НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

БОБРИК Роман Васильович

ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ ПІД ДІЄЮ ШВИДКОЗМІННИХ ВИПАДКОВИХ ЗБУРЕНЬ

01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ • 1994

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача АН України.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук,
доцент БОНДАРЄВ Б.В.,

доктор фізико-математичних наук,
професор ТУРБІН А.Ф.,

доктор фізико-математичних наук,
професор ШАРКОВ Є.Ф.

Провідна установа: Київський політехнічний інститут.

Захист відбудеться "28" лютого 1995 р. о 14 год. на засіданні спеціалізованої ради Д 01.66.01 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601 Київ 4, ГСП, вул.Терещенківська,3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інституту.

Автореферат розісланий "20" січня 1995 р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фізико-математичних
наук

ГУСАК Д.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Динамічні системи з випадковими збуреннями є тим розділом теорії випадкових процесів, який починаючи з відомої роботи П.Ланжевена (1908 р.) по теорії броунівського руху, привертає неослабну увагу як математиків, так і фізиків. Хоч вони і більш підходять для математичного моделювання реальних динамічних процесів в порівнянні з детермінованими динамічними системами, їхній аналіз є набагато складнішим. Він дещо спрощується при припущенні, що випадкове збурення, як випадковий процес, в різні моменти часу є незалежним. Саме таке збурення і розглядав П.Ланжевен. Спроба здійснити математично коректне трактування таких моделей і привела на початку 40-х років до створення теорії стохастичних диференціальних рівнянь в роботах Й.І.Гіхмана, К.Іто. На даний час ця теорія і її відгалуження є одним із найбільш важливих розділів теорії випадкових процесів.

Звичайно, припущення незалежності випадкового збурення в різні моменти часу є досить сильною ідеалізацією реальних збурень. Більш реальним є припущення про швидкозмінність (слабку залежність) випадкового збурення. Мабуть першою роботою, де розглядались динамічні системи з такого виду збуреннями, була відома робота М.М.Боголюбова і М.М.Крилова (1939 р.). На основі теорії збурень, там для наближеного опису таких систем були отримані рівняння Колмогорова (Колмогорова-Фоккера-Планка). Отримані ними результати не були достатньо строго обгрунтованими. З того часу багато дослідників займались цим обгрунтуванням, зокрема Й.І.Гіхман, Р.З.Хасьмінський, А.В.Скороход, Г.Папаніколау та інші.
При цьому застосовувались як методи дослідження збіжності слабко залежних випадкових величин, так і мартингальні методи.

Мета роботи полягає в розробці та обгрунтуванні нового підходу до аналізу динамічних систем з швидкозмінними випадковими збуреннями, який полягає в дослідженні, безпосередньо зв'язаних з ними, деяких безмежних ланцюжків детермінованих інтегро-диференціальних рівнянь та проблеми замикання для них.

Наукова новизна роботи полягає:

- в обгрунтуванні, так званого, безкумулянтного замикання безмежних ланцюжків рівнянь для тих чи інших ймовірнісних характеристик динамічних систем з гауссівськими швидкозмінними збуреннями, та отриманні, на цій основі, оцінок для похибок різних відомих наближень;
- в отриманні асимптотичних розкладів для моментів розв'язків лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь як з швидкими, так і з швидкими та великими випадковими збуреннями;
- в дослідженні стійкості в середньому квадратичному для лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь з гауссівськими коефіцієнтами;
- в дослідженні можливості стабілізації нестійких лінійних систем звичайних детермінованих диференціальних рівнянь за допомогою гауссівських центрованих збурень їх коефіцієнтів;
- в отриманні вищих наближень для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь з гаусівськими швидкозмінними параметрами і в побудові відповідних асимптотичних розкладів;
- в розробці асимптотичного методу для аналізу моментів розв'язку нестаціонарного рівняння Шредінгера з випадковим швидкозмінним потенціалом, що є важливим в теорії поширення коротких хвиль в випадково-неоднорідних середовищах.

Методика дослідження. В роботі використовуються сучасні методи теорії випадкових процесів, диференціальних рівнянь, функціонального аналізу. Серцевиною роботи є застосування, так званих, формул інтегрування частинами по ймовірнісних мірах, що відповідають випадковим збуренням. Для дослідження проблеми замикання безмежних ланцюжків інтегро-диференціальних рівнянь використовуються деякі результати з аналітичної теорії ланцюгових дробів, а також з теорії систем лінійних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу. При дослідженні стійкості використовуються методи лінійної алгебри.

Наукова та практична цінність роботи. Робота має теоретичний характер і її результати сформульовані у вигляді теорем. Розробле ні методи дають ефективні алгоритми для побудови як вищих наближень для динамічних систем з швидкозмінними збуреннями, так і для побудови асимптотичних розкладів. Отримані результати відносно стійкості для динамічних систем з випадковими параметрами ставлять під сумнів часто висловлюване твердження, що випадкові збурення погіршують стійкість динамічної системи.

Результати дисертації можуть також бути використані при дослідженні поширення коротких хвиль в випадково-неоднорідних середовищах. Для основного в цій теорії, так званого, наближення марковського процесу, вони дають можливість ефективно здійснювати його корекцію, зв'язану із відмінністю від нуля радіуса кореляції неоднорідностей середовища.

Апробація роботи. Результати роботи доповідались:

- на V Вільнюській міжнародній конференції з теорії ймовірностей та математичної статистики (Вільнюс, 1989 р.);
- на VI Радянсько-японському симпозіумі з теорії ймовірностей та математичної статистики (Київ, 1991 р.);
- на семінарі з теорії ймовірностей при Інституті математики НАН України (кер. акад.НАН України В.С.Королюк, 1984, 1987 рр.);
- на семінарі з ймовірнісних розподілів в нескінченновимірних просторах при Інституті математики НАН України (кер. акад.НАН України Ю.Л.Далецький, акад.НАН України А.В.Скороход, 1987 р.);
- на семінарі з випадкових операторів та середовищ при кафедрі теорії ймовірностей Московського держуніверситету (кер. проф. С.О.Молчанов, проф. В.М.Тутубалін, 1988 р.);
- на семінарі проф. Р.З.Хасьмінського при Інституті проблем передачі інформації АН Росії (1988 р.);
- на семінарі з випадкових процесів при Інституті математики Польської Академії наук (кер. проф.С.Забчик, Варшава,1992 р.);
- на семінарі відділу теорії поширення хвиль в атмосфері Інституту фізики атмосфери АН Росії (кер. чл.-кор. АН Росії В.І.Татарський, 1984 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах автора [1-15].

Структура та об'єм роботи. Дисертація складається з вступу, п'яти глав та списку цитованої літератури, що нараховує 125 найменувань. Повний об'єм роботи - 268 сторінок машинописного тексту.

ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі наведений короткий огляд досліджень по тематиці дисертації, обгрунтовується актуальність та новизна проблеми дослідження, визначається мета дослідження та описується зміст дисертації.

Перша глава дисертації складається з п'яти параграфів. В § 1.1 розглядаються системи лінійних звичайних диференціальних рівнянь з гауссівськими коефіцієнтами. Тут будуються, так звані, безкумулянтні наближення для моментів їх розв'язків. Розглянемо ці наближення на прикладі рівняння в R^d

$$\frac{dx(t)}{dt}=(A(t)+\eta(t)C(t))x(t), \quad t\in[0,T], \tag{1}$$

де $A(t)$, $C(t)$ є $d\times d$ невипадкові матриці з неперервними при $t\in[0,T]$ елементами, $\eta(t)$ є центрований неперервний гауссівський процес, кореляційна функція $B_0(t,s)$ якого задовольняє $\forall\ t,s\in[0,t]$ нерівності

$$|B_0(t,s)|\le\beta\exp\{-\alpha|t-s|\}, \quad \beta,\alpha>0. \tag{2}$$

Початкова умова $x(0)$ для рівняння (1) є невипадковою.

Розв'язок рівняння (1) є деяким функціоналом від процесу $\eta(t)$, причому майже напевно існують варіаційні похідні (функціональні похідні Фреше-Вольтера)

$$\frac{\delta^n x(t)}{\delta\eta(s_1)\ldots\delta\eta(s_n)}, \quad n=1,2,3,\ldots$$

В дисертації суттєво використовуються, так звані, формули інтегрування частинами по ймовірнісних мірах. Якщо $F[\eta]$ є гладкий функціонал від гауссівського центрованого процесу $\eta(t)$, $t\in[0,T]$, то, як випливає з цих формул,

$$M[\eta(t)\mathcal{F}[\eta]]=\int_0^T \mathcal{B}_0(t,s)M\frac{\delta\mathcal{F}[\eta]}{\delta\eta(s)}ds \qquad (3)$$

Для аналізу динамічних систем з випадковими збуреннями (3) систематично використовувалась В.І.Татарським, В.І.Кляцкіним. Ю.Л.Далецький разом зі своїми учнями встановив узагальнення цієї формули для гільбертового і банахового простору і використав це для побудови аналогу стохастичного інтегралу в цих просторах.

Застосовуючи цю формулу до рівняння (1), ми отримуємо для математичного сподівання Mx(t) його розв'язку безмежний ланцюжок інтегро-диференціальних рівнянь

$$\frac{dMx(t)}{dt}=A(t)Mx(t)+C(t)\int_0^t \mathcal{B}_0(t,s)M\frac{\delta x(t)}{\delta\eta(s)}ds,$$

$$M\frac{\delta^n x(t)}{\delta\eta(s_1)\dots\delta\eta(s_n)}=\int_0^t X(t,t_1)C(t_1)\int_0^{t_1}\mathcal{B}_0(t_1,s_{n+1})\times$$

$$\times M\frac{\delta^{n+1}x(t_1)}{\delta\eta(s_1)\dots\delta\eta(s_{n+1})}ds_{n+1}dt_1+\sum_{j=1}^{n}\theta(t-s_j)\Big(\prod_{j_1=1}^{n}\theta(s_j-s_{j_1})\Big)X(t,s_j)\times \qquad (4)$$

$$\times C(s_j)M\frac{\delta^{n-1}x(s_j)}{\delta\eta(s_1)\dots\delta\eta(s_{j-1})\delta\eta(s_{j+1})\dots\delta\eta(s_n)},\quad n=1,2,3,\dots,$$

де X(t,s) - матриця Коші для незбуреного ($\eta(t)\equiv0$) рівняння (1), $\theta(t)$ - функція Хевісайда.

Здійснимо формальне замикання цього ланцюжка, покладаючи в його (n+1)-му рівнянні

$$M\frac{\delta^{n+1}x(t_1)}{\delta\eta(s_1)\dots\delta\eta(s_{n+1})}\equiv 0,$$

і нехай, так зване, безкумулянтне наближення $\varphi_n(t)$ задовольняє цей замкнений ланцюжок, матриця $X(t,s)$ задовольняє $\forall t,s\in[0,T]$ нерівність

$$|X(t,s)|\le b\exp\{-a(t-s)\},\quad b>0,\quad a\in R, \tag{5}$$

а параметр σ задовольняє нерівності: $\sigma>-a$,

$$\max_{j=0,1,\dots}\frac{j\beta b^2c^2}{(\sigma+a+j\alpha)(\sigma+a+\alpha+j\alpha)}\le\frac{1}{4},\qquad c=\sup_t|C(t)|.$$

Наступне твердження є основним в цій главі.

Теорема 1. Нехай елементи матриць $A(t)$, $C(t)$ є неперервними при $t\in[0,T]$, а кореляційна функція $B_0(t,s)$ задовольняє умову (2). Тоді безкумулянтне наближення $\varphi_n(t)$ при $n\to\infty$ збігається до $Mx(t)$ і має місце оцінка

$$\sup_{t\in[0,T]}\left[e^{-\sigma t}|\varphi_n(t)-Mx(t)|\right]\le(2bc)^{2n+2}\beta^{n+1}b\times$$

$$\times\frac{(n+1)!\,|x(0)|}{(\sigma+a)(\sigma+a+\alpha+n\alpha)\prod_{j=1}^{n}(\sigma+a+j\alpha)^2}. \tag{6}$$

Майже автоматично цей результат переноситься і на моменти вищих порядків. Дійсно, для вектора $y(t)=x(t)\otimes\overset{(k)}{\dots}\otimes x(t)$, згідно (1), маємо аналогічне до (1) рівняння в R^{d^k}, але замість матриці $A(t)$ в в ньому є матриця

$$A_k(t)=A(t)\otimes E\dots\otimes E+\dots+E\otimes\dots\otimes E\otimes A(t),$$

замість матриці $C(t)$ є матриця $C_k(t)$, що визначається через $C(t)$ аналогічним чином. Тут $\otimes$ означає тензорний добуток, E - одинична матриця. Маючи це на увазі, результати першої і другої глави в основному формулюються тільки для математичного сподівання.

В § 1.2 розглянуті для математичного сподівання розв'язку рівняння (1) деякі наближення, які часто використовуються в фізичній літературі, а саме: наближення Бурре, Кубо, Ван Кампена, дифузійне. Ці наближення мають вид замкнутих рівнянь і основна увага тут приділяється отриманню для них оцінок похибки. Зокрема, з цих оцінок випливає, що якщо випадкове збурення в рівнянні (1) є великим і швидким, тобто замість $\eta(t)$ в рівнянні (1), стоїть процес

$$\eta(t)=\varepsilon^{-1/2}\xi(t\varepsilon^{-1}) \,, \tag{7}$$

де кореляційна функція $B(t,s)$ неперервного стаціонарного центрованого гауссівського процесу $\xi(t)$ задовольняє оцінку (2), ε е малий додатний параметр, то ці похибки будуть порядку $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$. В § 1.3 здійснене порівняння цих наближень на прикладі рівняння коливань гармонійного осцилятора з випадковою частотою. Основна увага тут звертається на їх поведінку при $t\to\infty$. Зокрема показано, що наближення Кубо, дифузійне можуть при великих t давати помилковий опис поведінки розв'язку.

В § 1.4 побудовані асимптотичні розклади по степенях ε для середнього розв'язку рівняння (1) у випадку швидких і великих гауссівських збурень (7), а в § 1.5 побудовані відповідні розклади у випадку швидких гаусівських збурень, тобто коли замість $\eta(t)$ в рівнянні (1) стоїть

$$\eta(t)=\xi(t\varepsilon^{-1}) \,. \tag{8}$$

Як випливає з оцінки (6), для побудови цих розкладів досить вміти їх будувати для відповідних безкумулянтних наближень, що спрощує задачу. В свою чергу, рівняння для цих наближень можна звести у випадку стаціонарних збурень до інтегро-диференціальних рівнянь з малим параметром при похідних. Структура цих рівнянь дає можливість використати для побудови асимптотичних розкладів метод примежевих функцій, згідно якого вони мають вид суми регулярної частини і примежевого шару. Цим шляхом в § 1.4 отримано твердження.

Теорема 2. Нехай в рівнянні (1) невипадкові матриці $A(t)$, $C(t)$ є двічі неперервно-диференційовними, а випадкове збурення є великим і швидким, тобто має вид (7), де кореляційна функція $B(t-s)$ стаціонарного неперервного центрованого гауссівського процесу $\xi(t)$ задовольняє умову (2) $\forall t,s\in R^1$ і

$$\int\limits_{\operatorname{Re}p=-\sigma_1<0} \left|\int_0^\infty e^{-pt}B(t)\,dt\right| dp<\infty$$

Тоді для $Mx(t)$ має місце розклад

$$Mx(t)=w_0(t)+\varepsilon w_1(t)+\varepsilon z_1(\tau)+R_1(t,\varepsilon)\,, \quad \tau=t\varepsilon^{-1}, \tag{9}$$

де функції $w_0(t)$, $w_1(t)$, $z_1(\tau)$ визначаються з рівнянь

$$\frac{dw_0(t)}{dt}=A(t)w_0(t)+\int_0^\infty B(s)ds\,C^2(t)w_0(t),\quad \frac{dw_1(t)}{dt}=A(t)w_1(t)+$$

$$+\int_0^\infty B(s)ds\,C^2(t)w_1(t)-\int_0^\infty sB(s)ds\,C(t)\Big[\frac{dC(t)}{dt}-A(t)C(t)+$$

$$+C(t)A(t)\Big]w_0(t),\quad w_0(0)=x(0),\quad w_1(0)=-\int_0^\infty sB(s)ds\,\times \tag{10}$$

$$\times C^2(0)x(0),\quad z_1(\tau)=\int_\tau^\infty (s-\tau)B(s)ds\,C^2(0)x(0),$$

і рівномірно відносно $t\in[0,T]$, $|R_2(t,\varepsilon)|=O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon\to 0$.

Якщо ж випадкові збурення є швидкими, тобто мають вигляд (8), то при тих самих умовах, що і в попередній теоремі, в § 1.5 також отриманий розклад (9), в якому примежевий член вперше появляється тільки при ε^2 і співпадає з $z_1(\tau)$, а перші два регулярні члени визначаються з рівнянь

$$\frac{dw_0(t)}{dt}=A(t)w_0(t),\quad \frac{dw_1(t)}{dt}=A(t)w_1(t)+\int_0^\infty B(s)ds\,\times$$

$$\times C^2(t)w_0(t),\quad w_0(0)=x(0),\quad w_1(0)=0. \tag{11}$$

В цій главі також отримані замкнуті рівняння і для дальших членів асимптотичного розкладу, але вони мають досить громіздкий вигляд.

Зауважимо, що запропований підхід до побудови асимптотичних розкладів видається нам досить природним. Для прикладу в скалярному випадку ($d=1$) при Орнштейн-Уленбеківському збуренні неважко знайти в явному вигляді всі моменти розв'язку рівняння (1) і переконатись, що відповідні асимптотичні розклади є сумою регулярної частини і примежевого шару.

Відзначимо, що вперше метод примежевих функцій до ймовірнісних задач застосував В.С.Королюк, а саме для асимптотичного аналізу випадкових блукань. Він також разом з А.Ф.Турбіним і їхніми учнями розвивали цей підхід і в інших проблемах.

Друга глава дисертації присвячена моментному аналізу рівняння (1) без припущення про гауссовість збурень. В перших трьох параграфах цієї глави аналіз проводиться по тій самій схемі, що і в першій главі, тільки замість формули (3) використовується її узагальнення. Це узагальнення відрізняється від формули (3) тим, що в правій частині є ряд, в який входять як кумулянти (семиінваріанти) процесу $\eta(t)$, так і математичні сподівання варіаційних похідних функціоналу $F[\eta]$.

Застосовуючи цю формулу до рівняння (1), отриманий для $Mx(t)$ безмежний ланцюжок інтегро-диференціальних рівняннь з варіаційними похідними. По аналогії з першою главою здійснюється його замикання і доводиться збіжність цієї процедури замикання з відповідними оцінками похибки. З цих оцінок випливає, що запропонована процедура замикання дає наближення вищого порядку як у випадку швидких збурень виду (8), так і у випадку швидких і великих збурень (7). У випадку строго стаціонарного випадкового процесу $\xi(t)$ можна знову звести ці замкнуті рівняння до інтегро-диференціальних рівнянь з малим параметром при похідних. Структура цих рівнянь дає можливість для побудови відповідних розкладів використати метод примежевих функцій. Слід відзначити, що у випадку швидких і великих збурень (7) тут існує суттєва відмінність в порівнянні з гауссівським випадком. Вона полягає в тому, що відповідні розклади будуються по степенях квадратного кореня від ε. Зокрема, отриманий наступний результат.

Теорема 3. Нехай випадкове збурення в рівнянні (1) є великим і швидким, тобто має вигляд (7), де кумулянти

$$B_n(t-s_1,\ldots,t-s_n)=i^{-n-1}\frac{\delta^{n+1}\ln M\exp\{i\int_0^T\xi(s)z(s)ds\}}{\delta z(t)\,\delta z(s_1)\ldots\delta z(s_n)}\bigg|_{z=0},$$

строго стаціонарного неперервного центрованого процесу $\xi(t)$ задовольняють умови: $\forall t, s_k\in[0,T]$, $t>s_k$, $k=1,\ldots,n$.

$$|B_n(t-s_1,\dots,t-s_n)|\le \beta^{n+1}\exp\left\{-\alpha\sum_{j=1}^{n}(t-s_j)\right\},\quad \beta,\alpha>0,$$

$$\int\cdots\int\left|\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty e^{-\sum_{k=1}^{j}p_k t_k}B_j(t_1,\dots,t_j)\,dt_1\dots dt_j\right|dp_1\dots dp_j<\infty,\quad j=1,2,$$

$\operatorname{Re}p_j=-\sigma_j<0$

невипадкові матриці $A(t)$, $C(t)$ є двічі неперервно-диференційовними. Тоді для $Mx(t)$ має місце розклад

$$Mx(t)=w_0(t)+\varepsilon^{1/2}w_1(t)+R_2(t,\varepsilon),$$

де функції $w_0(t)$, $w_1(t)$ визначаються з рівнянь

$$\frac{dw_0(t)}{dt}=A(t)w_0(t)+\int_0^\infty B(s)ds\,C^2(t)w_0(t),\quad w_0(0)=x(0),$$

$$\frac{dw_1(t)}{dt}=A(t)w_1(t)+\int_0^\infty B(s)ds\,C^2(t)w_1(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_0^\infty B_2(s_1,s_2)ds_1ds_2\,C^3(t)w_0(t),\quad w_1(0)=0,$$

і рівномірно відносно $t\in[0,T]$, $|R_2(t,\varepsilon)|=O(\varepsilon)$, $\varepsilon\to 0$.

Зауважимо, що перший приможевий член є вперше присутнім при ε^1 і співпадає з $z_1(\tau)$ в (10).

З цієї теореми випливає, що хоч перший член в гауссівському і негауссівському випадку однаковий, другі члени є різними. Як і в гауссівському випадку, знаходження членів асимптотичного розкладу можна звести до обчислення квадратур, якщо є відомою матриця Коші для дифузійного наближення, що визначається з рівняння

$$\frac{du(t)}{dt}=A(t)u(t)+\int_0^\infty B(s)ds\,C^2(t)u(t).$$

В § 2.3 побудовані асимптотичні розклади у випадку швидких стаціонарних випадкових збурень (4), причому перші два члени цих розкладів співпадають з відповідними членами в гауссівському випадку і тільки треті члени є різними. Таким чином, негауссовість збурень є більш суттєвою при швидких і великих збуреннях, ніж просто при швидких. Як і в гауссівському випадку, знаходження членів асимптотичного розкладу можна звести до обчислення квадратур, якщо є відомою матриця Коші $X(t,s)$ незбуреного рівняння (1).

Зауважимо, що в регулярних членах асимптотичних розкладів в § 1.4, § 1.5, § 2.2, § 2.3 присутнє тільки значення спектральних густин кумулянтів процесу $\xi(t)$ в нулі, а також їх похідних в нулі, що вимагає відносно небагато інформації про збурення.

Відзначимо також, що результати § 2.2 дають можливість будувати асимптотичні розклади в центральній граничній теоремі, в принципі інваріантності для строго стаціонарних процесів.

Дійсно, розглянемо послідовність центрованих випадкових процесів

$$\eta_n(t) = n^{-3/2} \int_0^{nt} \xi(s)\,ds \,.$$

Добре відомо, що при виконанні деяких умов перемішування ця послідовність слабо збігається при $n\to\infty$ до вінерівського процесу. Для функції

$$\psi_n(t) = \exp\{i\lambda\eta_n(t)\}$$

маємо рівняння в R

$$\frac{d\psi_n(t)}{dt} = i\lambda n^{-1/2}\xi(nt)\,\psi_n(t) \,.$$

Але це є рівняння з великими і швидкими випадковими збуреннями і для знаходження асимптотичних розкладів можна застосовувати результати § 2.2. Зокрема, при $t=1$ отримуються асимптотичні розклади для характеристичної функції в центральній граничній теоремі, причому тут можна знехтувати примежевим шаром.

В перших двох главах в основному розглядались випадкові збурення, які є добутком скалярного випадкового процесу на невипадкову матрицю. Це робилось з причини компактності та наглядності викладу, оскільки всі наведені міркування і результати переносяться на загальний випадок матричнозначного процесу.

При отриманні асимптотичних розкладів суттєво використовувалась стаціонарність випадкового збурення. В загальному випадку неясно, як можна отримати відповідні розклади в нестаціонарному випадку. В § 2.4 розглянутий деякий частковий випадок нестаціонарного збурення, для якого побудову відповідних асимптотичних розкладів неважко здійснити. А саме, припускається, що випадковий процес $\eta(t)$ в рівнянні (1) є $\eta(t)=\beta\sin(\alpha w(t))$, де $w(t)$ – стандартний вінерівський процес, β,α – дійсні сталі.

В останньому параграфі другої глави запропонований деякий підхід для знаходження моментів розв'язку рівняння n-го порядку з випадковими коефіцієнтами, оснований на представленні їх в явному вигляді через інтеграли по мірі Вінера.

Третя глава присвячена аналізу стійкості для систем звичайних диференціальних рівнянь з гауссівськими коефіцієнтами, причому використовується підхід, розвинутий в першій главі.

Дослідженню стійкості для систем з випадковими параметрами присвячено багато робіт, причому найбільш дослідженою є стійкість для стохастичних диференціальних рівнянь, тобто, грубо кажучи, для рівнянь з "білим шумом".

Мабуть першими роботами, де досліджувалась стійкість для системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь з гауссівськими коефіцієнтами були роботи М.Г.Шура і Р.З.Хасьмінського .

Розглянемо рівняння (1), де матриця $A(t)$ є сталою і має власні значення з від'ємними дійсними частинами, тобто тривіальний розв'язок незбуреного рівняння є асимптотично стійким по Ляпунову, гауссівський випадковий процес $\eta(t)$ має нульове математичне сподівання. Як показали М.Г.Шур і Р.З.Хасьмінський, при достатньо малих

$$\sup_{t\in R^+} B_0(t,t), \quad \sup_{t\in R^+} \int_0^t |B_0(t,s)|ds,$$

тривіальний розв'язок рівняння (1) буде експонентно стійким в середньому квадратичному.

Цей результат не дає відповіді на питання, чи швидкі випадкові гауссівські збурення, грубо кажучи, не роблять стійку незбурену систему нестійкою. Основним результатом § 3.1 є спроба відповісти на це питання. Ми розглядаємо рівняння (1), де матриці $A(t),C(t)$ є обмеженими при $t\in R^+$, тривіальний розв'язок незбуреного рівняння є рівномірно експонентно стійким, тобто для матриці Коші $X(t,s)$ має місце оцінка (5) при $a>0$ $\forall t,s\in R^+$, $t>s$.

Теорема 4. Нехай кореляційна функція $B(t,s)$ гауссівського центрованого неперервного процесу $\eta(t)$ задовольняє $\forall t,s\in R^+$ умову (2). Тоді якщо існує таке додатне c, що $c<2a$,

$$\max_{j=1,2,3,\dots} \frac{j b^4 c^2 \beta(d+1)}{(2a-\sigma-\alpha+j\alpha)(2a-\sigma+j\alpha)} \le \frac{1}{8} ,$$

то тривіальний розв'язок рівняння (1) є експонентно стійким в середньому квадратичному і має місце оцінка: $\forall t, t_0 \in R^1$, $t>t_0$,

$$M|x(t)|^2 \le 2 b^2 |x(t_0)|^2 \exp\{-\sigma(t-t_0)\} .$$

З цієї теореми випливає, що якщо випадкове збурення в рівнянні (1) є швидким, тобто замість $\eta(t)$ в ньому стоїть процес (8), ε є малий додатний параметр, то якщо тривіальний розв'язок незбуреного рівняння є рівномірно експонентно стійким, то тривіальний розв'язок рівняння (1) буде експонентно стійким в середньому квадратичному при достатньо малому ε.

В цьому ж параграфі розглянуто також рівняння (1) при $d>1$, сталих $A(t), C(t)$, причому матриця A є симетричною, а C є кососиметричною. Процес $\eta(t)$ є процесом Орнштейна-Уленбека з кореляційною функцією $\beta\exp(-\alpha|t|)$. Доведено, що якщо тривіальний розв'язок незбуреного рівняння є асимптотично стійким по Ляпунову, то тривіальний розв'язок збуреного рівняння буде експонентно стійким в середньому квадратичному при будь яких $\beta, \alpha > 0$. Зауважимо, що в скалярному випадку ($d=1$) цей результат не має місця.

В передмові до п'ятої глави своєї відомої монографії по стійкості Р.З.Хасьмінський висловив припущення, що кожний результат про стійкість для стохастичного диференціального рівняння повинен мати місце і для звичайного диференціального рівняння при заміні "білого шуму" на регулярний процес, який в певному сенсі є близьким до нього.

В § 3.2 дисертації наведено підтвердження гіпотези Р.З.Хасьмінського для системи лінійних диференціальних рівнянь. А саме розглядається рівняння (1) з великим і швидким гауссівським збуренням (7), кореляційна функція $B(t-s)$ стаціонарного неперервного центрованого процесу $\xi(t)$ задовольняє умову (2) $\forall t,s \in R^1$, матриці $A(t)$, $C(t)$ є обмеженими при $t \in R^1$.

Відомо, що при $\varepsilon \to 0$ розв'язок цього рівняння, при зроблених припущеннях, буде слабо збігатись до розв'язку стохастичного диференціального рівняння Іто

$$dy(t)=\left(A(t)+\int_0^\infty B(s)ds\, C^2(t)\right)y(t)dt+ \tag{12}$$
$$+\sqrt{2\int_0^\infty B(s)ds}\; C(t)y(t)dw(t) \quad .$$

Стійкість в середньому квадратичному для цього рівняння досліджена досить повно.

Теорема 5. Якщо тривіальний розв'язок рівняння (12) є експонентно стійким в середньому квадратичному, то при достатньо малому ε і тривіальний розв'язок рівняння (1),(7) буде експонентно стійким в середньому квадратичному.

Тут вказані також деякі нерівності, які дають можливість оцінити наскільки малим повинно бути ε, щоб мало місце твердження теореми.

Наступні два параграфи цієї глави є спробою встановити такі рівняння, для яких гіпотеза Р.З.Хасьмінського має місце без близькості збурення до "білого шуму".

Припустимо, що $\xi(t)$ в рівнянні (1),(7) є процесом Орнштейна-Уленбека з кореляційною функцією $\exp(-|t|)$.

Теорема 6. Якщо в рівнянні (1) матриці $A(t)$,$C(t)$ є сталими і симетричними, то із експонентної стійкості тривіального розв'язку рівняння (12) випливає експонентна стійкість тривіального розв'язку рівняння (1),(7) при будь-якому $\varepsilon>0$.

В § 3.4 розглядається рівняння коливань для гармонійного осцилятора

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+(\kappa+\beta\eta(t))\frac{du(t)}{dt}+\alpha u(t)=0, \quad \kappa,\alpha>0 .$$

Добре відомо, що якщо тут $\eta(t)$ є процесом "білого шуму" і це рівняння інтерпретується як рівняння Стратоновича, то умова $2\beta^2\le\kappa$ є необхідною і достатньою для стійкості тривіального розв'язку в середньому квадратичному. В цьому параграфі показано, що якщо $\eta(t)$ є процесом Орнштейна-Уленбека з кореляційною функцією $\tau\exp(-\tau|t|)$, то вищезгадана умова є достатньою для стійкості тривіального розв'язку в середньому квавдратичному при будь-якому $\tau>0$.

Останній параграф цієї глави присвячений питанню про стабілізацію нестійких детермінованих лінійних систем за допомогою гауссівських центрованих збурень коефіцієнтів. А саме, розглядається рівняння в R^d

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + \Phi(t)x(t) , \tag{13}$$

де $A(t)$ є квадратна $d \times d$ матриця з обмеженими при $t \in R^+$ коефіцієнтами, $\Phi(t)$ є центрований $d \times d$ - матричнозначний гауссівський процес.

Так як можливі різні означення стабілізації, то спочатку зробимо відповідні означення.

Означення . Система $\dot{x} = A(t)x$ припускає стабілізацію

а) середньої траєкторії, якщо існує така центрована матриця $\Phi(t)$, що для середнього $Mx(t)$ розв'язку рівняння (13), що задовольняє невипадкову початкову умову $x(t_0)$, $\forall t, t_0 \in R^+$, $t > t_0$,

$$|Mx(t)| \le \gamma_1 |x(t_0)| \exp\{-\gamma_2 (t - t_0)\} , \quad \gamma_1, \gamma_2 > 0 ;$$

б) в середньому квадратичному, якщо тривіальний розв'язок рівняння (13) є експонентно стійким в середньому квадратичному;

в) майже напевно, якщо тривіальний розв'язок рівняння (13) є стійким з ймовірністю 1.

Зразу відзначимо, що ця задача є нетривіальною, бо розглядаються центровані збурення. В скалярному випадку ($d=1$), враховуючи явний вид розв'язку для рівняння (13), неважко переконатись в неможливості стабілізації в будь-якому з варіантів наведених означень за допомогою гауссівського центрованого збурення.

Початок дослідження цієї задачі поклала робота Дж.Самуельса, в якій розглядалась стабілізація середньої траєкторії, стабілізація в середньому квадратичному для лінійного рівняння другого порядку за допомогою збурень "білим шумом".

В останньому параграфі цієї глави ми досліджуємо цю задачу у випадку, коли матриця $A(t)$ є довільною обмеженою при $t \in R^+$ матрицею. Основним результатом тут є наступне твердження.

Теорема 7. Лінійна система $\dot{x} = A(t)x$,

і) припускає стабілізацію майже напевно (в середньому квадратичному) тоді, коли

$$\overline{\lim_{t-s \to \infty}} \frac{1}{t-s} \int_s^t \operatorname{trace} A(s_1)\, ds_1 < 0 ;$$

іі) при $d > 1$ завжди припускає стабілізацію середньої траєкторії.

Зауважимо, що умова в п.1) є близькою до необхідної. Це випливає як з формули Остроградського-Ліувілля для матриці Коші рівняння (13), так і з результатів Л.Арнольда та ін., які показали, що в стаціонарному випадку ($A(t)$ є сталою) ця умова є необхідною і достатньою для стабілізації майже напевно.

В четвертій главі розглядається нелінійне звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt}=a(t,x)+\eta(t)\,b(t,x), \quad 0\le\tau<t\le T, \quad x\in R. \tag{14}$$

Якщо $f(x)$ є гладка функція на R і $x(t;\tau,x)$ є розв'язок рівняння (14), що задовольняє невипадкову початкову умову $x(\tau)=x$, то для функції $u(\tau,x)=f(x(t;\tau,x))$ маємо, згідно (14), обернене рівняння Ліувілля

$$\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial\tau}+\big(a(\tau,x)+\eta(\tau)\,b(\tau,x)\big)\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial x}=0, \tag{15}$$

$$x\in R, \quad \tau<t, \quad u(t,x)=f(x).$$

Якщо $\eta(t)$ є неперервний центрований гауссівський процес, то формально для $Mu(\tau,x)$ можна отримати відповідний аналог ланцюжка (4), але його дослідження сильно ускладнюється тим, що це буде ланцюжок інтегро-диференціальних рівнянь з частинними похідними.

В останні десять років рівняння (14) привертає значну увагу фізиків (див. перший том збірника "Noise in Nonlinear Dynamical Systems". Eds.: F.Moss and P.V.G.McClintock, Cambridge Univ.Press, 1989). В основному припускається, що $\eta(t)$ є процес Орнштейна-Уленбека з кореляційною функцією

$$B_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-1}\exp\{-\varepsilon^{-1}|t|\}, \tag{16}$$

де параметр ε називається часом кореляції.

Добре відомо, що при певних обмеженнях на $a(t,x)$, $b(t,x)$ розв'язок рівняння (14),(16) при $\varepsilon\to0$ слабо збігається до деякого дифузійного марковського процесу $y(t)$, і $Mf(y(t;\tau,x))$ задовольняє обернене рівняння Колмогорова. Головною проблемою, яка розглядалась у згадуваних роботах є задача дослідження (14),(16) при малих, але фіксованих ε.

Зусилля концентрувались на тому, як підправити коефіцієнти рівняння Колмогорова, щоб його розв'язок правильно описував збурене рівняння. На цьому шляху були запропоновані різні схеми, але, як виявилось, вони є між собою суперечливими і не узгоджуються з числовими експериментами.

В § 4.1 цієї глави ми показуємо, що для моделі (14),(16) варто шукати наближення для $Mf(x(t;\tau,x))$ не серед параболічних рівнянь, а серед гіперболічних рівнянь. Тут приводиться обґрунтування цього і наводяться відповідні оцінки, причому знову суттєво використовується формула (3). Відмітимо, що потужні методи теорії гіперболічних рівнянь, що грунтуються на відомих енергетичних нерівностях, тут виявились недостатніми. Ми виводимо більш тонкі аналоги цих нерівностей, які дають можливість повніше враховувати специфіку задачі.

Припускається, що $a(t,x), b(t,x)$ є неперервними функціями від t, а також

$$a(t,x),\ b(t,x),\ f(x)\in C^{\infty}(R),\quad b(t,x)\neq 0,$$

$$|a(t,x)|\le K(1+x^2)^{1/2},\quad |D^j a(t,x)|\le K,\quad j=1,\dots,4,$$

$$|D^j b(t,x)|\le K,\quad j=0,\dots,4,\quad |D^j f(x)|\le K(1+x^2)^{\gamma-1},$$

де $D^j=\frac{\partial^j}{\partial x^j}$, K,γ є додатні сталі, $\gamma\ge 1$.

В § 4.2, на основі методу примежевих функцій, будується для рівняння (14),(16) асимптотичний розклад для $Mf(x(t;\tau,x))$ по степеням ε.

В § 4.3, показано, як на основі теореми Бохнера-Хінчина, результати попередніх двох параграфів переносяться на випадок, коли гаусівське випадкове збурення є швидким і великим. Точніше, коли замість $\eta(t)$ є (7), де ε-малий додатний параметр, а $\xi(t)$ є центрований неперервний стаціонарний гауссівський процес, кореляційна функція якого задовольняє $\forall t,s\in R^1$ умову (2). Тут також отриманий асимптотичний розклад для $Mf(x(t;\tau,x))$ по степеням ε, причому кожний член цього розкладу можна за допомогою квадратур виразити через фундаментальний розв'язок відповідного рівняння Колмогорова для дифузійного наближення. Для побудови цих розкладів знову використаний метод примежових функцій.

В останній п'ятій главі дисертації розглядається нестаціонарне лінійне рівняння Шредінгера з випадковим потенціалом, яке завжди можна подати у наступному координатному вигляді

$$i\frac{\partial v(t,p)}{\partial t}+\Delta v(t,p)+\eta(t,p)v(t,p)=0,\quad t\in(0,T], \tag{17}$$

$$v(0,p)=v_0(p),\quad p\in R^n.$$

З іншого боку, рівняння (17) співпадає з рівнянням Леонтовича-Фока в теорії поширення коротких хвиль, причому потенціал тут описує випадкові властивості середовища.

Дослідженню цього рівняння присвячено дуже багато робіт і головна увага приділялась розробці методів знаходження перших чотирьох моментів розв'язку рівняння (17).

На даний час, найбільш визнаним серед фізиків є, так званий, метод марковського випадкового процесу, вперше запропонований В.І.Татарським (ЖЭТФ,1969,т.56,№6).

Згідно цього методу на потенціал накладаються наступні умови:
а) $\eta(t,p)$ є центрованим гауссівським полем;
б) воно є дельта-корельованим по t, тобто

$$M[\eta(t,p)\,\eta(s,q)]=\delta(t-s)\varphi(p,q),$$

де $\delta(t)$ є δ-функція.

При цих умовах вдається отримати замкнуті рівняння для моментів будь-якого порядку.

Звичайно, що реальні моделі для $\eta(t,p)$ не задовольняють умову б) і до певної міри а). Кореляційна функція для них не є δ-функцією від t. Постає питання, яким чином в отриманні рівняння для моментів ввести реальну кореляційну функцію. На основі евристичних міркувань в багатьох роботах це було зроблено. В цій главі ми математично обгрунтовуємо це.

Розуміючи слабі сторони запропонованої моделі для $\eta(t,p)$, В.І.Татарський в Висновках до вже згадуваної роботи поставив завдання побудови деякої теорії збурень, яка би не використовувала припущення а),б) і в основі якої б лежали наближення марковського випадкового процесу. В цій главі і цю задачу ми намагаємось розв'язати. Конкретніше, в перших двох параграфах розглядається наступна модель для потенціалу:

$$\eta(t,p)=\varepsilon^{-1}\xi(t\varepsilon^{-2},p) ,$$

де $\xi(t,p)$ є центроване неперервне гауссівське поле, ε є малий додатний параметер. В останньому параграфі розглядається та ж сама модель, але без припущення про гауссовість. Рівняння (17) розглядається в, так званій, імпульсній формі (в перетвореннях Фур'є по просторових координатах).

Для цієї задачі повністю використовується методика перших двох глав дисертації. Для математичного сподівання розв'язку побудовані як вищі наближення, так і асимптотичні розклади по степенях ε, причому перший член такого розкладу співпадає з наближенням марковського випадкового процесу. Немає принципових труднощів з перенесенням отриманих результатів на моменти вищого порядку.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Бобрик Р.В. О безкумулянтном замыкании линейных уравнений для решения системы линейных дифференциальных уравнений со случайно возмущенными коэффициентами //Укр. мат. журн.-1985.-37,№5.-С.551-558.
2. Бобрик Р.В. Цепочки моментных уравнений для решения уравнения Шредингера со случайным потенциалом и их замыкание //Теорет. мат. физика.-1986.-68,№2.-С.301-311.
3. Бобрик Р.В. Об асимптотическом поведении в среднем решений линейных дифференциальных уравнений с гауссовскими коэффициентами //Применение аналитических методов в вероятностных задачах: Сб. науч. тр.-Киев:Ин-т математики АН УССР,1986.-С.5-9.
4. Бобрик Р.В. О среднеквадратической устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений с гауссовскими коэффициентами //Укр. мат. журн.-1988.-40,№6.-С.778-780.
5. Бобрик Р.В. Можливість стабілізації нестійких систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь з допомогою випадкових збурень їх коефіцієнтів //Допов. АН УРСР. Сер.А.-1989.-№12.-С.6-9.

6.-Бобрик Р.В. Об одном свойстве устойчивых систем линейных стохастических уравнений //Укр. мат. журн.-1990.-42,№2.-С.147--152.
7. Бобрик Р.В. Про дифузійне наближення при дослідженні моментів розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь з гауссівськими коефіцієнтами //Допов. АН УРСР. Сер.А.-1990.-№9.-С.6-8.
8. Бобрик Р.В. Про стійкість в середньому квадратичному для гармонійного осцилятора з випадковим параметром //Укр. мат. журн. -1992.-44,№9.-С.1276-1278.
9. Bobryk R.V. An asymptotic expansion for the linear systems with Gaussian parameter //Probability Theory and Mathematical Statistic. Proceed.of the 6th USSR-Japan Symp., Kiev,1991.--World Scientif.,1992.-P.5-9.
10. Bobryk R.V. Comparison of some approaches for analysis of stochastic systems with short correlation time noise //Physica. Sect.A:Statist.& Theoret. Phys..-1992.-184,№3-4.-P.493-498.
11. Bobryk R.V. Stochastic equations of the Langevin type under a weakly dependent perturbation //J.Statist.Phys..-1993.-70, №3-4.-P.1045-1056.
12. Bobryk R.V. Conditions for the moment stability of linear stochastic systems //Systems & Contr.Lett..-1993.-20,№3.--P.227-232.
13. Bobryk R.V. Singular perturbation method for short waves in random media //Waves in Random Media.-1993.-3,№4.-P.267-277.
14. Бобрик Р.В. Об одном подходе к нахождению моментных функций линейных дифференциальных уравнений со случайными параметрами. //Исследования вероятностных характеристик некоторых стохастических систем.-Киев,1984.-С.2-10.-(Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 84.10).
15. Бобрик Р.В. О показателях Ляпунова линейных стохастических систем // Пятая Междунар. Вильнюс. конф. по теории вероятност. и мат. статистике.: Тез. докл.,Вильнюс,1989.-Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики АН ЛитССР,1989.-С.75.

Бобрик Р.В. Динамические системы под действием быстропеременных случайных возмущений.
Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика, Ин-т математики НАН Украины, Киев,1994.
Защищается 15 научных работ, которые содержат теоретические исследования динамических систем со случайными быстропеременными параметрами. Построены асимптотические разложения для вероятностных характеристик таких систем. Получены оценки погрешности некоторых приближений. Исследована устойчивость и стабилизация для линейных систем с гауссовскими коэффициентами.

Bobryk R.V. Dynamical systems under fast varying random perturbations. Doctor of Science thesis (Physics and Mathematics), specialization - probability theory and mathematical statistic. Institute of Mathematics, NAS of Ukraine, Kyiv,1994.
15 scientific papers containing theoretical studies of dynamical systems with fast varying parameters are defended. Asymptotic expansions for probability characteristics such systems are constructed. Estimates of error for some approximations are obtained. The stability and the stabilization for linear systems with Gaussian coefficients are investigated.

Ключові слова:
динамічні системи, випадкові параметри, асимптотичні розклади, стійкість.

Підп. до друку 11.11.94. Формат 60x84/16. Папір друк. Офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,39. Ум. фарбо-відб. 1,39. Обл.-вид. арк. 1,0
Тираж 100 пр. Зам. 253 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3