НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

КОСТИН Владимир Алексеевич

ТОЧНО-РАВНОМЕРНО КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Киев — 1994

Работа выполнена в Воронежском государственном университете.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор ЭЙДЕЛЬМАН С.Д.,
доктор физико-математических наук,
профессор РЕШНИКОВ В.Д.,
доктор физико-математических наук,
КОЧУБЕИ А.Н.

Ведущая организация: Киевский политехнический институт

Защита диссертации состоится "____" ________________ 1994 г.
в ______ часов на заседании специализированного совета Д016.50.02
при Институте математики НАН Украины по адресу: 252601 Киев-4,ГСП,
ул.Терещенковская, 3.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Автореферат разослан "____" ________________ 1994 г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
доктор физ.- мат. наук ЛУЧКА А.Ю.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В 1938 году Петровским И.Г. была поставлена следующая задача.

Пусть Ω - область в R^n и $[0,T]\subset R^1$ для $t\in[0,T]$ и $x\in\Omega$. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial^m u(t,x)}{\partial t^m}=P_N(D)u\,, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0}=\varphi_k(x),\ k=0,1,\dots(m-1), \tag{2}$$

где $P_N(D)=\sum\limits_{|\alpha|\le N} a^\alpha D^\alpha,\ \alpha=\alpha_1\dots\alpha_n$ - мультииндекс

$$|\alpha|=\sum_{j=1}^n \alpha_j,\ D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n},\ \ \varphi_k(x)\in\mathcal{B}^{(P)}(\Omega)$$

(P - достаточно большое), коэффициенты a^α - постоянные

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}^{(P)}}=\sum_{k=0}^{P}\max|\varphi^{(k)}(x)|=\|\varphi\|_P\,, \tag{3}$$

Задача (1)-(2) поставлена корректно по Адамару, если для каждой системы $\varphi_k(x)$ на Ω решение $u(t,x)$ этой задачи существует и найдутся такие числа $\tau\le\ell\le P$, что при каждом $t\in[0,T]$ выполняется неравенство

$$\|u(t,x)\|_\tau\le M\sum_{k=0}^{m-1}\|\varphi_k\|_\ell\,. \tag{4}$$

Константа M может зависеть лишь от T .

И.Г.Петровским ставится вопрос о наименьшем ℓ в неравенстве (4) при заданном τ .

В случае $N=m=2$, $\tau=0$ ответ

$$l=\left[\frac{n}{2}\right] \tag{5}$$

следует из результатов Соболева С.Л. (1938 г.).

Важным классом уравнений (I) являются те уравнения, для которых задача Коши равномерно корректна при $l=\tau$. Такие задачи будем называть точно равномерно корректными (ТРК) или ТРК разрешимыми.

Из (5) следует, что ТРК разрешимая задача Коши при $N=m=2$, $l=\tau=0$ может быть лишь при $n=1$.

Хорошо известно, что при $m=1$ ТРК разрешимость задачи (I)-(2) имеет место, если $P_N(D)$ - эллиптический оператор.

Из результатов М.Совы, С.Куреппы, Г.Фатторини следует, что для $m\geq 3$ задача (I)-(2) ТРК разрешима тогда и только тогда, когда $N=0$.

Оставался открытым вопрос о существовании операторов $P_N(D)$ при $m=2$, $n>1$, для которых задача Коши ТРК разрешима в пространствах с метрикой, отличной от L_2 (например, в $\mathcal{B}$).

Этот вопрос перешел в одну из проблем, связанных с абстрактной косинус-функцией (КОФ) после работ Э.Хилле (1948 г.), С.Куреппы (1958 г.), М.Совы (1968 г.), Г.Фатторини (1969 г.), С.Г.Крейна (1967 г.), начавших изучать с помощью абстрактных специальных функций (полугруппы, КОФ, функция Миттаг - Леффлера) ТРК разрешимые задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{d^m u(t)}{dt^m}=Au(t), \tag{6}$$

где A - линейный оператор, действующий в некотором банаховом пространстве, $m=1,2,\ldots$

При этом получены следующие результаты:

задача Коши для уравнения (6) ТРК разрешима в банаховом пространстве B, если:

а) $m=1$, A - генератор C_0 - полугруппы;

б) $m=2$, A - генератор КОФ;

в) $m\geq 3$, A - ограниченный оператор.

В связи с этим весьма важным стал вопрос о критериях генератора соответствующей абстрактной функции.

В случае C_0 - полугруппы ответ дает теорема Хилле - Иосиды - Филлипса - Феллера - Миадеры (ХИФФМ), в которой основным условием является оценка на степени резольвенты оператора A

$$\|R^n(\lambda,A)\|\leq M(\lambda-\omega)^{-n} \quad (\lambda>\omega), \qquad (7)$$

константа M не зависит от $n=1,2,\ldots$

Отсюда следует довольно просто проверяемое достаточное условие генератора C_0 - полугруппы

$$\|R(\lambda,A)\|\leq(\lambda-\omega)^{-1}. \qquad (8)$$

В случае КОФ имеет место теорема Совы - Куреппы - Фатторини (СКФ), аналогичная теореме ХИФФМ, в которой (7) заменяется условием

$$\left\|\frac{d^n(\lambda R(\lambda^2,A))}{d\lambda^n}\right\|\leq M(n+1)!\,(\lambda-\omega)^{-n}, \qquad (9)$$

$\lambda>\omega$, M - константа, не зависящая от n.

Однако (9) значительно проигрывает условию (7) с точки зрения его проверки. И здесь нет хорошо проверяемых достаточных условий типа (8). Одним из наиболее часто применяемых условий является

условие: $A^{\frac{1}{2}}$ - генератор сильно непрерывной группы $T(t), t\in R^1$.
При этом для КОФ справедливо представление

$$C(t)=\frac{1}{2}\left[T(t)+T(-t)\right]. \tag{10}$$

Этот критерии использовался в теоретических исследованиях Г.Фатторини, С.Тревиса, Ж.Вебба, С.Г.Крейна. Однако основной "недостаток" этого критерия следует из одной теоремы Л.Хермандера, позволяющей утверждать, что из всех дифференциальных операторов $P_N(D)$ генераторам КОФ в $L_p\,(p\geq 1, p\neq 2)$ обладающим свойством (10), является только одномерный оператор $\frac{d^2u}{dt^2}$.

Таким образом сложилось впечатление, что не существует многомерных дифференциальных операторов $P_N(D)$, являющихся генераторами КОФ в $L_p\,(p\geq 1, p\neq 2)$.

В связи с этим в 1970 г. С.Г.Крейном были сформулированы следующие проблемы, связанные с сильно непрерывной КОФ:

1). Существуют ли многомерные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, являющиеся генераторами КОФ в пространствах L_p $(p\geq 1$, $p\neq 2)$, в частности, в пространствах с равномерной метрикой?

2). Попытаться найти критерий генератора КОФ, содержащий лишь конечное число проверяемых условий, в отличие от (10), где число таких условий бесконечно.

3). Получить достаточное условие генератора КОФ не в терминах квадратного корня оператора.

Наряду с задачей Коши, другой класс классических задач для уравнения $\frac{d^2u}{dt^2}=Au$, при $t\in[0,T]$ составляют краевые задачи. Корректной разрешимости таких задач посвящены многочисленные исследования С.Г.Крейна, П.Е.Соболевского, М.Л.Горбачука и их учеников, а также В.М.Борок, И.В.Мельниковой.

Вместе с тем основополагающие работы М.В.Келдыша (1951 г.), В.Феллера (1952 г.), С.Г.Михлина (1954 г.), А.Д.Вентцеля (1956 г.) положили начало исследованию вырождающихся дифференциальных уравнений и, в частнос .., изучению оператора

$$\ell_t u(t) = a(t)u''(t) + b(t)u'(t) + c(t)u(t) \tag{II}$$

с точки зрения постановки "граничных" условий в зависимости от степени вырождения коэффициентов.

Фундаментальные результаты в этом направлении получены В.П.Глушко Он также рассмотрел коэрцитивную разрешимость краевых з..дач, связанных с абстрактным дифференциальным уравнением

$$\ell_t u(t) + Au(t) = f(t), \tag{I2}$$

где A - линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве.

Аналогичные вопросы для уравнения (I2), рассмотренного в банаховом пространстве со специальным порядком вырождения коэффициента $a(t)$, изучались в работах П.Е.Соболевского и его учеников.

Ц е л ь р а б о т ы. Решить указанные выше проблемы, связанные с сильно непрерывной косинус - функцией, и, как следствие, получить ответ на вопрос И.Г.Петровского в весьма важном для теории и приложений случае $\ell = \tau = 0$.

Изучить ТРК разрешимость краевых задач, связанных с уравнением (I2) при наиболее слабых ограничениях на оператор A, действующих в банаховом пространстве.

Исследовать свойства гладкости решений соответствующих точно равномерно корректных задач.

М е т о д и к а и с с л е д о в а н и я. В работе используются методы функционального анализа, обыкновенных уравнений и уравнений в частных производных; методы комплексного анализа, в частности, метод абстрактного преобразования Лапласа.

Конечно разностные методы и метод мульти - аддитивных неравенств типа Ландау - Адамара - Колмогорова.

Метод регуляризации некорректных задач в соответствии с теорией А.Н.Тихонова, М.М.Лаврентьева, В.К.Иванова.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертации, новые.

I. Решена приведенная выше проблема сильно непрерывной КОФ. В связи с этим получены: а) новый критерий генератора КОФ; б) новый критерий генератора аналитической полугруппы, более естественный с точки зрения приложений и теоретических исследований по сравнению с классическим критерием Иосиды - Соломяка; в) удобные в приложениях достаточные условия генератора КОФ и аналитических полугрупп для широкого класса дифференциальных операторов; г) найден алгоритм построения генераторов КОФ, соответствующих многомерным дифференциальным операторам с постоянными коэффициентами в пространствах с равномерной метрикой. Тем самым в одном важном частном случае дан ответ на проблему И.Г.Петровского; д) применяемый здесь метод регуляризации некорректных задач с помощью C_0 - полугрупп позволил исследовать ТРК разрешимость задачи Коши для абстрактного уравнения с дробными производными и получить необходимые и достаточные, а также легко проверяемые достаточные условия такой разрешимости.

2. Доказана ТРК разрешимость соответствующих краевых задач для уравнения (I2), где оператор A является генератором C_0 - полугруппы, а коэффициенты оператора ℓ_t имеют порядок вырождения,

изученный М.В.Келдышем и В.П.Глушко.

3. Получены оценки производных решений приведенных выше задач, с помощью доказанных здесь мульти - аддитивных неравенств, обобщающих неравенства Коши - Адамара - Колмогорова, Гальперина - фон Неймана, Брезис - Розенкранца - Зингера.

Практическая и теоретическая значимость. Результаты работы носят как теоретический так и прикладной характер. Они могут быть использованы для дальнейших исследований корректной разрешимости начально- краевых задач для уравнений различных типов.

Вместе с тем методы доказательств, применяемые здесь (метод регуляризации, конечно-разностный метод), носят конструктивный характер и позволяют строить алгоритмы приближенного решения исследуемых задач. Отметим, что точно равномерно корректные задачи не требуют повышений гладкости начальных данных в зависимости от слоя при доказательстве сходимости соответствующих разностных схем.

Аппробация работы. Результаты работы систематически обсуждались на научных семинарах кафедры функционального анализа и операторных уравнений Воронежского госуниверситета (рук. проф. П.Е.Соболевский), неоднократно на семинаре под руководством С.Г.Крейна (Воронежский ЛТИ), на семинаре по дифференциальным уравнениям в Институте математики и механики ВГУ (рук.проф. Ю.В.Покорный), на семинаре по дифференциальным уравнениям в частных производных ВГУ (руководители проф.И.А.Киприянов и проф.В.З.Мешков), на семинаре по дифференциальным уравнениям (Воронежский политехнический институт, рук.проф. В.Д.Репников), на семинаре под руководством проф. Я.Б.Рутицкого (Воронежская строительная академия), на семинаре под руководством М.Л.Горбачука в Киевском институте математики Укр. АН.

Результаты работы докладывались на международных конференциях: по дифференциальным уравнениям и их приложениям (г.Русе,Болгария, 1981 г.), по дифференциальным и интегральным уравнениям (Самара, 1992 г.). Во Всесоюзных математических школах: Воронежская зимняя математическая школа (1967-1994 гг), XIУ школа по теории операторов (Новгород, 1989 г.), ХУ школа по теории операторов (Ульяновск, 1990 г), IУ Крымская Осенняя математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (п.Ласпи, 1993 г).

Основные результаты диссертации обсуждались с ведущими специалистами в области операторных уравнений и их приложений профессорами Дж. Да Прато (Нормальная школа, г.Пиза, Италия), Дж.Голстейн (Университет, Новый Орлеан, США).

П у б л и к а ц и и. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [I - I9] . В диссертационную работу включены только те результаты, которые принадлежат лично автору.

О б ъ е м и с т р у к т у р а р а б о т ы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Она изложена на 230 страницах машинописного текста. Список литературы включает 141 название.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дана формулировка задач, решаемых в диссертации (задача И.Г.Петровского, проблема косинус - функции и др.). И дан обзор работ, содержащих результаты, полученные в этом направлении к настоящему времени.

В первой главе для дифференциального выражения, которое будем называть оператором Келдыша - Феллера,

$$l_t u(t) = a(t)u''(t) + b(t)u'(t) + c(t)u(t), \quad (13)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ - достаточно гладкие функции для $t \in (0,\infty)$, допускающие обращение в ноль или бесконечность на концах интервала $(0,\infty)$ и $a(t) \geq 0$, устанавливаются в нормах $L_p (p \geq 1)$ неравенства вида

$$\|u\|_q \leq \Phi_{01}(k)\|u\|_p + \Phi_{02}(k)\|l_t u\|_r + \Phi_{03}|l_1 u|, \quad (14)$$

$$\|u'\|_q \leq \Phi_{11}(k)\|u\|_p + \Phi_{12}(k)\|l_t u\|_r + \Phi_{13}|l_2 u|. \quad (15)$$

Здесь функции $\Phi_{ij}(k) (i=0,1; j=1,2,3)$ строятся по коэффициентам $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, а k - параметр (вообще говоря, произвольный), l_1 и l_2 - некоторые линейные функционалы.

При этом рассматриваются два случая:

1) $l_t \in T_+$, если существует $k_0 > -\infty$, такое, что выполняется неравенство $\frac{b(t)}{a(t)} \geq k_0$ для всех $t \in (0,\infty)$;

2) $l_t \in T_-$, если существует $k_0 < \infty$, такое, что $\frac{b(t)}{a(t)} \leq k_0$.

В каждом из этих случаев оператору l_t ставится в соответствие функция $T(k,t) = T_+(k,t) = ka(t) + b(t)$ в случае $l_t \in T_+$ и $T(k,t) = T_-(k,t) = ka(t) - b(t), k > k_0$, в случае $l_t \in T_-$.

В частности, если $\inf\limits_{t \in (0,\infty)} T(k,t) = T(k) \not\equiv 0$, $p = q = r = \infty$, неравенство (15) имеет вид

$$\|u'\| \leq 2k\|u\| + \frac{\|l_t u\|}{T(k)} \quad (k > k_0). \quad (16)$$

В одном важном случае, когда

$$l_t u = t^\alpha u''(x) + bt^\beta u'(t) \quad (17)$$

$(\alpha, \beta \leq 0)$. Функции $T(k)$ и $\Phi_{ij}(k)$ вычисляются явно и после минимизации по параметру κ из неравенств (I4),(I5) следует мультипликативные неравенства вида:

$$\|u\|_q \le M_1 \|u\|_p^{\gamma_1} \|\ell_t u\|^{\gamma_2}, \tag{I8}$$

$$\|u'\|_q \le M_2 \|u\|_p^{\gamma_3} \|\ell_t u\|^{\gamma_4} \tag{I9}$$

с известными параметрами $M_1, M_2, \gamma_i (i=1,..,4)$.

В § 5 обсуждается вопрос о точности этих неравенств. Ответ на который содержится в следующих теоремах:

Обозначим через $W^{\alpha,\beta}_{p,r}$ класс функции $u(t)$ таких, что $u \in L_p \cap C$, $u(0)=0$.

Т е о р е м а I. Для того, чтобы функция $u(t)$ из класса $W^{\alpha,1-\alpha}_{p,r}$ удовлетворяла неравенству (I8), необходимо и достаточно чтобы $q \ge \max(p,r)$, $\gamma_1+\gamma_2=1$,

$$\gamma_2 = \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{2-\frac{1}{r}-\alpha+\frac{1}{p}}.$$

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы функция $u \in W^{\alpha,\alpha-1}_{p,r}$ удовлетворяла неравенству (I9) при $q=\infty$, $p \ge 1$, $r \ge 1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\gamma_1+\gamma_2=1, \qquad \gamma_2 = \frac{1+\frac{1}{p}}{2+\frac{1}{p}-\alpha-\frac{1}{r}}.$$

Для $\alpha=1$, $\beta=0$, $b>0$, $p=r=q=\infty$ Брезисом, Розенкранцем и Зингером получено неравенство $\|u'\| \le \frac{2\|\ell_t u\|}{b}$. Отметим, что из (I9) в этом случае следует точное неравенство $\|u'\| \le \frac{\|\ell_t u\|}{b}$. В лемме 2.5.4 доказана неулучшаемость константы

Заметим также, что если коэффициенты в операторе l_t такие, что $a(t)\equiv 1$, а $b(t)$ и $c(t)$ ограничены, то неравенство (I5) уточняет теорему Гальперина - фон Неймана, в которой лишь констатирует принадлежность функции $u'(t)$ пространству L_q $(q \geq \max(p,r))$ но не указывается квалифицированная оценка.

Неравенства типа (I4), (I5) используются в диссертации в трех направлениях:

I. Исследуются свойства гладкости решений соответствующих задач для уравнений, содержащих оператор Келдыша - Феллера.

2. Эти неравенства позволяют определить операторы, подчиненные в смысле Т.Като оператору Келдыша - Феллера, что является важным в теории возмущений линейных операторов.

3. Они являются основными при установлении аппроксимационных свойств, соответствующих разностных схем в главе 5.

В 1952 году В.Феллер, используя теорию полугрупп, исследовал параболическое уравнение

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=a(x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+b(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}=l_x u(x), \quad (20)$$

$$t\geq 0 \quad -\infty\leq r_1<x<r_2\leq\infty$$

с точки зрения существования и единственности его решения, удовлетворяющего начальному условию

$$u(0,x)=g(x)\ , \quad g(x)\in\mathcal{B}(r_1,r_2)). \qquad (2I)$$

Аналогичные вопросы были рассмотрены и А.Д.Вентцелем. Этими авторами были указаны наиболее общие дополнительные условия, при которых дифференциальное выражение $l_x u=a(x)u''(x)+b(x)u'(x)$ порождает генератор C_0- полугруппы в пространствах $\mathcal{B}(r_1,r_2)$ и, следовательно, задача (20)-(21) ТРК разрешима в пространствах $\mathfrak{B}$.

Однако, свойства гладкости соответствующих решений этими авторами не изучались.

Впервые, для частного случая $a(x)=x$, $b(x)=b$, $b>0$ $r_1=0$, $r_2=\infty$ Х.Брезис, В.Розенкранц и В.Зингер изучили свойства дифференцируемости решения задачи (20)-(21), с целью приложения к исследованию диффузионных процессов.

Во второй главе диссертации с помощью результатов, полученных в первой главе, устанавливаются неравенства для норм производных решения задачи Коши в случае $l_x \in T_+ (T_-)$. Результаты получены путем изучения сначала свойств решений стационарного уравнения

$$a(x)u''(x) + b(x)u'(x) - \lambda u(x) = f(x), \tag{22}$$

а затем применяется теорема ХИФФМ о существовании C_0 полугруппы.

Для уравнения (22) получены следующие теоремы.

Теорема 3. Если $l_x \in T_-$, то уравнение (22) при любом $\lambda>0$ имеет однопараметрическое семейство решений $u \in \mathfrak{B}^1$ и для того, чтобы какое-либо из них удовлетворяло неравенствам

$$\|u\| \le \frac{\|f\|}{\lambda}, \tag{23}$$

$$\|u'\| \le \frac{2[\lambda T(\lambda)]^{-1}}{\lambda} \|f\|, \tag{24}$$

необходимо и достаточно, чтобы $|u(0)| \le \frac{\|f\|}{\lambda}$.

Теорема 4. Если $l_x \in T_+$ и $\frac{b(x)}{a(x)} \in L_{(0,x_0)}$ $(x_0 \in (0,\infty))$ и фиксировано, то уравнение (22) имеет единственное решение $u \in \mathfrak{B}^1$ и для него справедливы неравенства (23), (24).

Т е о р е м а 5. Пусть R_T - область значений функции $T(k)$; тогда, если в условиях теоремы 4 $\frac{b(x)}{a(x)} \in L(0,x_0)$, то уравнение (22) имеет однопараметрическое семейство решений $u \in \mathfrak{B}$.

Пусть A_δ - оператор, определенный дифференциальным выражением l_x и областью пределения $\mathcal{D}(A_\delta)$, состоящей из функций $g(x)$, обладающих свойствами

$$l_x g \in \mathfrak{B},\ g \in \mathfrak{B},\ \lim_{x\to 0}[l_x g(x) - \delta g'(x)] = 0 \quad (\delta - \mathrm{const});$$

тогда справедлива

Т е о р е м а 6. Если $l_x \in T_+$, $k_0 = \inf\limits_{x\in(0,\infty)} \frac{b(x)}{a(x)}$, $g \in \mathcal{D}(A_\delta)$, то задача (20)-(21) имеет единственное решение $u(t,x) = U(t)g(x)$ со следующими свойствами:

а) $U(t)$ - C_0 полугруппа,

б) $\sup\limits_{x\in(0,\infty)} |u(t,x)| \leq \exp(\omega t)\|g\|$,

$$\sup_{x\in(0,\infty)} \left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right| \leq \frac{2}{\delta}\exp(\omega t)\left[\|l_x g\| + \omega\|g\|\right],$$

$$\omega = \begin{cases} \max(\delta k_0, 0), & \text{если } 0 < \delta \leq \inf R_T, \\ \delta T^{-1}(\delta), & \text{если } \delta \in R_T. \end{cases}$$

Т е о р е м а 7. Если $l_t \in T_-$ и оператор A определен дифференциальным выражением l_x и областью определения $\mathcal{D}(A) = \{u : u \in \mathfrak{B},\ l_x u \in \mathfrak{B},\ \lim\limits_{x\to 0} l_x u(x) = 0\}$, то задача (20)-(21) имеет единственное решение, представимое в виде

$$u(t,x) = U(t)g(x), \tag{25}$$

где $U(t)$ - сжимающая C_0 - полугруппа. При этом

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\| \le \left(\|g\| + \|\ell_x g\| \right). \qquad (26)$$

Т е о р е м а 8. Если $\ell_x \in T_-$ и $\mathcal{D}(A) = \{ u : u \in \mathfrak{B}, \ell_x u \in \mathfrak{B}$ $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0 \}$, то задача (20)-(2I) имеет единственное решение $u(t,x) \in \mathfrak{B}_0$ и для него справедливо представление (25) и неравенство (26).

Применяя полученные результаты в § 5 гл.2, исследуются свойства гладкости решения задачи Коши для дифференциального уравнения (20) в случае, когда

$$\ell_x u(x) = (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2) \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + (\beta_0 + \beta_1 x) \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}, \qquad (27)$$

$$0 \le x < \infty, \quad \alpha_1 \ge 0, \ \beta_1 \ge 0, \ \beta_0 > 0.$$

При этом нам потребуются пространства

$$\mathfrak{B}^m_\alpha(R^1_+) = \{ f(x) : f \in \mathfrak{B}, \ (1+x)^\alpha f^{(m)}(x) \in \mathfrak{B} \},$$

$$\|f\|_{\alpha,m} = \|f\|_{\mathfrak{B}} + \|(1+x)^\alpha f^{(m)}\|_{\mathfrak{B}}.$$

Х.Брезис, В.Розенкранц и Б.Зингер показали, что при $\alpha_2 = \beta_1 = 0$, $\alpha_1 = 1$, то A, заданный дифференциальным выражением (27), является генератором сжимающей C_0 полугруппы $U(t) \div \mathfrak{B}^m_0 \to \mathfrak{B}^m_0$ относительно нормы $\|f\|_m$, т.е. $\|U(t)f\|_m \le \|f\|_m$ и из этих оценок выводились свойства дифференцируемости решения задачи (20)-(2I).

Здесь основной является

Т е о р е м а 9. A – есть генератор сильно непрерывной сжимающей полугруппы $U(t) : \mathfrak{B}^m \div \mathfrak{B}^m$ с областью определения

$$\mathcal{D}_m(A) = \{ g : g \in C^{m+2} \cap \mathfrak{B}^{m+1}, \ \lim_{x\to 0} (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2) g^{(m+1)}(x) = 0,$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) g''(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} g^{(l)}(x)=0,\ 0<l\le m$; плотной в $\mathfrak{B}^m$.

Если $g\in \mathcal{D}_m(A)$, то $u(t,x)=U(t)g(x)$ есть единственное решение задачи (20)-(21) со следующими свойствами:

$$\sum_{l=0}^{n}\left\|\frac{\partial^l u(t,x)}{\partial x^l}\right\| = \|u(t,x)\|_m \le \|g\|_m,\ t\ge 0,$$

$$\sup_{x\ge 0} \beta(x)\left|\frac{\partial^{m+1} u(t,x)}{\partial x^{m+1}}\right| \le 2\|Ag\|_m,\ t\ge 0.$$

$$\sup_{x\ge 0} \alpha(x)\left|\frac{\partial^{m+2} u(t,x)}{\partial x^{m+2}}\right| \le 3\|Ag\|_m .$$

Наконец, если $g\in\mathfrak{B}^m$ и $(1+x)^\alpha g^{(m)}\in\mathfrak{B}$, то $\exists\,\mu$ такое, что

$$\sup_{x\ge 0}\left|(1+x)^\alpha\,\frac{\partial^m U(t)g(x)}{\partial x^m}\right| \le \exp(\mu t)\|g\|_{m,\alpha} .$$

Иссле дование гладкости ограниченного решения задачи

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = x^\alpha\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + b x^{\alpha-1}\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}, \tag{28}$$

$$u(0,x)=g(x). \tag{29}$$

Здесь $x\in(0,\infty)$, $t\in[0,\infty)$, b - const, $g\in\mathfrak{B}(R^1)$, $0\le\alpha\le 1$. Уравнения вида (28) рассматривались С.Стоуном (1961 г).

Очевидно, что в случае $b>0$, $l_x\in T_+$ и $\frac{b(x)}{a(x)}=\frac{b}{x}\,\bar{\in}\, L(0,x_0)$ и, кроме того, $T_+(k)=\left(\frac{b}{\alpha}\right)^\alpha\left(\frac{k}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}$.

Следовательно, по теореме 4 задача (28)-(29) имеет единственное ограниченное при каждом $t>0$ решение. Оно представимо в виде $u(t,x)=U(t)g(x)$, где $U(t)$ - сжимающая в $\mathfrak{B}$ полугруппа и, кроме того,

$$\left\|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right\| \le \frac{(2-\alpha)}{|b|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}}\left(2\|u\|\right)^{\frac{1-\alpha}{2-\alpha}}\|\ell_x u\|^{\frac{1}{2-\alpha}}.$$

Кроме того, справедлива следующая теорема, обобщающая теорему Х.Бразиса, В.Розенкранца и В.Зингера.

Т е о р е м а 10. Если функция $g(x)$ такая, что $Ag\in\mathfrak{B}^{(1)}_{\frac{1}{2}}$, $g\in\mathfrak{B}^{(1)}$, то для единственного решения задачи (28)-(29) справедливы оценки

$$\left|x\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right| \le 2\|Ag\|_1^{\frac{1}{2}}\|g\|_1^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|x^2\frac{\partial^3 u(x^2,2t)}{\partial x^3}\right| \le \|Ag\|_{1,\frac{1}{2}} + 2\|Ag\|_1^{\frac{1}{2}}\|g\|_1^{\frac{1}{2}},\quad b>\frac{1}{2},$$

$$\left|x^3\frac{\partial^3 u(x^2,2t)}{\partial x^3}\right| \le \exp(\mu t)\|Ag\|_{1,\frac{1}{2}} + (1+b)\|Ag\|_1^{\frac{1}{2}}\|g\|_1^{\frac{1}{2}},\quad b<\frac{1}{2}.$$

Центральными главами диссертации являются третья и четвертая. Третья глава содержит новый критерий генератора аналитической полугруппы, отличный от классического критерия Соломяка - Иосиды и который оказывается более естественным, как с точки зрения приложений к исследованию конкретных операторов, так и при применении теории аналитических полугрупп к решению проблемы косинус-ной функции, основной в настоящей работе.

В третьей главе основной является

Т е о р е м а 11. Для того, чтобы замкнутый оператор A был генератором аналитической полугруппы в банаховом пространстве B, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{\mathcal{D}(A)} = B$ и существовали такие числа M, ν, ω и $\alpha > 1$, что для всех λ: $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ выполняется неравенство

$$\|R(\lambda^\alpha, A)\| \leq M\left(\frac{|\lambda|}{\mathrm{Re}\lambda}\right)^\nu \cdot \frac{1}{(\mathrm{Re}\lambda)^{\alpha-1}(\mathrm{Re}\lambda - \omega)} . \qquad (30)$$

При этом для полугруппы $U(z)$ в секторе

$$S_\alpha = \left\{ z : |\mathrm{Im}\, z| < \mathrm{Re}\, z \left|\mathrm{ctg}\frac{\alpha\pi}{2}\right| \right. \qquad (31)$$

справедливо представление

$$U(z) = -\frac{\alpha}{2\pi i}\int_{\omega - i\infty}^{\omega + i\infty} \exp(z\mu^\alpha)\mu^{\alpha-1} R(\mu^\alpha, A)\, d\mu =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\omega,\alpha}} \exp(\lambda z) R(\lambda, A)\, d\lambda, \quad 1^\alpha = 1. \qquad (32)$$

$U(0) = I$.

Здесь контур $\Gamma_{\omega,\alpha}$ состоит из $\lambda = \left(\frac{\omega}{\cos\frac{\varphi}{2}}\right)^\alpha \exp(i\varphi)$, $|\varphi| < \frac{\alpha\pi}{2}$, $\omega > \omega_0 > 0$.

Следующая теорема содержит достаточные условия генератора аналитической полугруппы и является полезной в приложениях.

Пусть $\Omega \subset R^n$ - ограниченная или неограниченная область, и $\mathfrak{B}_\rho(\Omega) = \{ f(x) : \rho(x) f(x) \in \mathfrak{B}(\Omega), \rho(x) > 0 \}$.

Предположим, что A - линейный оператор такой, что $\varphi(x) = \frac{1}{\rho(x)}$ является его собственной функцией, т.е. $A\varphi = \mu\varphi$, причем $\mu \in R^1$.

Кроме того, будем предполагать, что для всех λ: $\mathrm{Re}\lambda > \omega_0 > 0$ и $\alpha \in (1, 2]$ справедливо представление для резольвенты

$$(\lambda^\alpha I - A)^{-1} f = \int_\Omega K(x, s, \lambda) f(s)\, ds; \qquad (33)$$

тогда справедлива

Т е о р е м а I2. Если для ядра $K(x,s,\lambda)$ в (33) выполняется неравенство

$$|K(x,s,\lambda)| \le M K(x,s,\mathrm{Re}\lambda)\left(\frac{|\lambda|}{\mathrm{Re}\lambda}\right)^{\nu}$$

при некоторых M и ν, не зависящих от x , s , λ , то для $R(\lambda^{\alpha},A)$ выполняется неравенство (30) в нормах пространств $\mathfrak{B}_{\rho}(\Omega)$. .

Анализируя ход доказательства этой теоремы, легко получить следующее

С л е д с т в и е I. Если оператор A удовлетворяет условиям теоремы I2 и A_0 - некоторый линейный оператор, подчиненный оператору A в том смысле, что $\mathfrak{D}(A_0) \subset \mathfrak{D}(A)$ и для его резольвенты справедливо представление (33) и для ядра $K_{A_0}(x,s,\lambda)$ выполняется неравенство

$$|K_{A_0}(x,s,\lambda)| \le M\left(\frac{|\lambda|}{\mathrm{Re}\lambda}\right)^{\nu} K_A(x,s,\mathrm{Re}\lambda),$$

то справедлива оценка

$$\|R(\lambda^{\alpha},A)f\|_{\rho} \le M\left(\frac{|\lambda|}{\mathrm{Re}\lambda}\right)^{\nu}\left[(\mathrm{Re}\lambda)^{\alpha}-\mu\right]^{-1}\|f\|_{\rho},$$

где $\rho(x)$ и μ - соответствующие собственная функция и собственное число оператора A .

Из теорем I0, II и следствия I следует

Т е о р е м а I3. Если выполнены условия следствия I и $\mathfrak{D}(A_0)=\mathfrak{B}_{\rho}(\Omega)$, то оператор A_0 является генератором аналитической полугруппы $U(z)$ в $\mathfrak{B}_{\rho}(\Omega)$, причем μ - тип этой полугруппы.

В параграфе 2 третьей главы содержатся различные конкретные примеры генераторов аналитических полугрупп, демонстрирующие приложения приведенных теорем.

Следующий пример содержит положительный ответ на вопрос профессора Да Прато.

Пример I. Пусть $\bar{\Omega}=[-1,1]$, $B=\mathfrak{B}(\Omega)$. Оператор A задается дифференциальным выражением Лагранжа $lu=\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{du}{dx}\right)$ и областью определения $\mathfrak{D}(A)=\{u: u\in\mathfrak{B}, lu\in\mathfrak{B}\}$.

Оказывается, что так заданный оператор A является генератором аналитической полугруппы.

Пример 2. В этом примере для оператора Штурма - Лиувилля $Au=u''(x)+q(x)u(x)$, $x\in R^1$, доказывается следующая

Теорема I4. Для того, чтобы оператор A был генератором аналитической полугруппы в $\mathfrak{B}(R^1)$, достаточно, а в случае $q(x)\geq C>-\infty$ и необходимо, чтобы $q(x)\in S_1$, где S_1 пространство Степанова с нормой $\|q\|=\sup\limits_{s\in R^1}\int_s^{s+1}|q(x)|dx$.

В третьем параграфе для $\Omega=(0,1)$ исследуется оператор A, заданный дифференциальным выражением l_x (I3) при следующих условиях а коэффициенты, введенные М.Л.Келдышем и детально исследованные В.П.Глушко.

Условие $D^{(m)}$. Если при некотором m выполняется неравенство $b(0)+(m-1)a'(0)\leq 0$, то l_x удовлетворяет условию $D^{(m)}$.

Условие E . Если $b(0)-a'(0)>0$, то l_x удовлетворяет условию E .

Обозначим через Q_2 оператор, определенный дифференциальным выражением $l_x u(x)$, удовлетворяющим условию $D^{(m)}$, и областью определения

$$\mathfrak{D}(Q_2)=\{u(t): l_x u\in\mathfrak{B}([0,1]), u\in\mathfrak{B}([0,1]), \delta_0 u(0)-\theta_0 u'(0), \delta_1 u(1)+\theta_1 u'(1)=0, \delta_i^2+\omega_i^2>0, \delta_i>0, i=0,1\}.$$

Q_1 - оператор, определенный дифференциальным выражением $\ell_x u(x)$, удовлетворяющим условию E, и областью определения

$$\mathfrak{D}(Q_1)=\{u(t): \ell_x u \in \mathfrak{B}([0,1]),\ u\in \mathfrak{B}([0,1]),\ \delta u(1)+\theta u'(1)=0,\ \delta^2+\theta^2>0,\ \delta>0\}$$

Таким образом, в определении оператора Q_2 участвуют два граничных условия, а в определении Q_1 - одно.

Q_1 и Q_2, будем называть операторами Келдыша.

Из результатов В.Феллера и А.Д.Вентцеля следует, что операторы Q_1 и Q_2 являются генераторами C_0 полугруппы в пространствах $\mathfrak{B}([0,1])$.

В диссертации этот результат усиливается в следующей теореме.

Т е о р е м а 15. Пусть Q - оператор Келдыша, если $a(x)$, $b(x) \in \mathfrak{B}^{(3)}([0,1])$, то Q является генератором аналитической полугруппы $U(z)$ в полуплоскости $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$.

Глава 4 посвящена решению проблемы косинусной функции и связанной с ней задачей И.Г.Петровского.

Пусть J - одно из множеств: R^1, R^1_+ или $\bar{R}^1_+$ и B - банахово пространство.

Семейство $C(t)$ ограниченных в B линейных операторов называется сильно непрерывной косинус - функцией (КОФ), если оно удовлетворяет условиям:

1. $C(t+s)+C(t-s)=2C(t)C(s)$, $t,s\in J$.

2. $C(0)=I$ (I - тождественный оператор),

3. $C(t)x$ сильно непрерывна по t при любом фиксированном $x\in B$.

Производящим оператором (генератором) КОФ называется линейный оператор A, определенный как сильный предел разности:

$$\lim_{h\to 0} \frac{[C(h)-I]x}{2h^2} = Ax.$$

A замкнут и $\overline{\mathcal{D}(A)} = B$.

Рассмотрим функцию Эрмита $H_{-1}(z)$ с первым отрицательным индексом, $H_{-1}(0)=1$.

$$H_{-1}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp(-s^2 - 2sz)\,ds = \exp(z^2)[1-\Phi(z)],$$

где

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2)\,dt$$

- интеграл вероятности, можно считать, что интегрирование ведется вдоль отрезка прямой, соединяющей точки 0 и z.

$\Phi(z)$ является целой функцией, а $H_{-1}(\alpha z)$, при $\alpha > 0$ - преобразование Лапласа функции

$$g_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{4\alpha^2}\right).$$

Для функции комплексного переменного $F(\lambda)$ со значениями в B введем интеграл

$$H_\tau(t)F(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} H_{-1}(\tau\lambda)\exp(t\lambda)\lambda F(\lambda)\,d\lambda,$$

$\tau \geq 0$, $t \in J$, который будем называть H_τ - преобразованием функции $F(\lambda)$.

Пусть A - линейный оператор, действующий в B и такой, что для всех λ: $\operatorname{Re}\lambda > \omega > 0$ существует резольвента $R(\lambda^2, A) = (A - \lambda^2 I)^{-1}$, тогда справедлива

Т е о р е м а I5 (основная). Для того, чтобы оператор A был производящим оператором КОФ, необходимо и достаточно, чтобы он был производящим оператором аналитической полугруппы и при каждом $t\in \mathfrak{I}$ для H_τ - преобразования резольвенты выполнялась оценка

$$\| H_\tau(t) R(\lambda^2)\| \le M(t), \qquad (34)$$

равномерная по $\tau \in (0,\varepsilon)$

При этом для функции $C(t)$ справедливо представление

$$C(t) = \lim_{\tau\to 0}\left[H_\tau(t) + H_\tau(-t)\right] R(\lambda^2), \qquad \text{если } |t|>0,$$

$$C(0) = I.$$

Здесь предел понимается в сильном смысле.

Следующие результаты являются результатом применения теоремы I5.

Теорема I7. Оператор Штурма - Лиувилля, рассмотренный в примере 2, является генератором КОФ тогда и только тогда, когда выполнены условия теоремы I3.

Теорема I8. Оператор Бесселя, заданный дифференциальным выражением $\ell_x u = u''(x) + \frac{a}{x}u'(x)\,(x\in R_+^1)$ и областью определения $\mathcal{D}(A) = \{\varphi: \varphi\in \mathfrak{B}_0 \cap C^{(2)}, \ell_x u \in \mathfrak{B}_0\}$, является генератором КОФ при $0 \le a < 1$ и не является таковым при $a \ge 1$.

Последняя теорема применяется к исследованию ТРК разрешимости задачи Коши для гиперболических уравнений Трикоми с начальными данными не на линии параболического вырождения

$$y^m \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}, \qquad (35)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = y^m \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \alpha y^{m-1}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}; \qquad (36)$$

$(\alpha - \mathrm{const},\ m>0,\ y>0).$

При этом (35) является уравнением первого рода, а (36) уравнением второго рода, причем для (36) прямая $y=0$ является характеристикой.

Для уравнений (35), (36) хорошо изучена задача Коши с начальными данными на линии вырождения $y=0$ (см, например, монографии Смирнова М.М. по уравнениям смешанного типа).

Здесь исследуется ТРК разрешимость задачи Коши, когда данные Коши задаются на прямой $x=0$.

Исследования проводятся по следующей схеме: уравнения (35), (36) рассматриваются как абстрактные уравнения второго порядка $\frac{d^2u}{dx^2}=Au$ в пространстве непрерывных и ограниченных на $[0,\infty)$ функций с равномерной метрикой, далее применяется полученные здесь результаты для КОФ.

Т е о р е м а I9. Если в уравнении (34) $m\geqslant 0$, то задача Коши ТРК разрешима; если $m<-2$, то задача Коши не ТРК разрешима.

Т е о р е м а 20. Если в уравнении (34) выполнено условие

$0\leq\frac{2\alpha-(1+\alpha)m}{2-m}<1$, то задача Коши ТРК разрешима, если

$\frac{2\alpha-(1+\alpha)m}{2-m}\geqslant 1$, то соответствующая задача Коши не ТРК разрешима.

В пятом параграфе четвертой главы для операторов, рассмотренных в теореме II, доказывается

Т е о р е м а I7. Если для ядра $K(x,s,\lambda)$ в (33) при $\alpha=2$ выполняется условие

$$H_\tau(t)K(x,s,\lambda)\geqslant 0,$$

то имеет место неравенство (34).

В качестве приложения теоремы I7 в шестом параграфе приводится пример многомерного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами, порождающего КОФ в $\mathfrak{B}(R^n)$.

Пусть $\Omega = R^n$ и A - оператор Лапласа $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, определенный в $\mathfrak{B}(R^n)$ по Соболевскому П.В., когда в качестве области определения $\mathcal{D}(A)$ берется множество значений оператора $R(\lambda, A) f = (A - \lambda I)^{-1} f$ для f, пробегающих все $\mathfrak{B}(R^n)$.

Теорема 2I. Оператор A, заданный как нечетные степени Δ^{2k+1} $(k=0,1,\ldots)$ оператора Лапласа в $\mathfrak{B}(R^n)$, является генератором КОФ тогда и только тогда, когда $n \leq 4k+1$.

Следующая теорема, которая доказывается в седьмом параграфе четвертой главы, позволяет строить генераторы КОФ и судить о богатстве класса этих операторов.

Теорема 22. Если A - генератор КОФ в B, то всякий операторный многочлен

$$P_{2m+1}(A) = A^{2m+1} + \sum_{k=0}^{2m} c_k A^k \quad (c_k \in R^1)$$

также является генератором КОФ в B.

Теорема 22 является аналогом теоремы Паке, утверждающей, что если A - генератор аналитической в правой полуплоскости полугруппы $U(t)$ в банаховом пространстве, то такую же полугруппу порождает оператор $P_n(A) = (-1)^{n+1} A^n + \sum\limits_{k=0}^{n} B_k A^k$ при любых линейных и ограниченных в B операторах B_k.

Однако, в отличие от теоремы Паке, утверждение теоремы 22 неверно в случае четного n, что показывается в работе с помощью примера.

Используя метод регуляризации контурного интеграла, примененный выше для построения КОФ, в восьмом параграфе исследуется точно-равномерно корректная разрешимость задачи Коши для уравнений с дробными производными в смысле Лиувилля.

$$\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} = Au(t), \quad t \in R^1_+ , \tag{37}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{d^{\alpha-k} u(t)}{dt^{\alpha-k}} = \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots n , \tag{38}$$

где A - линейный замкнутый оператор с $\overline{\mathcal{D}(A)} = B$,

$$\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} u(s)\, ds,$$

$$n = -[-\alpha], \qquad n-1 < \alpha < n .$$

Для целых $\alpha > 2$ задачу (37)-(38) рассматривал П.А.Киричук с учетом порядка роста решения на бесконечности. В этом случае для равномерной корректности этой задачи необходимо и достаточно, чтобы A был генератором функции Миттаг - Леффлера с параметром α .

В случае дробных регуляризованных производных в смысле Лиувилля задача Коши рассматривалась А.Н.Кочубеем в связи с диффузионными процессами.

Здесь доказывается следующая

Т е о р е м а 23. Для того, чтобы задача (37)-(38) была ТРК разрешима, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа M , ν , ω , что для всех $\lambda : Re\lambda > \omega > 0$ резольвента оператора A удовлетворяла неравенствам

$$\| R(\lambda^\alpha, A) \| \le M \left(\frac{|\lambda|}{Re\lambda} \right)^\nu (Re\lambda)^{1-\alpha} [Re\lambda - \omega]^{-1},$$

$$\|H_\tau(t)\lambda^{-([-\alpha]+1)} R(\lambda^\alpha, A)\| \leq M t^{\alpha+[-\alpha]} \exp(\omega t),$$

$\tau \in (0, \varepsilon)$.

Так же, как и в случае аналитических полугрупп и КОФ, справедлива

Т е о р е м а 24. Пусть для A выполнены условия теоремы I2; тогда для того, чтобы задача Коши (37)-(38) была точно корректно разрешима в нормах пространств $\mathfrak{B}_\rho(\Omega)$, достаточно, чтобы выполнялось условие $H_\tau(t)[\lambda^{n-1}K(x,s,\lambda)] \geq 0$.

Пользуясь полученными результатами, так же как в случае КОФ для нечетных степеней оператора Лапласа в $\mathfrak{B}(R^n)$ доказываются теоремы:

Т е о р е м а 25. Если $0 < \alpha \leq 1$, и $A = \Delta^{2m+1}$ - нечетная степень оператора Лапласа в $\mathfrak{B}(R^n)$, то задача Коши (37)-(38) ТРК разрешима при любых m и n.

Т е о р е м а 26. Если в условиях теоремы 25 $1 < \alpha \leq 2$, то задача Коши (37)-(38) ТРК разрешима тогда и только тогда, когда выполнено неравенство $(n+1) \leq 4(2m+1)(1-\frac{1}{\alpha})$.

В пятой главе рассматривается дифференциальное уравнение

$$Q(t)u(t) + Au(t) = 0, \qquad (39)$$

где $Q(t)$ - оператор Келдыша, A - генератор C_0 полугруппы в B, $t \in \mathcal{J}$, $\mathcal{J}$ - один из интервалов $(0,1)$ или $(0, \infty)$.

О п р е д е л е н и е I. Функция $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$ называется обобщенным решением уравнания (39), если

I) $u(t) \in \mathfrak{B}(B, \mathcal{J})$, 2) $Q(t)u(t) \in \mathfrak{B}(B, \mathcal{J})$,

3) $u(t) \in \mathfrak{D}(A)$, для $t \in \mathcal{J}$, 4) она удовлетворяет уравнению (39) в интервале $\mathcal{J}$.

Рассмотрим следующие краевые задачи:

I. $J=(0,1)$.

$$Q_1 u(t)+Au(t)=0, \tag{40}$$

$$\delta u(1)+\theta u'(1)=\psi,\ \theta\delta>0,\ \psi\in B. \tag{41}$$

$$Q_2 u(t)+Au(t)=0, \tag{42}$$

$$\delta_0 u(0)-\theta_0 u'(0)=\varphi, \tag{43}$$

$$\delta_1 u(1)+\theta_1 u'(1)=\psi,\ \varphi,\psi\in B,\ \theta_i\cdot\delta_i>0\ (i=0,1).$$

Определение 2. Краевая задача (40)-(41) (соответственно (42)-(43)) называется ТРК разрешимой, если для любых $\varphi,\psi\in B$ существует единственное обобщенное решение этой задачи, непрерывно зависящее от φ и ψ в нормах пространства B .

Теорема 27. Пусть q_0 – наименьшее из чисел q, для которых выполняется оценка на резольвенту оператора Q_1 : $\|R(Q_1,\lambda)\|\le M(\mathrm{Re}\lambda-q)^{-1}$, и ω – тип полугруппы, генератором которой я ляется оператор A ; тогда, если $\omega+q_0<0$, то задача (40)-(41) ТРК разрешима и ее решение $u(t,A)$ обладает следующими свойствами:

а) $u(t,A)=S(t)\psi$, , $S(t)$ – сильно непрерывное семейство линейных ограниченных операторов, причем справедлива оценка $\|S(t)\|\le Mu(t,-\omega)$, где $u(t,-\omega)$ – решение задачи (40)-(41) при $A=-\omega$, $\psi=1$;

б) для $\psi\in\mathcal{D}(A)$ справедлива оценка

$$\max\left(\|\theta u''\|,\ \|\delta u'\|\right)\le Mu(t,-\omega)\left(\|\psi\|+\|A\psi\|\right);$$

в) для $\omega<\sigma<-q_0$ справедливо представление

$$S(t)\psi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} u(t,\lambda)R(\lambda)\psi\, d\lambda =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} u^{(h)}(t,\lambda)R(\lambda)\psi\, d\lambda ,$$

где

$$u(t,\lambda) = \frac{(t_{i+1}-t)}{h} u_{i,j}^{(h)} + \frac{(t-t_i)}{h} u_{i+1,j}^{(h)}$$

"ломаная" интерполирующая сеточное решение $u_{ij}^{(h)}$ задачи (40)-(4I) на интервале $(0,1)$.

При этом справедливо представление $u_{ij}^{(h)}(\lambda) = \dfrac{P_{n-i,j}(\lambda)}{P_n(\lambda)}$,

где многочлены $P_{k,j}(\lambda)$ образуют ортогональную систему.

Аналогичная теорема имеет место для задачи (42)-(43), а также для случая

II. $\mathcal{J}=(0,\infty)$, который рассмотрен в последнем седьмом параграфе пятой главы. Здесь исследуются задачи

$$Q_0(t)u(t) + Au(t) = 0, \tag{44}$$

$$Q_1(t)u(t) + Au(t) = 0, \tag{45}$$

$$\delta u'(0) + \theta u(0) = \varphi, \quad \varphi\in B. \tag{46}$$

Если A порождает C_0 полугруппу $U(t)$, имеющую тип $\omega_A<0$, то справедливы теоремы.

Т е о р е м а 28. Пусть $Q_0(t)\in T_+^1$ и выполняется условие E - Келдыша; тогда единственным решением $u(t)\in \mathcal{B}(B,R_+^1)$ уравнения (44) является $u(t)\equiv\Theta$.

Т е о р е м а 29. Пусть $Q_1(t) \in T_-$ и выполняется условие $D^{(m)}$, тогда задача (45) - (46) ТРК разрешима.

Отметим, что поведение решений эволюционных уравнений на бесконечности и , в частности, решение задачи Дирихле для дифференциально-операторного уравнения второго порядка на полуоси изучалась В.М.Горбачуком.

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИССЕРТАЦИИ ОПУБЛИКОВАНЫ В СЛЕДУЮЩИХ РАБОТАХ:

1. Костин В.А. Пространства $L_{p,\varphi}$ и эволюционные урав: ния // Дифференциальные уравнения.- 1969.-5, N 9.- С. 1406-1414.
2. Костин В.А. О точности некоторых оценок // Тр. НИИМ ВГУ.- Воронеж, 1971.- С. 75-81.
3. Костин В.А. Об одном эволюционном уравнении с вырождением // Дифференциальные уравнения.- 1974.-10, N 9.- С. 1607-1615.
4. Костин В.А. О гладкости решений некоторых уравнений параболического типа. I// Дифференциальные уравнения.- 1976. -12. N 8.- С. 1495-1506.
5. Костин В.А. О гладкости решений некоторых уравнений параболического типа.II// Дифференциальные уравнения.- 1976. -12. N 9.- С. 1619-1624.
6. Костин В.А. О гладкости решений некоторых уравнений параболического типа. III// Дифференциальные уравнения.- 1976. -12. N 11.- С. 2097-2100.
7. Костин В.А. Об одном неравенстве для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка // Методы решения операторных уравнений.- Воронеж. ВГУ, 1978,- с.82-87.
8. Костин В.А. О некоторых неравенствах для обыкновенного дифференциального оператора второго порядка.- Воронеж. - 1980. - 28с. - Деп. в ВИНИТИ, 15.Х1.80, N 1264-80.
9. Костин В.А. Обобщенные полиномы Чебышева от оператора и их применение к исследованию разностных схем. - Воронеж. - 1980 - 26с. - Деп. в ВИНИТИ, 4.3.80, N 4684-80.
10. Костин В.А.О решении первой краевой задачи для уравнений второго порядка в банаховом простр а нотве // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и их приложениям.-

РУСЕ , 1981.- С. 116.

11. Костин В.А. Применение трехдиагональных матриц в решении дифференциальных уравнений. - Воронеж. - 1988 - 28с. - Деп. в ВИНИТИ, 17.1.88, N 155-1388.
12. Костин В.А. Об одном критерии сильно непрерывной косинус-функции // XIV школа по теории операторов, 1989 г.:(Тез. докл.), Новгород, 19 . - С.32.
13. Костин В.А.Об аналитических полугруппах и сильно непрерывных косинус-функциях //Докл. АН ССР.- 1989.- 307, N 4.- С. 796-799.
14. Костин В.А. К задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Дифференциальные уравнения в частных производных.- Новосибирск, 1989.- С.93 - 116.
15. Костин В.А. О точно равномерно корректн разрешимости задачи Коши // Докл. АН СССР.- 1991.- 319, N1.- С. 38-41.
16. Костин В.А.Задача Коши для гиперболических уравнений Трикоми с начальными данными не на линии параболического вырождения // Дифференциальные уравнения.- 1991.- -Т. 27 N 4.- С.716-717.
17. Костин В.А.К задаче Коши для абстрактных дифференциальных Уравнений с дробными производными //Докл. АН СССР.- 1992.- 326, N 4.- С. 597-600.
18. Костин В.А. О задаче Коши для абстрактного гиперболического уравнения //Междунар. науч. конф. по дифференц. и интегр. уравнениям ,Самара, 1992 г.: (Тез. докл.).- Самара, 1992.- С.135
19. Костин В.А. К решению одной проблемы, связанной с абстрактной косинус-функцией // Докл. АН России.- 1994.- 336, N5.- С.546-549.

ВКостин

Подп. в печ. 27.04.94. Формат 60x84/16. Бумага тип. Офс. печать.
Усл. печ. л. 1,86. Усл. кр.-отт. 1,86. Уч. - изд. л. 1,5
Тираж 100 экз. Зак. 115 Бесплатно

Отпечатано в Институте математики АН Украины
252601 Киев 4, ГСП, ул Терещенковская 3