ДОНЕЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

На правах рукопису

КРАВЦОВ Олександр Михайлович

УДК 539.3

ДОВІЛЬНІ ТА ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ОДНОЗВ'ЯЗНИХ ТА ДВУЗВ'ЯЗНИХ ПЛАСТИНОК ТА ОБОЛОНОК

01.02.04 - механіка деформівного твердого тіла

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Донецьк - 1994

Роботу виконано в Донецькому державному університеті

Науковий керівник - академік НАН України КОСМОДАМІАНСЬКИЙ О.С.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук ФІЛЬШТІНСЬКИЙ Л.А.

- кандидат фізико-математичних наук ЛОЖКІН В.М.

Провідна установа - Інститут проблем машинобудування Академії Наук України.

Захист відбудеться "26" січня 1995 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої ради К 068.06.03 в Донецькому державному університеті за адресою: 340055, Донецьк-55, вул.Університетська, 24, ДонДУ, Гол. корп.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Донецького державного університету.

Автореферат розіслано "20" грудня 1994 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради МИСОВСЬКИЙ Ю.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Вивчення процесів деформування конструкцій та їх елементів під дією навантажень, що мають коливальний характер, подальший розвиток приборобудування, створення нових машин та механізмів із необхідністю вимагають розвитку математичних методів дослідження напружно-деформівного стану пружних тіл та створення нових прикладних методик дослідження частотних характеристик елементів конструкцій у вигляді пластинок та оболонок.

Як правило, аналітичні методи, являючи собою найбільш ефективний засіб вивчення характеристик напружно-деформівного стану пружних тіл, дозволяють отримувати рішення із заданою точністю.

До таких методів можно віднести метод малого параметру, методи теорії функцій комплексної змінної, методи алгебри та інші.

Метою роботи є розробка єдиного підходу до розв'язання задач про повздовжні та згинні коливання пластинок та оболонок. Запропонований підхід, що його ефективно реалізовано як для кругових, так і для некругових областей, базується на використанні методу малого параметра, теорії розгалуженого дробу, методів конформних відображень.

Наукова новизна результатів :

- із допомогою єдиного підходу розкладання різних шуканих величин по малому параметру вирішено задачі про повздовжні коливання пластинок та згинні коливання тонких плит і пологих панелів;
- для згинних коливань тонких плит отримано формули для оцінок перших власних частот и залишкових членів в розкладаннях шуканих функцій по частотному параметру;
- запропоновано методику побудови спрощених конформних відображень;
- отримано аналітичні залежності першої власної частоти коливань для кругових у плані пологих сферичної, циліндричної та псевдосферичної панелів від параметрів, характеризуючих їхні кривини.

Вірогідність отриманих у работі результатів забезпечується строгістю математичної постановки кожної задачі та її розв'язку, порівнянням з результатами, отриманими раніше іншими методами, погодженістю результатів поміж собою, їх відповідністю міркуванням фізичного змісту задач, що розглядаються.

На захист виносяться:

1. Постановка задач про коливання тонких пластинок, плит та пологих панелів, а також розробка єдиної методики їх розв'язку.

2. Оцінка перших власних частот та залишкових членів в розкладаннях по частотному параметру.

3. Методика побудови спрощених конформних відображень.

4. Подовження розкладань по частотному параметру за границю кругу збіжності із допомогою цепного дробу.

Практична цінність роботи. На основі запропонованих методик можно досліджувати напружено-деформівний стан пластинок, тонких плит та пологих панелів при їх коливаннях, визначати критичні значення їх динамічних та геометричних характеристик.

На базі запропонованих підходів збудовано ефективні алгоритми, які припускають їх використання як компонентів САПРів для конструкторів та дослідників в НДІ та КБ, які займаються розрахунками конструкцій, що містять як елементи пластинки, плити та панелі.

Частину результатів дисертації було використано в НДР "Дослідження термодинамічного та електропружного деформування многозв'язних анізотропних пластинок та оболонок із ускладненими геометрічними та фізико-механічними властивостями"(1993,1994 р.; держ.реєстрація № 0193v041487). Описані в работі алгоритми реалізовано у вигляді програм, функціонуючих в середовищі пакету MATLAB та використовуються в рамках теми.

Апробація роботи. Основні результати роботи доповідалися та обговорювались на науково-технічній конференції молодих вчених і спеціалистів (Харків, 1990), на семінарах кафедри теорії пружності та обчислювальної математики, кафедри теоретичної та прикладної механіки Донецького державного університету та лабораторії прикладної механіки суцільного середовища Інституту прикладної математики та механіки НАН України під керівництвом академіка НАН України О.С.Космодаміанського (1986-1994).

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано 5 статей

[1-5].

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, трьох розділів, висновків, списку літератури (127 найменувань). Дисертацію викладено на 132 сторінках машинописного тексту; вона містить 20 рисунків.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі дано стислий огляд виконаних за темою дисертації досліджень, обгрунтовано актуальність роботи, сформульовано її ціль та приведено стислий її виклад. Відзначено, що сучасні досягнення в області вивчення напружено-деформівного стану пластинок та панелів при їх динамічних завантаженнях внесли великий вклад Александрович О.І., Аміро І.Я., Бабешко В.В., Бабич І.Ю., Болотін В.В., Власов В.З., Вольмір О.С., Воробьев Ю.С., Воровіч І.І., Гольденвейзер А.Л., Григолюк Э.І., Гузь О.М., Заруцький В.О., Ішлінський О.Ю., Каюк Я.Ф., Колтунов М.О., Космодаміанський О.С., Курпа Л.В., Лехніцкій С.Г., Лізарев О.Д., Огібалов П.М., Преображенський І.М., Пшенічнов Г.І., Рвачев В.Л., Сторожев В.І., Тимошенко С.П., Філіппов А.П., Фільштінський Л.А., Чехов В.М., Шульга М.О., Libai A., Rosen A., Wozniak Cz. та інші.

У першому розділі наведено основні співвідношення та рівняння коливань для тонких пластинок, а також плит та пологих оболонок в рамках гіпотез Кірхгофа-Лява, викладено методику рішення задачи про продольні коливання пластинки.

У першому параграфі розглянуто пластинку та пологу оболонку, які здійснюють гармонійні коливання із частотою ω. Для переміщень, углів повороту та напружень введено следуючі уявлення:

$$u_j=\tilde{u}_j(x_1,x_2)\cdot exp(i\omega t),\quad \phi_j=\tilde{\phi}_j(x_1,x_2)\cdot exp(i\omega t),$$
$$N_{ij}=\tilde{N}_{ij}(x_1,x_2)\cdot exp(i\omega t),\quad M_{ij}=\tilde{M}_{ij}(x_1,x_2)\cdot exp(i\omega t). \qquad (1)$$

Тут величини з "$\sim$" являють собой амплітудні характеристики перемещень, углів повороту, моментів та напружень.

Рівняння коливань, записані для амплітудних характеристик, набувають вигляду :

$$N_{11,1}+N_{12,2}=\rho h\omega^2 u_1, \qquad N_{12,1}+N_{22,2}=\rho h\omega^2 u_2, \qquad (2)$$

$$N_{13,1}+N_{23,2}=\rho h\omega^2 u_3,\ M_{11,1}+M_{12,2}=N_{13},\ M_{12,1}+M_{22,2}=N_{23}.$$

У випадку тонких пластинок система (2) ділиться. При цьому перші два рівняння описують повздовжні, а інші три – їх згинні коливання.

У другому параграфі розглянуто випадок плоских гармонійних коливань.

Для ізотропного тіла, що має пружні сталі Ламе λ та μ, рівняння плоских коливань, записані у переміщеннях, набувають вигляд:

$$L_{11}u_1+L_{12}u_2=0, \qquad L_{21}u_1+L_{22}u_2=0, \qquad (3)$$

де L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22} – диференційні оператори:

$$L_{11}=(\lambda+2\mu)\partial_1^2+\mu\partial_2^2+\rho\omega^2,\ L_{12}=L_{21}=(\lambda+\mu)\partial_1\partial_2, \qquad (4)$$

$$L_{22}=\mu\partial_1^2+(\lambda+2\mu)\partial_2^2+\rho\omega^2,\ \partial_j=\frac{\partial}{\partial x_j}\ (\ j=1,\ 2\ ),$$

ρ – щільність материалу пластинки.

Замість дійсних зміщень u_1 та u_2 введено комплексні функції:

$$U=(u_1+iu_2),\ \bar{U}=(u_1-iu_2). \qquad (5)$$

Оператори L_1 та L_2 набувають вигляду

$$L_1=\frac{1}{2}d((\lambda+\mu)d+(\lambda+3\mu)\bar{d}),\quad L_2=\frac{1}{2}d(-(\lambda+\mu)d+(\lambda+3\mu)\bar{d}), \qquad (6)$$

де d, $\bar{d}$ оператори Колосова:

$$d=\partial_1+i\partial_2,\ \bar{d}=\partial_1\ \ i\partial_2. \qquad (7)$$

При врахуванні виразів (5) та (6) вихідна система (3) записується у вигляді одного комплексного рівняння:

$$\frac{1}{2}\, d((\lambda + 3\mu) d\bar{U} + (\lambda + \mu) d\bar{U}) + \rho\omega^2 U = 0. \qquad (8)$$

Для побудови наближеного розв'язку рівняння (8) використано метод малого параметру. Величина $\varepsilon = \rho\omega^2 / G_0$, де $G_0 = (\lambda + \mu)/2$, рахується малою. Функції зміщень U та $\bar{U}$ надаються рядами по по ступенях параметру ε:

$$U = \sum_{i=0}^{\infty} U_i\, \varepsilon^i. \qquad \bar{U} = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{U}_i\, \varepsilon^i. \qquad (9)$$

Рівняння для знаходження функції U приведено до вигляду

$$d(\text{æ} d\bar{U} + d\bar{U}) = F. \qquad (10)$$

Тут $\text{æ} = \dfrac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$, а F відображує праві частини системи (10).

Загальне рішення однородного рівняння (10) має вигляд:

$$U^{(0)}(z,\bar{z}) = \text{æ}\, \varphi(z) - z \cdot \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \qquad (11)$$

Тут $\varphi(z)$, $\psi(z)$ - комплексні потенціали, аналітичні в області, яку займає срединна площина пластинки.

Часткове рішення рівняння (10) може бути знайдено у вигляді:

$$U^{(1)}(z,\bar{z}) = \frac{1}{4(\text{æ}^2 - 1)} \int \left[\text{æ} \int F d\bar{z} - \int \bar{F} dz\right] dz. \qquad (12)$$

Якщо на границі пластинки задано умови для переміщень, то комплексні потенціали знаходяться із слідуючих граничних умов:

$$\text{æ}\varphi(t) - t \cdot \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} + U^{(1)}(t,\bar{t}) = 2\mu(u_1^* + i u_2^*). \qquad (13)$$

Тут t, $\bar{t}$ - контурні значення змінних z та $\bar{z}$, u_1^*, u_2^* - задані граничні значення переміщень.

Коли на границі області задаються напруження, то граничні умови для знаходження комплексних потенціалів $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ можно записати так:

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t), \tag{14}$$

де $f(t)$ відображає дію зовнішніх зусиль.

У третьому параграфі розглянуто задачу про плоскі коливання кільцевої пластинки, один із контурів якої жорстко защемлено, а на другому прикладено пульсуючий тиск.

Отримано аналітичні вирази для перших п'яти наближень.

Приведено порівняння наближеного та точного розв'язку, записаного через циліндричні функції, зроблено висновки про ефективність розглянутого підходу. Результати представлено у вигляді графіків.

<u>У другій главі</u> розглянуто вимушені згині коливання тонких плит, що мають у плані як кругову, так і криволинійну границю.

У першому параграфі розглянуто метод наближеного інтегрування рівнянь динаміки тонких плит.

Рівняння, яке вирішується в переміщеннях має вигляд:

$$\Delta\Delta u_3 = \Omega^2 u_3 + 16Q, \tag{15}$$

Тут $Q = \dfrac{qd^4}{16hD}$ - нормірована примушуюча сила, $\Omega^2 = \dfrac{\rho h d^4 \omega^2}{D}$ нормірована частота коливань. Вона рахується малою величиною.

В (15) прогин плити u_3 уявляється рядом по малому параметру $\dfrac{\Omega^2}{16}$:

$$u_3 = w_0 + \left[\frac{\Omega}{4}\right]^2 w_1 + \left[\frac{\Omega}{4}\right]^4 w_2 + \left[\frac{\Omega}{4}\right]^6 w_3 + \dots \tag{16}$$

Складники w_j $(j=0,1,2,\dots)$ знаходяться при інтегруванні рівнянь :

$$\Delta\Delta w_0 = 16Q_0, \quad \Delta\Delta w_p = 16w_{p-1} \ (\ p > 1\ ). \tag{17}$$

У другому параграфі розглянуто задачу про коливання ізотропної пластинки під дією центральної скупченої пульсуючої сили.

Побудовано 8 наближень для прогину, моментів та перерізуючих сил.

Записано наближення для першої та другої власних частот.

На графіках представлено наближення першої та другої власних частот. Приведено максимальні значення залишкових членів для різних значень частоти. Зроблено висновки про ефективність запропонованої методики.

У третьому параграфі розглянуто питання про знаходження власних частот коливань, надано оцінки залишкових членів рядів розкладань для повздовжних та поперечних коливань.

В четвертому параграфі запропоновано нову методику побудування конформних відображень для многокутних областей. Показано ефективність використання сигма-множників та теорії цепного дробу.

В п'ятому параграфі розглянуто рішення задачі про згинні коливання криволинійної плити. При цьому використовується отримана раніше методика побудування конформного відображення поліноміального типу.

У шостому параграфі наведено рішення задачі про згинні коливання квадратної пластинки із закругленими кутами. В явному вигляді отримано значення коефіцієнтів для комплексних потенціалів.

Із використанням запропонованої в работі методики розраховано наближення для першої власної частоти, дано порівняння із результатами, що їх отримано за методом Релея-Рітца.

<u>В третій главі</u> розглянуто задачі коливання пологих оболонок.

В першому параграфі викладено методику приблизного інтегрування рівнянь для вимушених коливань пологих ізотропних оболонок. У випадку сталих коливань система рівнянь, що її розв'язується, має вигляд

$$\Delta\Delta w = k_0 TF + \Omega^2 w + 16Q_0, \quad \Delta\Delta F = -k_0 Tw. \tag{18}$$

Тут $\Omega^2 = \rho\omega^2 h a^4 D^{-1}$ – приведена частота коливань, ω – кругова частота коливань, $Q^* = Q_0 exp(-i\omega t)$, $w^* = w(\xi_1, \xi_2) exp(-i\omega t)$, $F^* = F(\xi_1, \xi_2)\ exp(-i\omega t)$.

Розв'язок системи (20), при використанні методу послідовних наближень, надано у вигляді

$$F = F_0(\xi_1,\xi_2) + F_1(\xi_1,\xi_2) + F_2(\xi_1,\xi_2) + \ldots; \tag{19}$$

$$w = w_0(\xi_1,\xi_2) + w_1(\xi_1,\xi_2) + w_2(\xi_1,\xi_2) + \ldots .$$

Складові уявлень (19) знаходяться із рівнянь

$$\Delta\Delta w_0 = 16 Q_0, \ \Delta\Delta F_0 = 0;$$
$$\Delta\Delta w_p = k_0 T F_{p-1} + \Omega^2 w_{p-1}, \qquad \Delta\Delta F_p = -k_0 T w_{p-1}. \tag{20}$$

Розв'язок системи (20) будується із використанням теорії функцій комплексної змінної. Невідомі, які входять в потенціали, знаходяться із граничних умов.

В другому параграфі розглянуто питання про побудову аналітичного подовження функції по частотному параметру. Запропонована методика базується на використанні аппарату g - дробу.

Для оболонки, з урахуванням трьох наближень, відрізок ряду Тейлора має вид :

$$w = w_{00} + w_{10}\left(\frac{\Omega}{4}\right)^2 + w_{01}\left(\frac{k}{4}\right)^2 + w_{20}\left(\frac{\Omega}{4}\right)^4 + w_{11}\left(\frac{\Omega}{4}\right)^2\left(\frac{k}{4}\right)^2 + w_{02}\left(\frac{k}{4}\right)^4 + \ldots . \tag{21}$$

Відповідне уявлення у вигляді цепного дробу отримається таким

$$w = w_{00} + \frac{\left(\frac{\Omega}{4}\right)^2}{\frac{1}{w_{10}} - \frac{w_{20}}{w_{10}^2}\left(\frac{\Omega}{4}\right)^2 - \frac{w_{11}}{2w_{10}^2}\left(\frac{k}{4}\right)^2} + \frac{\left(\frac{k}{4}\right)^2}{\frac{1}{w_{01}} - \frac{w_{11}}{w_{01}^2}\left(\frac{\Omega}{4}\right)^2 - \frac{w_{02}}{2w_{01}^2}\left(\frac{k}{4}\right)^2}. \tag{22}$$

Отримано узагальнення для функції двох змінних.

Як приклад, розглянуто випадки круглої жорстко защемленої пластинки та циліндричної панелі.

Наведено кількістний та якістний аналіз отриманих результатів.

У завершенні наведено основні результати та зроблено висновки, що вибігають із їх аналізу:

1. Метод малого параметру одноманітно розвинуто на клас задач про повздовжні та поперечні коливання пластинок і оболонок.

2. Отримано формули для оцінок перших власних частот та залишкових членів у розкладаннях шуканих функцій по частотному параметру.

3. Із використанням σ-множників запропоновано методику побудування спрощених конформних відображень поліноміального типу.

4. Отримано аналітичні залежності першої власної частоти коливань для кругових у плані пологої сферичної, циліндричної та псевдосферичної панелів від параметрів, що характеризують їхні кривини.

5. На основі апарату цепного дробу реалізовано підхід, який дозволяє будувати аналітичні подовження по частотному параметру за границю кола збіжності.

6. Проведені дослідження дозволяють зробити висновки кількістного та якістного характеру:

- метод малого параметру достатньо ефективний при розв'язку задач про коливання пластинок із криволинійними границями;
- використання подовження по частотному параметру дозволяє розглядати напружено-деформований стан пружних пластинок для значень частоти, які лежать поза колом збіжності;
- при дослідженні напружено-деформованого стану та знаходженні власних частот в задачах про повздовжні та згині коливання пластинок і панелів, які розв'язуються методами малого параметру та послідовних наближень, важним фактором є кількість додатків, які треба утримувати в розкладаннях: обмеженість двома наближеннями приведе до суттєвої похибки;
- метод послідовних наближень дозволяє ефективно розв'зувати задачі про коливання пологих оболонок.

Основний зміст та результаты работы відображено в таких публикаціях:

1. Гофман М.Н., Космодамианский А.С., Кравцов А.М. Продольные колебания составной изотропной пластинки // Теорет. и прикл. механика.-1989.-вып.20.-С.63-67
2. Космодамианский А.С., Кравцов А.М., Прийменко С.А. Изгибные колебания предварительно напряженных изотропных плит//Теорет. и прикл. механика.-1992.-вып.23.-С.75-78.
3. Космодамианский А.С., Кравцов А.М., Прийменко С.А. Об улучшении сходимости решений задач теории упругих колебаний, решаемых методом малого параметра//Доклады АН УССР, Физ.-мат. и техн. науки.-1991.-№8.-С.83-84. 4.
4. Кравцов А.М., Прийменко С.А. Колебания и импульсные нагружения деталей и конструкционных элементов в виде пластин и оболочек // материалы XVII научнотехнической конференции молодых ученых и специалистов, Ин-т пробл. машиностроения АН Украины, Харьков.-1990.-С.22
5. Кравцов А.М., Прийменко С.А. Методы возмущения в задачах динамики пластин и оболочек // материалы XVII научно-технической конференции молодых ученых и специалистов, Ин-т пробл. машиностроения АН Украины, Харьков.-1990.-С.24

Подп. в печать 16.12.94г. Формат 60х84/16. Бум.тип.№
Усл.печ.л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ № 845. Бесплатно.

Р-т ин-та "Донецкий Стройпроект". 340114, г.Донецк,
ул.Университетская, 80.