha)^{-s_k} \quad , k \geq 1.$$

В підпросторі класу Харді H^2_-

$$\mathcal{L}_{\Lambda^\alpha} = \operatorname{clos\,span}_{H^2_-} \{ \tau_k^-(z) : k \geq 1 \}$$

на природній області визначення розглянемо дисипативний модельний оператор С.-Надя-Фойаша

$$(A_m f)(z) = z f(z) - \lim_{y\to-\infty} iy f(iy)$$

Теорема І.4.2. Оператор $\mathcal{A}_{m,\alpha}$ подібний до оператора $A_m^{1/\alpha}$:

$$\mathcal{A}_{m,\alpha} = L^{-1} A_m^{1/\alpha} L,$$

де L - ізоморфізм простору $\mathcal{L}_\Lambda$ на $\mathcal{L}_{\Lambda^\alpha}$.

Цей результат, а також двосторонні оцінки

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{w^2(z)\,|dz|}{|z-\lambda|^{2n}} \asymp \left(\frac{|\lambda|^{\alpha-1}}{\operatorname{Im}\lambda^\alpha} \right)^{2n-1} |w_+(\lambda)|^2, \ \lambda\in\gamma_\rho^+, n\geq 1 \quad (7)$$

лежать в основі розв'язання задачі про безумовну базисність власних та приєднаних векторів модельного оператора $\mathcal{A}_{m,\alpha}$. Іншими словами, йдеться про умови, при яких сім'я раціональних функцій складає безумовний базис підпростору $\mathcal{L}_\Lambda \subset H^2(\gamma_\rho^-, \omega^2)$.

Теорема I.4.3. Нехай Λ - довільна послідовність, що належить області γ_ρ^+; s_k, ρ_k - її параметри. Тоді сім'я нормованих раціональних функцій

$$e_k(z) = \frac{r_k(z)}{\| r_k(z) \|}, \quad r_k(z) = (s_k - 1)!\,(z - \lambda_k)^{-s_k}, \quad k \geq 1, \quad \Lambda = \{\lambda_k\}_1^\infty$$

утворює базис Ріса підпростору $\mathcal{L}_\Lambda \subset H^2(\gamma_\rho^-, \omega^2)$ тоді і тільки тоді, якщо $\sup_k \rho_k < \infty$, а також

$$\inf \left\{ \prod_{\lambda_n \neq \lambda_k} \left| \frac{\lambda_k^\alpha - \lambda_n^\alpha}{\lambda_k^\alpha - \overline{\lambda_n^\alpha}} \right| \right\} > 0 \qquad (C)$$

У випадку степеневої ваги цей результат іншими засобами (метод біортогоналізації М.М.Джрбашяна) вперше було встановлено В.М.Мартиросяном *).

Розділ II присвячений спектральному аналізу спеціальних класів необмежених несамоспряжених операторів, кореневі вектори яких виражаються через ядра $y_{\rho,\omega}(z,t)$. Тут також розглянуто і ряд близьких задач, які мають самостійне значення.

Позначимо через $\mathcal{K}(\rho, \omega^2)$ клас щільнозаданих операторів A, що діють у просторі $L_2(0,a)$, обернені до яких задаються формулами

$$A^{-1}h = B_\rho h + (h, x)\,y_\omega, \quad (B_\rho h)(t) = e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\,\Gamma^{-1}\!\left(\tfrac{1}{\rho}\right)\int_0^t (t-s)^{\frac{1}{\rho}-1} h(s)\,ds, \quad (8)$$

де x - деякий елемент із $L_2(0,a)$, дужки означають скалярний добуток в $L_2(0,a)$, а звуження функції y_ω із тверд-

---

*) Мартиросян В.М. Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях// Изв. АН АрмССР. Математика, 1978. Т.13, № 5 - 6.С.490-531.

ження I.I.I. на $[0, a]$ знову позначається буквою y_w. Таким чином, довільна вага Макенхаупта w^2 на контурі γ_ρ породжує клас необмежених, взагалі кажучи, несамоспряжених операторів $\mathcal{K}(\rho, w^2)$ в кожному просторі $L_2(0, a)$.

Спектр оператора $A \in \mathcal{K}(\rho, w^2)$ збігається з множиною коренів $\Lambda = \{\lambda_k\}$ цілої функції порядку ρ

$$\Phi(\lambda) = 1 - \lambda\,(y_{\rho,w}(\lambda,t), x),$$

а відповідні кореневі підпростори натягуються на функції

$$y^{(j)}_{\rho,w}(\lambda_k,t) = \frac{d^j}{d\lambda^j}\, y_{\rho,w}(\lambda,t)\Big|_{\lambda=\lambda_k}, \quad 0 \le j < p_k, \ \lambda_k \in \Lambda,$$

де p_k - кратність кореня λ_k.

Інтерес до операторів класу $\mathcal{K}(\rho, w^2)$ пояснюється, наприклад, наступною теоремою. Як і раніше, s_k (p_k)- кратність появи числа λ_k на відрізку $\{\lambda_j\}_1^k$ (в усій послідовності).

Теорема II.I.I. Нехай w^2 - довільна вага Макенхаупта на контурі γ_ρ $(\rho \ge \frac{1}{2})$. Тоді кожний безумовний базис простору $L_2(0, a)$ виду

$$\left\{ y^{(s_k-1)}_{\rho,w}(\lambda_k, t) : \lambda_k \in \Lambda \right\}, \quad 0 \notin \Lambda \tag{9}$$

збігається з множиною власних та приєднаних функцій відповідного оператора A класу $\mathcal{K}(\rho, w^2)$:

$$A^{-1} h = B_\rho h + (h, x)\, y_w$$

При цьому біортогональна система складається із функцій

$$h_{\rho,w}(\bar\lambda_n, t) = -\frac{1}{(s_n-1)!} \sum_{l=s_n}^{p_n} \frac{\overline{a_{n,l}}}{(l-s_n)!}\, x_\rho^{(l-s_n)}(\bar\lambda_n, t), \quad \lambda_n \in \Lambda,$$

де

$$x_\rho^{(j)}(\bar\lambda_n, t) = \frac{d^j}{d\lambda^j} (I - \lambda B_\rho^*)^{-1} x \Big|_{\lambda=\lambda_n},$$

а коефіцієнти $a_{n,l}$ визначаються із розкладу

$$\Phi^{-1}(\lambda) = \sum_{l=1}^{p_n} a_{n,l}\,(\lambda-\lambda_n)^{-l} + \text{регулярна частина}, \quad \Phi(\lambda) = 1 - \lambda(y_{\rho,w}(\lambda,t), x).$$

Оператори із класів $\mathcal{K}(\rho, w^2)$, взагалі кажучи, "сильно" несамосприжені та недисипативні. Тому загальні методи дослідження несамоспряжених операторів тут не можуть бути застосовані. § 2 розділу II присвячений, в основному, теоремі про інтегральні оцінки норм резольвент, котра лежить в основі спектарльного аналізу операторів класу $\mathcal{K}(\rho, w^2)$. Щоб сформулювати основний результат, позначимо через γ_ρ^ε контур, що лежить в області γ_ρ^- і задається рівнянням:

$$\operatorname{Im} \lambda^\rho = -\varepsilon \quad , \; \varepsilon > 0 .$$

Теорема II.2.2. Нехай A - довільний оператор класу $\mathcal{K}(\rho, w^2)$:

$$A^{-1} h = B_\rho h + (h, x) y_w \; , \; \Phi(\lambda) = 1 - \lambda (y_{\rho, w}(\lambda, t), x)$$

Тоді еквівалентні такі умови:

I) для всіх $h \in L_2(0,a)$

$$\int_{\gamma_\rho^\varepsilon} |z|^{1-\rho} \|(A - zI)^{-1} h\|^2 |dz| \leq M \|h\|^2 ;$$

2) для всіх $h \in L_2(0,a)$

$$\int_{\gamma_\rho^\varepsilon} \left| \frac{w_-(z)}{\Phi(z)} \right|^2 |((I - zB_\rho)^{-1} h, x)|^2 |dz| \leq M \|h\|^2 ,$$

де $w_-(z)$ - зовнішня в області γ_ρ^- функція, що відповідає вазі w^2;

3) вага $W^2(z) = |w_-(z)|^2 |\Phi(z)|^{-2}$ задовольняє умову Макенхаупта на контурі γ_ρ^ε.

Сформульована теорема має декілька важливих застосувань, які викладаються в розділі II. Почнемо зі з'ясування спектральної структури операторів класу $\mathcal{K}(\rho, w^2)$. Введемо таку умову для функції Φ, корені якої збігаються зі спектром оператора A :

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log |\Phi(re^{-i\frac{\pi}{2\rho}})|}{r^\rho} = a \, , \; \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log |\Phi(re^{i\frac{\pi}{2\alpha}})|}{r^\alpha} = 0 \, , \; \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho} = 2 \quad (10)$$

Теорема II.3.I. Нехай A - оператор класу $\mathcal{K}(\rho, w^2)$, Φ - ціла функція, що йому відповідає. Якщо $W^2(z) = w^{-2}(z) |\Phi(z)|^2$ задовольняє умову Макенхаупта на контурі γ_ρ, то при наявності (10) лінійна замкнута оболонка кореневих підпросторів оператора A збігається з простором $L_2(0,a)$.

Нехай тепер A - довільний оператор класу $\mathcal{K}(\rho, w^2)$, спектр якого лежить в області $\gamma_\rho^+ \ (\rho > \frac{1}{2})$. Тоді збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \lambda_k^\alpha}{|\lambda_k^\alpha + i|^2} < \infty \quad , \ \lambda_k \in \sigma(A) = \Lambda$$

і тому за Λ можна побудувати підпростір $\mathcal{L}_\Lambda \subset H^2(\gamma_\rho^-, w^2)$. Розглянемо в $\mathcal{L}_\Lambda$ модельний оператор $\mathcal{A}_{m,\alpha}$, означений формулою (6), і з'ясуємо, при яких умовах оператор A подібний до оператора $\mathcal{A}_{m,\alpha}$.

Теорема II.3.2. Нехай $A \in \mathcal{K}(\rho, w^2)$, а його спектр Λ лежить в $\gamma_\rho^+ \ (\rho > \frac{1}{2})$. Нехай також $\mathcal{A}_{m,\alpha} \ (\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\alpha} = 2)$ - оператор виду (6), який діє в просторі $\mathcal{L}_\Lambda \subset H^2(\gamma_\rho^-, w^2)$. Тоді, якщо оператори A та $\mathcal{A}_{m,\alpha}$ подібні, то має місце умова (10) і вага

$$W^2(z) = |w_-(z)|^{-2} |\Phi(z)|^2 \tag{11}$$

задовольняє умову Макенхаупта на кожному контурі $\gamma_\rho^\varepsilon \ (\varepsilon > 0)$. Навпаки, якщо вага (11) задовольняє умову Макенхаупта на контурі γ_ρ і має місце умова (10), то оператори A і $\mathcal{A}_{m,\alpha}$ подібні. Цю подібність здійснює оператор

$$(Sh)(z) = \Phi^{-1}(z)\left((I - zB_\rho)^{-1} h, x\right),$$

що діє із $L_2(0,a)$ на $\mathcal{L}_\Lambda$ та, крім того, справедливі рівності

$$S y_{\rho,w}^{(s_k-1)}(\lambda_k, t) = -\frac{(s_k-1)!}{(z-\lambda_k)^{s_k}} \quad , \ k \geq 1 \ .$$

Таким чином, цей результат показує, що при вказаних умовах багато задач про оператор A можуть бути зведені до аналогічних задач про модельний оператор $\mathcal{A}_{m,\alpha}$, спектральна структура якого з'ясована в теоремі I.4.2. В роботі оператори $\mathcal{A}_{m,\alpha}$ називаються функціональними моделями операторів класів $\mathcal{K}(\rho, w^2)$.

В § 4 - 6 розділу II розглядаються застосування теореми II.2.2.

до теорії диференціальних рівнянь та до теорії періодичних в середньому продовжень функцій за межі інтервала їх задання.

По-перше, з'ясовані умови, при яких оператори $\pm iA$, де $A\in\mathcal{K}(1,w^2)$, генерують C_0-півгрупи. В наступній теоремі

$$\Phi(\lambda)=1-\lambda(y_{1,w}(\lambda,t),x),$$

а також використовується позначення:

$$\tilde{w}(\lambda)=\begin{cases}|w_+(\lambda)| & ,\ \Im m\,\lambda\geq 0\\ |w_-(\lambda)| & ,\ \Im m\,\lambda<0,\end{cases}$$

де $w_\pm$ - зовнішні функції, що відповідають вазі w^2 на $\mathbb{R}$.

Теорема II.4.I. Нехай $A\in\mathcal{K}(1,w^2)$ та виконується умова:

$$\overline{\lim_{y\to\infty}}\frac{\log|\Phi(iy)|}{y}=0\ ,\quad \overline{\lim_{y\to-\infty}}\frac{\log|\Phi(iy)|}{|y|}=a.$$

тоді справедливі такі твердження:

I). Оператор iA генерує півгрупу $U(t)=\exp\{iAt\}$ класу C_0 тоді й тільки тоді, якщо $\sigma\overset{df}{=}\inf\limits_k \Im m\,\lambda_k>-\infty$ та на якій-небудь прямій $\mathbb{R}+i\eta$ $(\eta<\sigma)$ вага $\tilde{w}^2(\lambda)|\Phi(\lambda)|^{-2}$ задовольняє умову Макенхаупта.

2). Тип півгупи $U(t)$ дорівнює $\omega=-\inf\limits_k \Im m\,\lambda_k$, і має місце формула:

$$U(t)f=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}+i\eta}e^{i\lambda t}y_{1,w}(\lambda,s)\,\Phi^{-1}(\lambda)((I-\lambda B_1)^{-1}f,x)d\lambda,\ 0\leq s\leq a.$$

3). Спектр півгрупи визначається рівністю

$$\sigma(U(t))=\left\{e^{-\eta t}\xi,\ \xi\in\mathbb{C}:\inf_{\Im m\,\lambda>0}\left(|B_\eta(\lambda)|+|e^{i\lambda t}-\xi|\right)=0\right\},$$

де B_η - добуток Бляшке з нулями на послідовності $M=\Lambda-i\eta$, $\eta<\sigma$.

По-друге, за допомогою теореми II.4.I. дається негативне розв'язання задачі С.Г.Крейна про генератори C_0-півгруп в гільбертових просторах. Нагадаємо, що оператор A називається антидисипативним, якщо $\Im m(Af,f)\leq 0$ для всіх $f\in\mathcal{D}_A$. Має місце

Теорема*). Якщо оператор $-iB$ породжує C_0 -півгрупу типу ω в гільбертовому просторі $\mathfrak{h}$, то оператор $B-i\omega_1 I$ $(\omega_1>\omega)$ може бути розширений замиканням до максимального антидисипативного оператора $\widetilde{B}-i\omega_1 I$, що діє в більш широкому гільбертовому просторі, причому $\mathcal{D}_{\widetilde{B}}\subset\mathfrak{h}$.

В монографії С.Г.Крейна (с. II9) розглядалась задача про обернення сформульованої теореми. В § 4 розділу II одержано негативну відповідь на це питання: побудовано приклад оператора, який задовольняє висновкам теореми С.Г.Крейна, але не породжує навіть коректної задачі Коші.

В просторі $L_2(0,1)$ розглянемо оператор

$$A=\frac{1}{i}\frac{d}{dt}\quad,\ \mathcal{D}_A=\operatorname{Ker}\hat{\varphi}, \tag{I2}$$

де обмежений в просторі Соболева $W_2^1(0,1)$ функціонал $\hat{\varphi}$ задається формулою

$$\hat{\varphi}(x)=\int_0^1 x(t)g(t)dt+\int_0^1 x'(t)g'(t)dt\ ,\ g(t)=\sin^{3/2}\pi t.$$

Теорема II.4.4. Для довільного $\omega>1$ оператор $A^*-i\omega I$ розширюється замиканням до максимального антидисипативного оператора $\widetilde{B}-i\omega I$, що діє в більш широкому гільбертовому просторі, причому $\mathcal{D}_{\widetilde{B}}\subset L_2(0,1)$. Разом з тим оператор $-iA^*$ не породжує навіть коректної задачі Коші.

Відзначимо, що оператор A виду (I2) належить до класу $\mathcal{K}(1,1)$ $(\rho=1,\ \mathcal{W}^2(z)\equiv 1)$, а висновок про те, що $-iA^*$ не генерує півгрупу обмежених операторів, робиться на основі теореми II.4.I.

§ 5 присвячено застосуванню теореми II.4.I до теорії періодичних в середньому функцій. Нехай $\mathfrak{X}$ - який-небудь банахів простір функцій, заданих на сегменті $[0,1]$, $\hat{\varphi}$ - лінійний об-

---

*) Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, I967.

межений функціонал в $\mathcal{X}$, $\mathfrak{S} = \operatorname{Ker}\hat{\varphi}$. Функція $y(t)$ $(t \in R_+)$ називається періодичним в середньому продовженням направо функції $x \in \mathfrak{S}$, якщо виконані умови:

1) при кожному $s \geq 0$ функція $y(t+s)$ належить $\mathcal{X}$ $(t \in [0,1])$;

2) $x(t) = y(t)$ при $t \in [0,1]$ (як елементи простору $\mathcal{X}$);

3) $\hat{\varphi}(y(t+s)) = 0$ для всіх $s \geq 0$.

Далі, функціонал $\hat{\varphi}$ будемо називати правим дельсартовим, якщо кожна функція з його ядра має єдине періодичне в середньому продовження направо. В роботі дається опис правих дельсартових функціоналів у просторах C, L_2, W_2^1 на інтервалі $[0,1]$.

В § 6 розділу II доведено критерій рівномірної коректності задачі Коші:

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + Au(t) = 0\ ,\quad u(0) = v\ ,\ u'(0) = v_1\ ,\ v, v_1 \in \mathcal{D}_A,$$

де A - довільний оператор класу $\mathcal{K}(\frac{1}{2}, w^2)$. Дослідження цього диференціального рівняння грунтується на теоремі II.2.2 у випадку $\rho = \frac{1}{2}$.

Розділ III присвячений, в основному, розв'язанню задачі про безумовну базисність у просторі $L_2(0,a)$ сімей ядер, що породжуються вагами Макенхаупта на контурах γ_ρ. Інакше кажучи, з'ясовуються необхідні та достатні умови на послідовність $\Lambda = \{\lambda_k\}_1^\infty$, при яких система функцій

$$\left\{ y_{\rho,w}^{(s_k-1)}(\lambda_k, t) : k \geq 1 \right\} \tag{13}$$

повна в просторі $L_2(0,a)$ та існує така константа $m \in (0,1)$, що оцінки

$$m \sum |c_k|^2 \| y_{\rho,w}^{(s_k-1)}(\lambda_k,t)\|^2 \leq \|\sum c_k\, y_{\rho,w}^{(s_k-1)}(\lambda_k,t)\|^2 \leq m^{-1} \sum |c_k|^2 \| y_{\rho,w}^{(s_k-1)}(\lambda_k,t)\|^2$$

мають місце для довільної скінченної множини комплексних чисел $\{c_k\}$.

В § I одержано двосторонні оцінки норм елементів послідовності (13). Нехай Λ лежить в області γ_ρ^+ $(\rho > \frac{1}{2})$ і ті частини послідовності Λ, що попадають в достатньо малі кути $0<\arg\lambda<\varepsilon$, $-\frac{\pi}{\rho}-\varepsilon<\arg\lambda<-\frac{\pi}{\rho}$ при деякому $\delta>0$ задовольняють умову

$$\operatorname{Im}\lambda_k^{\rho}\geqslant\delta \tag{I4}$$

де під λ^{ρ} розуміємо аналітичне продовження в указані кути тієї гілки функції, яка відображає область γ_{ρ}^{-} на нижню півплощину.

Теорема III.I.I. Нехай послідовність Λ лежить в області γ_{ρ}^{+} $(\rho>\frac{1}{2})$, виконується умова (I4) та $\sup\limits_{k}\rho_k<\infty$. Тоді

$$\|y_{\rho,w}^{(s)}(\lambda_k,t)\|^2_{L_2(0,a)}\asymp|w_+(\lambda_k)|^2\left(\frac{|\lambda_k|^{\alpha-1}}{\operatorname{Im}\lambda_k^{\alpha}}\right)^{2s+1},\quad 0\leqslant s<\rho_k,$$

де $\alpha=\rho(2\rho-1)^{-1}$.

Нехай тепер Λ лежить в області γ_{ρ}^{-} $(\rho\geqslant\frac{1}{2})$ та попадає в криволінійну смугу виду

$$\delta\leqslant|\operatorname{Im}\lambda_k^{\rho}|\leqslant\Delta \tag{I5}$$

Тоді має місце

Теорема III.I.2. Нехай Λ лежить в області γ_{ρ}^{-} $(\rho\geqslant\frac{1}{2})$, виконується умова (I5) і $\sup\limits_{k}\rho_k<\infty$. Тоді мають місце двосторонні оцінки

$$\|y_{\rho,w}^{(s)}(\lambda_k,t)\|^2_{L_2(0,a)}\asymp|w_-(\lambda_k)|^2\left(\frac{|\lambda_k|^{\rho-1}}{|\operatorname{Im}\lambda_k^{\rho}|}\right)^{2s+1},\quad 0\leqslant s<\rho_k.$$

Сформулюємо тепер основний результат, при доведенні якого були використані практично всі викладені раніше результати про ядра $y_{\rho,w}(z,t)$. Відзначимо, що зв'язок з побудовами розділу II здійснюється за допомогою теореми II.I.I.

Теорема III.2.3. Нехай послідовність Λ, всі кратності якої ρ_k обмежені в сукупності, зображується у вигляді

$$\Lambda=\Lambda_+\cup\Lambda_-,$$

де Λ_+ задовольняє умову (I4), а Λ_- належить деякій криволінійній смузі (I5). Тоді система функцій

$$\left\{y_{\rho,w}^{(s_k-1)}(\lambda_k,t)\,:\,k\geqslant1\right\},\quad\rho\geqslant\frac{1}{2}$$

утворює безумовний базис простору $L_2(0,a)$ тоді і тільки тоді, якщо

Λ збігається з множиною коренів цілої функції Φ, що задовольняє умовам:

I) $z^{-1}(\Phi(z)-\Phi(0)) \in A^2_a(\Gamma_\rho, w^{-2})$;

2) $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\log|\Phi(re^{-i\frac{\pi}{2\rho}})|}{r^\rho} = a$, $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\log|\Phi(re^{i\frac{\pi}{2\alpha}})|}{r^\alpha} = 0$, $\alpha = \rho(2\rho-1)^{-1}$;

3) вага $W^2(z) = w^{-2}(z)\,|\Phi(z)|^2$ задовольняє умову Макенхаупта на γ_ρ;

4) послідовність $\Lambda^\alpha_+ = \{\lambda^\alpha_k : \lambda_k \in \Lambda_+\}$ задовольняє умову Карлесона (C);

5) послідовність $\Lambda^\rho_- = \{\lambda^\rho_k : \lambda_k \in \Lambda_-\}$ така, що

$$\inf_{\lambda_k \neq \lambda_i} |\lambda^\rho_k - \lambda^\rho_i| > 0.$$

За допомогою цього загального результату доводиться, що при довільному $\rho \geqslant \frac{1}{2}$ та для довільної $A^2_{\gamma_\rho}$-ваги w^2 в кожному із просторів $L_2(0,a)$ існують безумовні базиси (I3).

В § 3 розділу III розглядається задача М.М.Джрбашяна про критерії безумовної базисності в $L_2(0,a)$ систем функцій типу Міттаг-Леффлера, а також інші цікаві часткові випадки послідовностей (I3).

В частковому випадку

$$w^2(z) = |z|^\omega, \quad -1 < \omega < 1, \quad z \in \gamma_\rho$$

теорема III.2.3 розв'язує задачу М.М.Джрбашяна*) про безумовну базисність системи функцій

$$\left\{ t^{\mu-1} E^{(s_k-1)}_\rho \left(e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\lambda_k t^{\frac{1}{\rho}};\mu\right) : k \geqslant 1 \right\},\ \mu = (2\rho)^{-1}(1+\rho-\omega)$$

при умові, що

$$\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}.$$

Доведено, що за межами цієї умови сім'ї функцій типу Міттаг-Леффле-

---

*) Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б. Разложения по специальным биортогональным системам и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка // Труды ММО. 1961. Т.10. С. 89 - 179.

ра не можуть бути базисами. Має місце

Теорема III.3.2. Нехай послідовність Λ задовольняє умовам теореми III.2.3. Тоді сім'я функцій

$$\left\{t^{\mu-1}E_\rho^{(s_k-1)}(e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\lambda_k t^{1/\rho};\mu): k\geq 1\right\},\ \rho\geq\tfrac{1}{2},\ \mu>\tfrac{1}{2}$$

утворює безумовний базис простору $L_2(0,a)$ тоді і тільки тоді, якщо $1/2<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}$ та виконуються умови I) - 5) теореми III.2.3 для ваги

$$w^2(z)=|z|^\omega,\ \omega=1+\rho-2\mu\rho,\ z\in\gamma_\rho$$

Далі, в § 3 розглядаються сім'ї експонент з "не сильно" зростаючими кратностями, а також вивчається спеціальна задача для оператора Штурма-Ліувілля, висновок про безумовну базисність власних векторів якої робиться на основі аналога теореми III.2.3 у випадку $\rho=1/2$.

Якщо $\Lambda=\Lambda_+$, $\rho>\frac{1}{2}$ то теорема III.2.3 доводиться за допомогою розвитку методу проектування Б.С.Павлова. У випадку експонент цей метод дає змогу одержати критерій базисності в термінах оборотності спеціального оператора Теплиця. В §4 для того, щоб знайти більш тісний зв'язок з методом проектування показано, як можна безпосередньо прийти до оборотності оператора Теплиця в класі Харді $H^2(\gamma_\rho^-)$ і для ядер $y_{\rho,w}(z,t)$.

І, нарешті, § 5 присвячено інтерполяційним наслідкам теорем про безумовну базисність сімей ядер, що породжуються вагами Макенхаупта. Тут йдеться про критерії розв'язності кратних інтерполяційних задач виду .

$$F^{(s_j-1)}(\lambda_j)=c_j\ ,\ 1\leq j<\infty$$

в класах цілих функцій $A_a^2(\Gamma_\rho,w^{-2})$.

Розділ ІУ присвячено як подальшому розвитку теорії безумовних базисів, так і спектральній теорії вольтерових дисипативних операторів.

Нехай $\mathfrak{H}$ - сепарабельний гільбертів простір, B - обмежений цілком несамоспряжений оператор в $\mathfrak{H}$, що задовольняє умовам:

I) $\operatorname{Im} B \overset{df}{=} \frac{1}{2i}(B-B^*) \geq 0$; 2) $\sigma(B)=\{0\}$; 3) $(I-\lambda B)^{-1}$ - ціла оператор-функція експоненціального типу. Для кожного $y \in \mathfrak{H}$ розглянемо цілу вектор-функцію

$$y(\lambda)=(I-\lambda B)^{-1}y$$

В розділі IУ одне з центральних місць посідає така

Задача. Необхідно з'ясувати, при яких умовах на оператор B, вектор $y \in \mathfrak{H}$ та послідовність $\Lambda=\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ система

$$\{y(\lambda_k):\lambda_k \in \Lambda\}\quad,\ \inf_k \operatorname{Im}\lambda_k > 0 \qquad (I6)$$

утворює безумовний базис простору $\mathfrak{H}$?

Ця абстрактна постановка цікава уже тим, що у випадку

$$\mathfrak{H}=L_2(0,a)\ ,\ (Bf)(t)=i\int_0^t f(s)ds\quad,\ y(t)\equiv 1$$

система (I6) збігається з системою експонент $\{exp(i\lambda_k t)\}_{-\infty}^{+\infty}$.

В дисертації отримано розв'язок задачі про базисність сімей (I6) шляхом "порівняння" їх з системами ядер $\{y_{1,w}(\lambda_k,t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, базисні властивості яких були досліджені в розділі III. Перш за все сформулюємо такий результат.

Теорема IУ.I.I. Якщо певна сім'я векторів (I6) утворює безумовний базис простору $\mathfrak{H}$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\|y(\lambda)\|^{\pm 2}}{1+\lambda^2}\,d\lambda<\infty .$$

З цієї теореми природно випливає таке припущення. Далі ми будемо припускати, що вага

$$w^2(\lambda)\overset{df}{=}\|y(\lambda)\|^2,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

задовольняє умову Макенхаупта на $\mathbb{R}$. Сформульований результат показує, що у випадку степеневого зростання $\|y(\lambda)\|^2$ на $\mathbb{R}$ це припущення є наслідком безумовної базисності системи (I6).

Наступний результат показує, що сім'ї (I6) в абстрактному гільбертовому просторі $\mathfrak{h}_y$ та системи функцій

$$\{ y_{1,w}(\lambda_k,t) : \lambda_k \in \Lambda \}$$

в $L_2(0,a)$, що породжуються A_2 -вагою $w^2(\lambda) = \|y(\lambda)\|^2$ на $\mathbb{R}$, можуть бути базисами лише одночасно. Для зручності формулювань введемо таке означення. Нагадаємо, що A^2 -вазі w^2 на дійсній осі за формулою

$$w_-(\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-i\lambda t} y_w(t)dt \ , \ \mathrm{Im}\lambda < 0$$

відповідає функція $y_w \in L_2^{loc}(\mathbb{R}_+)$. Через J_a позначимо оператор

$$(J_a f)(t) = i\int_0^t f(s)ds$$

у просторі $L_2(0,a)$. Клас операторів B, що задовольняють переліченим вище умовам I) - 3), позначається через $\Lambda^{(exp)}$.

Означення. Нехай $B \in \Lambda^{(exp)}$, $y \in \mathfrak{h}_y$. Оператор B називається (y, y_w) - подібним до оператора J_a, якщо існує такий ізоморфізм S простору $L_2(0,a)$ на $\mathfrak{h}_y$, що $BS = SJ_a$, $Sy_w = y$, де y_w відповідає певній вазі Макенхаупта w^2.

Теорема IУ.2.I. Нехай $w^2(\lambda) = \|y(\lambda)\|^2$ - вага Макенхаупта на $\mathbb{R}$, a - експоненціальний тип резольвенти оператора $B \in \Lambda^{(exp)}$, y_w - функція, що визначається вагою w^2. Тоді еквівалентні такі умови:

I) сім'я векторів (I6) утворює безумовний базис простору $\mathfrak{h}_y$;

2) оператори B та J_a (y, y_w)- подібні, і сім'я $\{ y_{1,w}(\lambda_k,t) : \lambda_k \in \Lambda \}$ утворює безумовний базис простору $L_2(0,a)$.

Оператор S, що здійснює (y, y_w)-подібність, має вигляд:

$$Sf = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, i} \int_{-\infty}^{+\infty} y(\lambda) \frac{(f, e^{i\lambda t})_{L_2(0,a)}}{w_-(\lambda)} d\lambda \ , \ f \in L_2(0,a).$$

Таким чином, якщо система векторів (I6) утворює базис абстрактного гільбертового простору, то вона ізоморфна безумовному базису простору $L_2(0,a)$, який складається із значень ядер $y_{1,w}(\lambda,t)$. Інакше кажучи, базиси із ядер, що породжуються вагами Макенхаупта на $\mathbb{R}$, мають властивість універсальності в класі базисів виду (I6).

В теоремі IУ.2.I міститься новий підхід до проблеми подібності вольтерового оператора оператору інтегрування, який грунтується на дослідженні базисних властивостей систем (I6). Цей підхід дозволяє дати простий критерій подібності операторів B та J_a, що формулюється в термінах характеристичної оператор-функції оператора B.

Розглянемо чисту внутрішню в області $\operatorname{Im}\lambda > 0$ цілу оператор-функцію

$$\Theta_B(\lambda) = I + i\lambda K^*(I-\lambda B)^{-1}K,$$

значення якої діють в просторі $\mathfrak{S}$, причому

$$2\operatorname{Im}B = KK^*, \quad K:\mathfrak{S}\to h.$$

Для зручності формулювань будемо припускати, що $\dim \operatorname{Im}B\, h < \infty$. Через $\mathbb{1}$ позначається функція, що тотожно дорівнює 1.

Теорема IУ.3.2. Нехай цілком несамоспряжений оператор $B\in\Lambda^{(exp)}$, $a=2\operatorname{Sp}\operatorname{Im}B$, $y=K\xi$. Якщо знайдеться такий вектор $\eta\in\mathfrak{S}$, що для деякого $b>0$

$$|(e^{-i\lambda a}\Theta_B(\lambda)\xi,\eta)| \geq \delta > 0, \quad \operatorname{Im}\lambda < -b,$$

то оператори B та J_a $(y,\mathbb{1})$-подібні. Навпаки, у випадку такої подібності

$$\|e^{-i\lambda a}\Theta_B(\lambda)\xi\| \geq \delta$$

в кожній області $\operatorname{Im}\lambda < -b < 0$.

Повернемося тепер до задачі про безумовну базисність сім'ї векторів (I6), враховуючи, що $y\in \operatorname{Im}B\, h$. В функціональній моделі С.-Надя-Фойаша задача про базисність має таке еквівалентне переформулювання.

Задача I. Нехай θ - ціла функція експоненціального типу, значеннями якої є лінійні оператори в просторі $\mathfrak{G}$ розмірності $n<\infty$, $\theta(0)=I$. Припустимо також, що θ внутрішня у верхній півплощині і чиста. При яких умовах на θ, вектор $\xi\in\mathfrak{G}$ та послідовність Λ сім'я

$$y(z,\lambda_k)=\frac{\theta(z)-\theta(\lambda_k)}{z-\lambda_k}\xi,\ \inf_k \operatorname{Im}\lambda_k>0,\ \lambda_k\in\Lambda$$

утворює безумовний базис простору $K_\theta=H_+^2(\mathfrak{G})\ominus\theta H_+^2(\mathfrak{G})$?

Щоб сформулювати задачу про базисність сім'ї (I6) в трикутній моделі Бродського-Лівшиця, розглянемо вектор-функцію

$$\Pi(t)=(y_1(t),y_2(t),\dots,y_n(t)),\ y_k\in L_2(0,a),\ n=\dim \operatorname{Im} B\mathfrak{h}$$

з лінійно незалежними координатами та умовою нормування

$$\Pi(t)\Pi^*(t)\overset{\text{м.в.}}{=}1,\quad 0\le t\le a$$

Позначимо через $\theta(x,\lambda)=\|\theta_{ij}(x,\lambda)\|$ розв'язок канонічної системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\theta(x,\lambda)}{dx}=i\lambda\mathcal{H}(x)\theta(x,\lambda),\ \theta(0,\lambda)=E,\ 0\le x\le a \qquad (I7)$$

з ермітіаном $\mathcal{H}(x)=\Pi^*(x)\Pi(x)$.

Задача II. При яких умовах на вектор-функцію Π, вектор $\vec{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{C}^n$ та послідовність Λ сім'я

$$y(x,\lambda_k)=\sum_{i,j=1}^{n}a_j\,y_i(x)\,\theta_{ij}(x,\lambda_k),\ \lambda_k\in\Lambda, \qquad (I8)$$

що побудована по розв'язку $\theta(x,\lambda)$ канонічної системи (I7), утворює безумовний базис простору $L_2(0,a)$?

Дослідження задач I - II спирається на загальний критерій, про який йшла мова в теоремі IУ.3.2. Сформулюємо, наприклад, розв'язок задачі II в тому випадку, коли Π кусочно абсолютно неперервна.

Теорема IУ.4.2. Нехай вектор-функція Π кусочно абсолютно неперервна на сегменті $[0,a]$, а вектор $\vec{a}\in\mathbb{C}^n$ задовольняє умові

$$\sum_{j=1}^{n} a_j y_j(0) \neq 0.$$

Тоді система (I8) утворює безумовний базис простору $L_2(0,a)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\Pi(x-0)\,\Pi^*(x+0) \neq 0$$

при всіх $x \in [0,a]$ та сім'я $\{exp(i\lambda_\kappa t):\ \lambda_\kappa \in \Lambda\}$ має цю ж властивість.

Таким чином, в дисертації були введені та за допомогою спектрального підходу досліджені біортогональні розкладання функцій по значенням ядер, що породжуються вагами Макенхаупта. Запропонований в роботі метод інтегральних оцінок норм резольвент дав змогу розв'язати ряд важливих задач математичного аналізу та теорії диференціальних рівнянь. В дисертації знайдено новий підхід до відомої проблеми подібності вольтерових операторів, який грунтується на дослідженні базисних властивостей спеціальних сімей функцій, що пов'язані з цими операторами.

ПУБЛІКАЦІЇ

I. Губреев Г.М. Спектральный анализ оператора дифференцирования и условие Макенхаупта // Докл. АН СССР. I984. Т. 278, № 5. С. I052-I056.

2. Губреев Г.М. Теорема о равномерной корректности одной задачи Коши и ее применение // Функц. анализ и его прилож. I984. Т.I8. Вып.2. С. 89 - 9I.

3. Губреев Г.М. О периодических в среднем продолжениях функций // Функц. анализ и его прилож. I986. Т. 20. Вып.I. С. 67 - 68.

4. Губреев Г.М. Обобщенные преобразования Джрбашяна и их применения//Изв. АН Арм.ССР. Математика. I986. Т.2I. №3. С. 306 - 3I0.

5. Губреев Г.М. Базисность семейств функций типа Миттаг-Леффлера, преобразования Джрбашяна и условие Макенхаупта//Функц. анализ и его прилож. 1987. Т.21. Вып.4. С. 71 - 72.

6. Губреев Г.М. Базисность семейств функций типа Миттаг-Леффлера, преобразования Джрбашяна и весовые оценки интегралов типа Коши// Изв. АН Арм ССР. Математика. 1988. Т.23. № 3. С. 237 - 269.

7. Губреев Г.М. Спектральный анализ биортогональных разложений функций в ряды экспонент// Изв. АН СССР. Серия матем. 1989. Т.53. № 6. С. 1236 - 1268.

8. Губреев Г.М. Интегральные преобразования типа Джрбашяна и интерполяция целыми функциями конечного порядка// Изв. АН Арм ССР. Математика. 1990. Т.25. №1. С. 83-90.

9. Губреев Г.М. Спектральный анализ биортогональных разложений, порождаемых весами Макенхаупта//Записки научн. семин. ЛОМИ. Исследования по линейным операторам и теории функций. 19. 1991. Т.190. С. 34-80.

10. Губреев Г.М. Об одном классе базисов гильбертовых пространств и о проблеме подобия вольтерровых операторов// Функц. анализ и его прилож. 1992. Т.26. вып. 4. С. 64 - 67.

11. Губреев Г.М. Об одном классе базисов гильбертовых пространств и о проблеме подобия диссипативных вольтерровых операторов// Матем. сборник. 1992. Т. 183. №9. С. 105 - 146.

Gubreev G.M. Spectral analysis of biortogonal expansions generated by Muchenhoupts weights.
Dissertation for a Doctor of Physics-Mathematical Sciences degree in the speciality OI.OI.OI-Mathematical Analysis, the Low Temperatures Physical-Technical Institute named after B.I.Verkin of the Academy of Sciences of the Ukraine, Kharkov, I994.
There are defended II scientific papers in which biortogonal expansions are introduced and investigated. The expansions are generated by Muchenhoupts weights. Spectral structures of different classes of non-selfadjoint operators connected with such expansions are elucidated. Essential attention is given to applications of general investigation method to solution of series of significant problems of mathematical analysis and theory of differential equations (M.M.Dzhrbashyans problem, S.G.Krein problem et al.).

Губреев Г.М. Спектральный анализ биортогональных разложений, порождаемых весами Макенхаупта.
Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности OI.OI.OI - математический анализ, Физико-технический институт низких температур им. Б.И.Веркина Академии наук Украины, Харьков, I994.
Защищается II научных работ, в которых вводятся и исследуются биортогональные разложения, порождаемые весами Макенхаупта; выясняется спектральная структура различных классов несамосопряженных операторов, связанных с такими разложениями. Значительное место уделено приложениям общего метода исследования к решению ряда важных задач математического анализа и теории дифференциальных уравнений (задача М.М.Джрбашяна, задача С.Г.Крейна и др.).

Ключові слова: безумовні базиси, ваги Макенхаупта, півгрупи операторів, функціональні моделі, несамоспряжені оператори.

Підписано до друку I.X.94р. формат 60 x 84 I/I6
Бумага тип. Печать офсетна. Тир. I20 примірників.
Зак. № 600
Одеське поліграфічне підприємство