

ОСИПЧУК Марина Володимирівна

УДК 517.9:618.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ЗА
ДОПОМОГОЮ НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ
ЛЯПУНОВА, ОПТИМІЗАЦІЯ ОЦІНОК ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Спеціальність 05.13.16 – застосування обчислювальної техніки,
математичного моделювання і математичних методів у наукових
дослідженнях

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-
математичних наук

76 31 5 01
ЛННБ України ім.В.Стефаника



00777240 (R)

Роботу виконано на кафедрі моделювання складних систем Київського національного університету ім. Тараса Шевченка.

Науковий керівник: доктор технічних наук, професор
ГАРАЩЕНКО Ф.Г.

Офіційні опоненти: доктор технічних наук ПОПАДИНЕЦЬ В.І.,
кандидат фізико-математичних наук
ВЕРЧЕНКО П.І.

Провідна установа: Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова АН
України

Захист відбудеться 29 грудня 1994 року о 14.00 на засіданні спеціалізованої ради К.068.18.10 при Київському національному університеті ім. Тараса Шевченка за адресою:

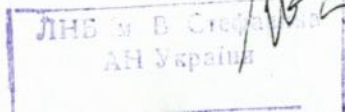
252127, м. Київ, просп. акад. Глушкова, 6,
факультет кібернетики.

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Київського національного університету ім. Тараса Шевченка (вул. Володимирська, 58).

Автореферат розіслано 28 листопада 1994 року.

Вчений секретар
спеціалізованої ради,
доктор техн. наук,
професор

БЕЙКО І.В.



ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми

В процесі математичного моделювання динамічних систем велика увага приділяється дослідженню стійкості розв'язків відносно збурень початкових умов, правих частин та параметрів. Такі дослідження є актуальними для багатьох предметних областей. При створенні теорії стійкості руху А.М.Ляпунов для систем звичайних диференціальних рівнянь запропонував загальний метод, що пов'язаний з ідеями Пуанкаре.

Більшість прикладних задач потребують досліджень технічної або практичної стійкості руху. При виконанні умови практичної стійкості збурена траєкторія буде знаходитися від незбуреної в кожен момент часу на "відстані", що не перевищує заданих обмежень. Поняття практичної стійкості було введено в результаті досліджень М.Г.Четаєва, М.М.Моїсєєва, Ж.Ла-Салля, С.Лєфшеця. Великий вклад у розвиток методів практичної стійкості був зроблений завдяки роботам Б.М.Бублика, М.Ф.Кириченка, Ф.Г.Гаращенко.

Для деяких систем існують ефективні методи побудови функцій Ляпунова. Але все ж таки, при застосуванні другого метода Ляпунова до розв'язування конкретних задач головною залишається проблема, що пов'язана з відсутністю алгоритму побудови функції Ляпунова. Дисертація є подальшим розвитком досліджень в цій галузі. Розвивається метод побудови оптимальних недиференційованих функцій Ляпунова для дослідження задач практичної стійкості, що описуються системами звичайних диференціальних рівнянь.

При розв'язуванні інженерних задач виникають, як правило, проблеми оптимізації отриманих екстремальних оцінок областей практичної стійкості. А це, в свою чергу, приводить до мінімакських траєкторних оптимізаційних задач. Останні досліджувалися у роботах Ф.Кларка, В.Ф.Дем'янова, В.М.Малозємова, В.Г.Болтянського, Р.П.Федоренка та Ф.Г.Гаращенко. Часто зустрічаються прикладні задачі з обмеженнями на фазові змінні, в яких функція керування задається в структурно-параметричному вигляді, а стан системи визначається деякою матрицею. Наприклад, в задачах керування пучком траєкторій динаміка пучка описується матричним диференціальним рівнянням Ляпунова. Для розв'язування класу таких задач, що описуються матричними диференціальними рівняннями, доречно використовувати компактне формулювання принципу макси-

муму в матричній формі. В дисертації розглядаються задачі матричної параметричної оптимізації при обмеженнях на фазові координати. Розвинуті методи застосовуються для оптимізації обвідної пучка траєкторій.

Створене алгоритмічне та програмне забезпечення орієнтовано, насамперед, для розв'язування актуальних задач оптимального проектування систем прискорення та фокусування.

Мета роботи

Мета роботи полягає в отриманні оптимальних за об'ємом оцінок для аналізу практичної стійкості руху, що описується системами звичайних диференціальних рівнянь, оптимізації даних оцінок, створенні програмного забезпечення для побудови областей практичної стійкості, застосуванні отриманих результатів для розв'язання задач оптимального проектування систем прискорення та фокусування.

Методика досліджень

Теоретичні дослідження задач практичної стійкості базуються на методі функцій Ляпунова. Оптимальні функції Ляпунова будувалися за допомогою загального інтегралу системи диференціальних рівнянь. Це вимагало широкого застосування теорії звичайних диференціальних рівнянь у проведених дослідженнях.

Використання чисельного експерименту в процесі досліджень мало суттєве значення при розробці оптимальних структур областей практичної стійкості для лінійних стаціонарних систем диференціальних рівнянь.

Для розробки алгоритмів оптимізації отриманих екстремальних оцінок використовувалися ідеї недиференційовної оптимізації Ф.Кларка, В.Ф.Дем'янова, В.М.Малозємова, В.Г.Болтянського, Р.П.Федоренка. При розв'язуванні задач керування пучками траєкторій використовувався метод структурно-параметричної оптимізації, розроблений Ф.Г.Гарашенком.

Наукова новизна

В процесі досліджень отримані наступні нові результати:

- загальні теореми практичної стійкості поширені на випадок недиференційовних функцій Ляпунова;

- на базі апарату недиференційованих функцій Ляпунова для широкого класу динамічних систем отримані критерії практичної стійкості;
- для лінійних стаціонарних систем другого порядку розроблені аналітичні оцінки оптимальних областей практичної стійкості;
- досліджені задачі мінімаксної оптимізації матричних диференціальних рівнянь при обмеженнях на фазові змінні, отримані необхідні умови оптимальності та запропоновані конкретні алгоритми розв'язування цих задач;
- на основі розроблених алгоритмів для чисельного аналізу задач практичної стійкості створено програмне забезпечення;
- отримане алгоритмічне та програмне забезпечення застосовувалось для розв'язування задач оптимізації динаміки пучків заряджених частинок.

Практична та теоретична цінність

Застосування розробленої в дисертаційній роботі методики побудови оптимальних оцінок для аналізу практичної стійкості руху, що описується системами звичайних диференціальних рівнянь, дозволило розв'язувати задачі оптимізації області захвату частинок у процес прискорення та фокусування по радіальних координатах.

Запропоновані методи мінімаксної оптимізації матричних диференціальних рівнянь при обмеженнях на фазові змінні можуть бути застосовані при проектуванні оптимальних систем прискорення та фокусування, в яких урахування радіальних коливань пучка заряджених частинок здійснюється згідно відповідного матричного диференціального рівняння Ляпунова.

Апробація роботи

Основні результати роботи доповідалися на II Всесоюзній науково-технічній конференції "Актуальні проблеми сучасного приладобудування" /Москва, 1988 р./, на Українській конференції "Моделювання та дослідження стійкості систем" /Київ, 1993 р./, на Кримській осінній математичній школі "Метод функцій Ляпунова та його застосування" /Алушта, 1993 р./, на Українській конференції "Моделювання та дослідження стійкості систем" /Київ, 1994р./, та на наукових семінарах кафедри моделювання складних

систем Київського національного університету ім. Тараса Шевченка /1993-1994 р./

Публікації

Основні результати проведених досліджень опубліковані в семи роботах [1-7].

Структура та обсяг дисертації

Дисертація складається з вступу, чотирьох глав, висновку, переліку використаної літератури та додатку. Обсяг роботи складає 130 сторінок машинописного тексту, що включає 21 малюнок. Перелік літератури налічує 111 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

У *вступі* приводиться короткий огляд літератури з питань практичної стійкості та задач оптимального керування з фазовими обмеженнями, що стосується даної роботи. Обґрунтовується актуальність теми дисертації та викладено основний зміст отриманих результатів.

В *першому розділі* розглядаються основні теореми практичної стійкості, узагальнені на випадок недиференційовної функції Ляпунова.

Перший параграф містить допоміжні відомості. Вводиться поняття загальної похідної опуклої недиференційовної функції Ляпунова в силу системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

а також в силу системи зі збуреннями $R(x, t)$ із заданої області Ω_R

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + R(x, t), \quad t \in [t_0, T]. \quad (2)$$

Незбурений рух $x(t) \equiv 0$ системи (1) називають $\{G_0, \Phi_t, t_0, T\}$ -стійким, якщо $x(t) \in \Phi_t$, $t \in [t_0, T]$ лише тільки початкові умови задовольняють співвідношенню $x(t_0) \in G_0$.

Тут Φ_t — допустима множина стану вектора $x(t)$ в момент $t \in [t_0, T]$.

Незбурений рух $x(t) \equiv 0$ системи (1) називають $\{G_0, \Phi_t, t_0, T, \Omega_R\}$ -стійким при постійно-діючих збуреннях, якщо $x(t) \in \Phi_t$, $t \in [t_0, T]$ лише тільки початкові умови і збурення задовольняють співвідношенням $x(t_0) \in G_0$, $R(x, t) \in \Omega_R$.

Для множин початкових умов

$$G_0 = G_0^p = \left\{ x: \max_{k=1, m} |\rho_k(x)| < p \right\},$$

де $\rho_k(x)$ — неперервні функції, та

$$G_0 = G_0^\lambda = \left\{ x: |\lambda_i x_i| < 1, i = \overline{1, n} \right\}$$

конкретизується поняття практичної $\{G_0^p, \Phi_t, t_0, T\}$ - та $\{\lambda_i, n, \Phi_t, t_0, T\}$ -стійкості. Причому, при розробці критеріїв для аналізу стійкості використовується принцип ускладнення як математичної моделі, так і фазових обмежень та множини початкових умов. Для цього розглядаються лінійна однорідна нестационарна система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in [t_0, T], \quad (3)$$

та лінійна система вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [t_0, T]. \quad (4)$$

В *другому параграфі* ряд основних теорем практичної стійкості узагальнено з урахуванням недиференційовності функції Ляпунова.

Теорема 2.1. Якщо для системи диференціальних рівнянь (1) знайдеться додатньо-стала функція Ляпунова $V(x, t)$, що задовольняє умовам

$$\{x: V(x, t) < 1\} \subset \Phi_t, \quad t \in [t_0, T], \quad (5)$$

$$\frac{dV}{dt} \Big|_{(1)} = \left[\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{dx}{dt} \right] + \frac{\partial V}{\partial t} \leq 0, \quad \text{при } x \in \{x: V(x, t) < 1\}, \quad t \in [t_0, T], \quad (6)$$

$$G_0 \subset \{x: V(x, t_0) < 1\}, \quad (7)$$

то незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (1) $\{G_0, \Phi, t_0, T\}$ -стійкий.

Тут під $\left[\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{dx}{dt} \right]$ розуміємо похідну за напрямком $\frac{dx}{dt}$

$$\left[\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{dx}{dt} \right] = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{V\left(x + h \frac{dx}{dt}, t\right) - V(x, t)}{h}.$$

Теорема 2.2. Якщо для системи диференціальних рівнянь (1) знайдеться додатньо-стала функція Ляпунова $V(x, t)$, яка задовольняє умовам (5), (6) теореми 2.1 і

$$\left\{ x: \max_{k=1, m} |\rho_k(x)| < p \right\} \subset \{x: V(x(t_0), t_0) < 1\}, \quad (8)$$

то незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (1) $\{G_0^p, \Phi, t_0, T\}$ -стійкий.

Показана зворотність цієї теореми, для чого побудована відповідна недиференційовна функція Ляпунова

$$V(x, t) = \max_{k=1, m} |\rho_k(\varphi(t, t_0, x))| \quad (9)$$

де $x(t_0) = \varphi(t, t_0, x)$ — загальний інтеграл системи (1).

Доведена також теорема про асимптотичну стійкість системи диференціальних рівнянь (1) при $t \geq t_0$.

В параграфі 3 досліджуються питання практичної стійкості систем диференціальних рівнянь при постійно-діючих збуреннях (2). Для такої системи доведена

Теорема 3.1. Якщо для системи диференціальних рівнянь (2) існує додатньо-означена функція Ляпунова $V(x, t)$ і $0 < \varepsilon < 1$, які задовольняють умовам

$$\{x: V(x, t) \leq 1\} \subset \Phi_\varepsilon, \quad t \in [t_0, T], \quad (10)$$

$$\frac{dV}{dt} \Big|_{(2)} = \left[\frac{\partial V}{\partial x}, f(x, t) + R(x, t) \right] + \frac{\partial V}{\partial t} \leq 0, \quad (11)$$

коли $x \in \Phi_\varepsilon \setminus \{x: V(x, t) < 1 - \varepsilon\}$, $R(x, t) \in \Omega_R$,

$$G_0 \subset \{x: V(x, t_0) < 1\}, \quad (12)$$

то незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (1) $\{G_0, \Phi_t, t_0, T, \Omega_R\}$ -стійкий.

Для лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь (4) доводиться також теорема про практичну $\{G_0^p, \Phi_t, t_0, T\}$ -стійкість при відомих $f(t)$.

В *четвертому параграфі* висвітлюються деякі питання практичної стійкості за напрямком систем звичайних диференціальних рівнянь. Для чисельної побудови оптимальних оцінок розглядаються конкретні фазові обмеження:

$$\Phi_t \equiv \Psi_t = \{x: \psi(x, t) \leq 1\}, \quad t \in [t_0, T],$$

$$\Phi_t \equiv \Gamma_t = \{x: |\gamma_s^*(t)x| \leq 1, s = \overline{1, N}\}, \quad t \in [t_0, T],$$

$$\Phi_t \equiv W_t = \{x: x^* D(t)x \leq \delta^2\}, \quad t \in [t_0, T],$$

де $\gamma_s^*(t)$ — неперервні вектор-функції розмірності n ; $\psi(x, t)$ — скалярна функція, неперервна по t разом зі своїми частинними похідними за компонентами вектора x , Ψ_t — замкнена опукла множина при будь-якому t , що містить внутрішню точку $x(t) \equiv 0$.

Наведені в даному параграфі критерії практичної стійкості за напрямком використовувались при створенні алгоритмів чисельної побудови оптимальних за об'ємом областей практичної стійкості.

Другий розділ присвячено розробці критеріїв для аналізу практичної стійкості та конструктивним алгоритмам побудови оптимальних за об'ємом областей практичної стійкості. Критерії отримані з використанням апарату недиференційовних функцій Ляпунова на базі доведених загальних теорем практичної стійкості.

В *п'ятому параграфі* розглядаються критерії стійкості лінійних систем для різних класів фазових множин Ψ_t, Γ_t, W_t . Для області практичної стійкості G_0^p справедливе

Твердження 5.1. Для того, щоб система диференціальних рівнянь (3) була $\{G_0^p, \Psi_t, t_0, T\}$ -стійкою, необхідно і достатньо, щоб виконувалось співвідношення:

$$\left\{ x: \max_{k=1, m} |\rho_k(X(t_0, t)x)| < p \right\} \subset \{x: \psi(x, t) < 1\}, \quad t \in [t_0, T], \quad (13)$$

де $X(t, t_0)$ — нормована матриця фундаментальних розв'язків системи (3).

Для деяких конкретних ρ_k можна визначити умови виконання співвідношення (13), використовуючи методи нелінійного програмування. Наприклад, наведемо достатні умови практичної стійкості, коли $\rho_k = x^* B_k x$, $k = \overline{1, m}$, де B_k — відомі, додатньо-визначені матриці розмірності $n \times n$.

Твердження 5.2. Для того, щоб система диференціальних рівнянь (3) була $\{G_0^p, \Gamma, t_0, T\}$ -стійкою, достатньо, щоб справджувалась умова:

$$\rho^2 \leq \min_{k=1, m} \min_{t \in [t_0, T]} \min_{s=1, N} |\gamma_s^* Q_k^{-1} \gamma_s|^{-1}, \quad (14)$$

де Q_k^{-1} — симетрична $n \times n$ матриця, що задовольняє матричному диференціальному рівнянню

$$\frac{dQ_k^{-1}}{dt} = A(t)Q_k^{-1} + Q_k^{-1}A^*(t), \quad Q_k^{-1}(t_0) = B_k, \quad k = \overline{1, m}. \quad (15)$$

Якщо $m = 1$, то твердження 5.2 визначає необхідну та достатню умову $\{G_0^p, \Gamma, t_0, T\}$ -стійкості.

Твердження 5.3. Для того, щоб система (3) була $\{G_0^p, \Psi, t_0, T\}$ -стійкою, достатньо, щоб виконувалась нерівність:

$$\rho^2 \leq \min_{k=1, m} \min_{t \in [t_0, T]} \min_{l \in [l, T]} \frac{(rg^*(rl, t)l)^2}{g^*(rl, t)Q_k^{-1}g(rl, t)}, \quad (16)$$

де l — довільний вектор з простору E^n , r — додатня скалярна функція, що є розв'язком рівняння $\psi(rl, t) = 1$ для будь-яких t та l , $g(rl, t) = \text{grad}_x \psi(rl, t)$.

Аналогічно записуються достатні умови $\{G_0^p, W, t_0, T\}$ -стійкості.

Також були отримані достатні оцінки практичної стійкості для множини початкових умов G_0^A та фазових обмежень Γ .

Твердження 5.5. Для того, щоб система (3) була $\{\lambda, n, \Gamma, t_0, T\}$ -стійкою, достатньо, щоб виконувалась оцінка:

$$\sum_{j=1}^n |q_{ij}(t_0)| \frac{1}{\lambda_i} \frac{1}{\lambda_j} < c^2 = \min_{t \in [t_0, T]} \min_{i=1, \dots, N} |\gamma_i^*(t) Q^{-1}(t) \gamma_i(t)|^{-1}, \quad (17)$$

де q_{ij} — елементи матриці $Q(t)$, що є розв'язком матричного диференціального рівняння

$$\frac{dQ}{dt} = -A^* Q - Q A, \quad Q(t_0) = B. \quad (18)$$

Для фазових обмежень Ψ_t доведені достатні умови практичної стійкості.

Твердження 5.6. Для того, щоб система (3) була $\{\lambda_i, n, \Psi_t, t_0, T\}$ -стійкою, достатньо щоб виконувалась умова:

$$\sum_{j=1}^n |q_{ij}(t_0)| \frac{1}{\lambda_i} \frac{1}{\lambda_j} < c^2 = \min_{t \in [t_0, T]} \min_{i(|i|=1)} \frac{(rg^*(r, t)l)^2}{g^*(r, t) Q_i^{-1} g(r, t)}. \quad (19)$$

В шостому параграфі представлені критерії практичної стійкості розв'язків відносно збурень правих частин. Твердження отримані на основі загальних теорем про практичну стійкість завдяки представленим розв'язків системи (4) у формі Коші.

У сьомому параграфі розглядаються задачі практичної стійкості нелінійних систем вигляду

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad t \in [t_0, T] \quad (20)$$

на замкнених множинах фазового простору Γ, Ψ . В фазовому просторі, що визначається повною системою лінійно-незалежних функцій з заданими властивостями, узагальнюється поняття $\{G_0, \Gamma, t_0, T\}$ - та

$\{G_0, \Psi, t_0, T\}$ -стійкості. Тоді дослідження практичної стійкості системи (20)

зводиться до визначення умов $\{G_0, \Gamma, t_0, T\}$ - та $\{G_0, \Psi, t_0, T\}$ -стійкості руху лінійних систем більш високого порядку, ніж порядок системи (20). Тут

Γ, Ψ визначають множини в новому фазовому просторі.

У восьмому параграфі розглядаються чисельні алгоритми побудови оптимальних за об'ємом областей практичної стійкості в заданих структурних формах багатогранника, еліпса, узагальненого еліпсоїда та узагальненого паралелепіпеда. При цьому точки, що визначають границю області практичної стійкості, знаходимо за до-

помогою описаних в параграфі 4 критеріїв практичної стійкості за напрямком. Знайдені точки апроксимуємо вказаними множинами, знаходячи елементи матриць, що визначають еліпсоїд, узагальнений еліпсоїд чи узагальнений паралелепіпед.

В *параграфі 9*, на основі аналізу фазових портретів лінійної стаціонарної системи, записані аналітичні формули оптимальних областей практичної стійкості для двовимірного фазового простору та лінійних фазових обмежень. Для даних систем досліджується оптимальна структура недиференційовних функцій Ляпунова. Запропоновано алгоритм побудови областей практичної стійкості в залежності від власних чисел матриці лінійної системи.

В *третьому розділі* досліджуються деякі матричні задачі параметричної оптимізації.

Параграф 10 присвячений дослідженню задач параметричної оптимізації матричних диференціальних рівнянь. Для чисельного розв'язування поставлених задач ітераційними методами записані градієнти розглянутих функціоналів за матричними параметрами, точками переключення та початковими умовами. Представлені необхідні умови оптимальності функціоналів.

В *одинадцятomu параграфі* розглядаються задачі мінімаксної параметричної оптимізації для матричного диференціального рівняння

$$\frac{dQ(t)}{dt} = F(Q(t), t, L), \quad Q(t_0) = R(B), \quad (21)$$

з фазовими обмеженнями

$$\Psi_T = \{Q(t); \psi(Q(t)) \leq 0\}. \quad (22)$$

При розв'язуванні задачі знаходження оптимальної матриці параметрів, що задовольняє мінімаксному критерію

$$I(L) = \max_{B \in D_B} \Phi(Q(T, B, L)) \rightarrow \min_{L \in D_L} \quad (23)$$

виділяється множина M^B матриць B , для яких

$$\max_{B \in M^B} \Phi(Q(T, B, L)) = I(L).$$

Припускається, що область значень параметрів D_L має властивість: для кожного $L \in D_L$ існує опуклий конус K_L з вершиною в точці L .

На базі знайдених похідних функціоналу за напрямком представлени необхідні умови оптимальності в матричній формі.

Теорема 11.1. Для того, щоб матриці параметрів L та траєкторії $Q(t)$ були оптимальними в сенсі мінімуму функціоналу $I(L)$, необхідно існування такої ненульової неперервної матричної функції $P(t)$, щоб виконувались умови:

$$1. \frac{dP(t)}{dt} = -\frac{\partial}{\partial Q} \text{tr}(F(Q(t), t, L), P^*(t)) = -\frac{\partial H(Q, P, L, t)}{\partial Q},$$

$$P(T) = -\frac{\partial \Phi(Q(T), B, L)}{\partial Q}, \quad (24)$$

де $H(Q, P, L, t)$ – функція Гамільтона;

2. Якщо для деякого оптимального L траєкторія p раз виходить на обмеження (22), то будь-яка допустима варіація δL матричного параметра L повинна задовольняти додатковим умовам

$$\text{tr}(E_{Lj}, \delta L^*) \leq 0, \quad j = \overline{1, p}, \quad (25)$$

де $E_{Lj} = \text{tr} \left(\frac{\partial \psi(Q(\tau_j))}{\partial Q(\tau_j)}, \frac{\partial Q^*(\tau_j)}{\partial L} \right)$, τ_1, \dots, τ_p – моменти виходу

траєкторії на обмеження. Співвідношення (25) визначають у матричному просторі значень D_L опуклий конус \overline{K}_L ;

3. Для будь-якого напрямку $\delta L \in K_L \cap \overline{K}_L$ і будь-якого $\overline{B} \in M_B$ варіація функціоналу

$$\int_{t_0}^T \text{tr} \left(\frac{\partial H(Q, P, L, t)}{\partial L}, \delta L^* \right) dt \leq 0. \quad (26)$$

Для розв'язування задачі мінімаксної траєкторної оптимізації

$$J(L) = \max_{t \in [t_0, T]} \Phi(Q(t), L) \rightarrow \min_{L \in D_L} \quad (27)$$

виділяється множина M точок \overline{t} , в яких

$$\max_{t \in M} \Phi(Q(\overline{t}), L) = J(L).$$

Також отримані необхідні умови оптимальності в матричній формі.

Розглянута задача мінімаксної оптимізації за початковими даними

$$I(B) = \max_{t \in [t_0, T]} \Phi(Q(t, B)) \rightarrow \min_{B \in D_B} \quad (28)$$

Область значень D_B має структуру, аналогічну до множини D_L в задачі (23).

Виділяється множина M точок \bar{t} , що задовольняють $\max_{t \in M} \Phi(Q(\bar{t}, B)) = I(B)$.

На основі проведених викладок доводяться необхідні умови оптимальності.

Теорема 11.3. Для того, щоб матриці початкових параметрів B та траєкторії $Q(t)$ були оптимальними в сенсі мінімуму функціоналу $I(B)$, необхідно існування такої ненульової неперервної матричної функції $P(t, \bar{t})$, $\bar{t} \in M$, щоб виконувались умови

$$1. \quad \frac{dP(t, \bar{t})}{dt} = - \frac{\partial (F(Q(t), t), P^*(t, \bar{t}))}{\partial Q},$$

$$P(\bar{t}, \bar{t}) = - \frac{\partial \Phi(Q(\bar{t}, B))}{\partial Q}. \quad (29)$$

2. Якщо для деякого B оптимальна траєкторія p раз виходить на обмеження (22), то будь-яка допустима варіація δB матричного параметра $B \in D_B$ повинна задовольняти додатковим умовам

$$\text{tr}(E_{B_j}, \delta B^*) \leq 0, \quad j = \bar{1}, p, \quad (30)$$

де $E_{B_j} = \text{tr} \left(\frac{\partial \psi(Q(\tau_j))}{\partial Q(t_0)}, \frac{dR^*(B)}{dB} \right)$, τ_1, \dots, τ_p — моменти виходу траєкторії

на обмеження. Співвідношення (30) визначають у матричному просторі значень опуклий конус \bar{K}_B ;

3. Для будь-якого напрямку $\delta B \in K_B \cap \bar{K}_B$ та будь-якого $\bar{t} \in M$ варіація функціоналу

$$\text{tr} \left(\frac{\partial H(P, B, t_0, \vec{t})}{\partial B}, \delta B^* \right) \leq 0, \quad (31)$$

де $H(P, B, t_0, \vec{t})$ — функція Гамільтона, обчислена в початковий момент часу.

Для чисельного розв'язування оптимізаційних задач використовується ітераційний метод.

Такий підхід був застосований для розв'язування задач оптимізації областей практичної стійкості, досліджених у *дванадцятomu параграфі*. При цьому динаміка системи описується матричним диференціальним рівнянням Ляпунова. Для таких задач також записані необхідні умови оптимальності.

Опису програмного забезпечення для розв'язування задач практичної стійкості та його застосуванню у прикладних задачах присвячено **четвертий розділ**.

В *тринадцятому параграфі* описано пакет програм **Direction**, що реалізує розрахунок оптимальних областей практичної стійкості на базі критеріїв стійкості за напрямком. *Пункт 13.1* включає опис програми побудови таких областей для лінійних стаціонарних систем. При розрахунках квазіоптимальних областей практичної стійкості для лінійних нестационарних систем виникає необхідність в інтерпретації введених з екрана правих частин системи диференціальних рівнянь. В *пункті 13.2* описано модифікований модуль розпізнавання елементарних функцій та операцій. *Пункт 13.3* включає аналіз роботи програми **Direction** в залежності від інтегральних кривих стаціонарної системи. Такий аналіз був доцільним при побудові аналітичних формул оптимальних областей практичної стійкості наведеної системи, що розглядаються в параграфі 9.

Для розрахунку областей практичної стійкості в заданих структурних формах використовувався масив граничних точок стійкості за напрямком, отриманий в процесі роботи програми **Direction**. Згідно алгоритмів, які описані в параграфі 8, будувалися області стійкості у вигляді еліпса, узагальненого еліпсоїда та узагальненого паралелепіпеда. Створене програмне забезпечення описано в *параграфі 14*.

Алгоритм, описаний в параграфі 9, був реалізований для створення пакету програм побудови оптимальних областей практичної

стійкості з урахуванням їх структури. Програмне забезпечення для таких розрахунків описано в *параграфі 15*.

Викладені результати застосовувались при розв'язуванні задачі оптимізації області захвату частинок у процес прискорення та фокусування за радіальними координатами. В *останньому параграфі* розглядається задача побудови оптимальної оцінки області захвату. *Пункт 16.1* включає опис рівнянь руху іонів у прискорюючій та фокуруючій системах. Задача розрахунку оптимальної за об'ємом області захвату частинок в процес прискорення за постановкою співпадає з задачею побудови екстремальної за об'ємом множини практичної стійкості. В *пункті 16.2* для розв'язування задачі оптимального захвату частинок застосовуються розроблені в другому розділі критерії. В *пункті 16.3* описане в попередніх параграфах програмне забезпечення застосовується для розрахунку множини захвату частинок в процес прискорення. Граничні точки області захвату обчислюємо за допомогою методу практичної стійкості за напрямком. Побудову області в заданих структурах багатогранника, еліпса, узагальненого еліпсоїда або узагальненого паралелепіпеда реалізуємо, використовуючи описані в параграфах 13 та 14 програмні модулі.

В *додатку* наводяться малюнки оптимальних областей практичної стійкості для різних фазових обмежень, отримані в процесі реалізації чисельного експерименту.

ОСНОВНІ ВИСНОВКИ РОБОТИ

1. Узагальнені основні теореми практичної стійкості на випадок недиференційованих функцій Ляпунова.
2. На основі теоретичних досліджень для широкого класу динамічних систем отримані критерії практичної стійкості.
3. Для лінійних стаціонарних систем другого порядку досліджена структура та розроблені аналітичні формули для побудови оптимальних областей практичної стійкості.
4. Досліджені задачі мінімаксної оптимізації матричних диференціальних рівнянь при обмеженнях на фазові змінні. Отримані необхідні умови оптимальності та запропоновані конкретні алгоритми розв'язування цих задач. Розвинуті в даній роботі методи застосовуються для оптимізації динаміки пучка тректорій, що описується матричним диференціальним рівнянням Ляпунова.

5. Для чисельного розв'язування задач практичної стійкості створене програмне забезпечення.

6. Отримані в роботі результати застосовувались при розв'язуванні задач оптимізації області захвату частинок у процес прискорення та фокусування за радіальними координатами.

Роботи автора за темою дисертації

1. Матвиенко В.Т., Осипчук М.В. О конструировании малочувствительных регуляторов и построении максимальных по объему областей практической устойчивости. — В кн.: Актуальные проблемы современного приборостроения. Сборник тезисов докладов II Всесоюзной научно-технической конференции. Москва, 1988г. с.18.

2. Garaschenko F.G., Osipchuk M.V. On estimation of the stability areas with maximal volume. — В кн.: Украинская конференция: Моделирование и исследование устойчивости систем. Киев, 1993, Ч. II с.72-73.

3. Осипчук М. В. Оценка оптимальных областей практической устойчивости с помощью недифференцируемых функций Ляпунова. — В кн.: Метод функций Ляпунова и его приложения. Крымская осенняя математическая школа. Алушта, 1993. с.44.

4. Осипчук М. В. Использование недифференцируемых функций Ляпунова для анализа задач практической устойчивости. — В кн.: Украинская конференция: Моделирование и исследование устойчивости систем. Киев, 1994. с.100.

5. Осипчук М.В. Исследование задач практической устойчивости с помощью недифференцируемых функций Ляпунова. Деп. в УкрИНТЭИ 21.07.92 #1111-Ук92. 11 с.

6. Осипчук М.В. Дослідження задач практичної стійкості за допомогою недиференційовних функцій Ляпунова. Вісник Київського університету. Моделювання і оптимізація складних систем. 1993. №1, с. 102-110.

7. Гарашенко Ф.Г., Куценко И.А., Осипчук М.В. Оптимальное проектирование систем ускорения и фокусировки на основе дискретных математических моделей. Сб.: Кибернетика и вычислительная техника. Дискретные системы управления. 1994. вып. 101, с.89-105.

Осипчук М.В.

Исследования задач практической устойчивости с помощью недифференцируемых функций Ляпунова, оптимизация оценок и их применение. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.16-Применение вычислительной техники, математического моделирования и математических методов в научных исследованиях. Киевский национальный университет, Киев. 1994.

Диссертация содержит сведения, нашедшие отражение в семи опубликованных работах автора. Основными результатами диссертации являются критерии практической устойчивости, полученные на основе аппарата недифференцируемых функций Ляпунова, аналитические оценки оптимальных областей практической устойчивости для линейных стационарных систем второго порядка. Для задач минимаксной оптимизации матричных дифференциальных уравнений при ограничениях на фазовые переменные получены необходимые условия оптимальности и предложены алгоритмы решения.

Разработанное алгоритмическое и программное обеспечение применялось для решения задач оптимизации динамики пучков заряженных частиц.

Marina Osipchuk

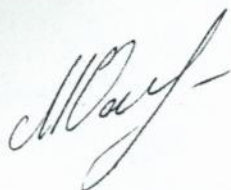
The Practical Stability Problem Investigations by means of Nonsmooth Liapunov Functions, Estimate Optimization and their Application. Manuscript. Thesis for a degree of Candidate of Science (Ph.D.) in Physics and Mathematics, speciality 05.13.16 Application of Computers, Mathematical Modelling and Mathematical Methods in Research. Kiev National University, Kiev. 1994.

The thesis contains of information published in the seven author's papers. The main results achieved are the practical stability criteria delivered on the basis of nonsmooth Liapunov function apparatus, the analytical estimations of the optimal practical stability areas for second order linear steadystate systems. The necessary optimality conditions are received for the minimax optimization problem of matrix differential equations with constraints on phase variables. The solution algorithms are suggested. The developed algorithms and software were used for the solution of the charged particle beam dynamic optimization problem.

Ключові слова

задачі практичної стійкості недиференційовна оптимізація
недиференційовні функції Ляпунова

Автор висловлює щирю подяку своєму науковому керівнику професору Ф.Г.Гаращенку за постановку задачі та постійну увагу до роботи.



Підписано до друку 23.11.94. Формат 60x84/16. Папір друк № 2.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 1,16. Ум. фарбо-відб. 1,6. Обл. -вид. арк. 0,85
Тираж 100 прим. Зам 205.

Поліграфічна дільниця ІТФ ім. М.М. Боголюбова АН України

1155301

