НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

Ревчугов Сергій Олексійович

ГЕОМЕТРІЯ ПРОСТОРІВ l_p, АПРОКСИМАЦІЯ І РЕЗОНАНСНІ ТЕОРЕМИ

01.01.01 - математичний аналіз

АВТОРЕФЕРАТ

Дисертації на здобуття вченого ступеня доктора фізико - математичних наук

Київ - 1994

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Дніпропетровському державному університеті

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор КОНЯГІН С.В.

доктор фізико-математичних наук, професор ЛИГУН А.О.

доктор фізико-математичних наук, професор ШЕВЧУК І.О.

Провідна установа - Одеський державний університет

Захист відбудеться "14" марта 1995 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої ради Д 016.50.01 при Інституті математики АН України за адресою: 252601, Київ-4, ГСП, вул.Терещенківська, 3

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці Інституту.

Автореферат розіслано "____" ____________ 1994 р.

Вчений секретар спеціалізованої ради ГУСАК Д.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В роботі досліджуються 3 кола задач:

I. Обчислення констант Юнга L_p -просторів.
2. Резонансні теореми для послідовностей, обмежених за мірою операторів.
3. К - інтерполяція в задачах рівномірного наближення функцій.

Для обмеженої множини в нормованого простору його чебишовським радіусом називають точну нижню межу радіусів всіх куль, які містять у собі цю множину, а константою Юнга - відношення чебишовського радіуса до діаметру множини. Константою Юнга (к.Ю) простору називають точну верхню межу цих констант по всіх обмежених множинах в цього простору. Це є важлива геометрична характеристика простору.

Ще в 1901 р. Г.Юнг обчислив ці константи для скінченновимірних евклідових просторів, а в 1952 р. А.Раутледж обчислив к.Ю простору L_2. С.Б.Стечкін довів, що к.Ю простору $L_p[0,2\pi]$ тісно пов'язана з точною константою в теоремі Джексона для апроксимації функцій константами. За допомогою цього факту В.І.Бердишев в 1967 р. одержав оцінки знизу к.Ю просторів $L_p[0,2\pi]$, $1\le p\le\infty$, котрі у випадках $p=1;2;\infty$ співпали з точними значеннями к.Ю. Таким чином, обчислення констант Юнга просторів L_p тісно пов'язане як з екстремальними геометричними задачами в цих просторах, так і з задачами теорії апроксимації функцій, і актуальною є задача створення методів обчислення цих констант.

Задачі п.2 виникли у зв'язку з дослідженнями збіжності за мірою кратних рядів Фур'є. Відома теорема А.М.Колмогорова стверджує, що для довільної функції з $L[0,2\pi]$ її ряд Фур'є збігається за мірою. Однак для функцій багатьох змінних це вже не так. Результати, отримані за останні роки Р.Д.Гецадзе та С.В.Конягіним, показують, що існують функції з $L(\mathbb{T}^m)$, $m>1$, часткові суми Фур'є котрих розбігаються за мірою (спектри часткових сумм знаходяться в гомотетах опуклого центрально-симетричного тіла). Тому виникає потреба в лінійних методах підсумовування кратних рядів Фур'є, які б гарантували збіжність за мірою для інтегровних функцій. А для цього актуальним є знаходження критеріїв збіжності за мірою послідовностей значень операторів, визначених на просторах вимірних функцій.

Задачі п.3 пов'язані з рівномірною апроксимацією неперервних функцій. Для періодичних функцій однієї змінної М.П.Корнійчуком у 1963 р. був побудований метод точного обчислення найкращих наближень тригонометричними поліномами класів функцій, що задаються опуклою вгору мажорантою їх модулів неперервності. Цей метод грунтується на проміжному наближенні даного класу іншим класом функцій, для котрого найкраще наближення поліномами вже відоме. Пізніше Я.Петре запропонував інтерпретацію цього методу у термінах теорії інтерполяції операторів за допомогою введенного ним поняття К-функціоналу.

В теорії апроксимації неперервних функцій, визначених на довільних метричних компактах, на цей час є багато нерозв'язаних екстремальних задач. Тому виникає потреба в узагальненні методу проміжного наближення на випадок функцій, визначених на довільних метричних компактах.

<u>Мета роботи.</u> I. Обчислити константи Юнга L_p -просторів.
II. Знайти критерії поточкової обмеженості за мірою послідовності значень операторів. Застосувати отримані критерії до задач дослідження збіжності за мірою кратних функціональних рядів.
Ш. Довести точні інтерполяційні теореми для операторів, що діють у просторах функцій, неперервних на метричних компактах. Застосувати ці теореми до задач наближення одного класу функцій іншими.

<u>Методика дослідження.</u> Для обчислення к.Ю L_p -просторів доводяться деякі спеціальні L_p -нерівності типу нерівностей Кларксона і Шенберга. При доведенні резонансних теорем для неперервних за мірою операторів застосовується метод усереднення по зсувах функцій та усіляких роз-

поділах знаків. Для проміжного наближення функцій, заданих на метричних компактах, точно обчислюється K-функціонал відповідних пар просторів.

Крім цього, об'єднує всі ці задачі систематичне застосування при їх розв'язанні ідей та методів теорії інтерполяції операторів.

Наукова новизна. В роботі одержані такі результати:

1) обчислені константи Юнга просторів $L_p[0, 2\pi]$ (глава I);
2) отримані двосторонні оцінки констант Юнга скінченновимірних просторів l_p^n, котрі для деяких вимірностей дають точне значення к.Ю (глава I);
3) доведені точні достатні умови відокремленості двох множин гіперплощиною в L_p у вигляді нерівності між діаметрами і відстані між цими множинами (глава I);
4) одержані критерії поточкової обмеженості за мірою послідовності операторів (глава II);
5) досліджена збіжність за мірою середніх Бохнера-Ріса рядів по власних функціях оператора Лапласа (глава II);
6) доведені точні інтерполяційні теореми для операторів, що діють у просторах функцій, неперервних на метричних компактах (глава III).

Теоретична і практична значимість. Результати роботи мають теоретичний характер. Ці результати, а також методи їх одержання, можуть бути застосовані в теорії функцій та функціональному аналізі.

Апробація роботи. Основні результати дисертації доповідались на семінарах по теорії функцій Дніпропетровського університету (В.П.Моторний), Інституту математики АН України (М.П.Корнійчук, О.І.Степанець), а також на семінарах С.Б.Стечкіна в Математичному інституті РАН ім.В.О.Стеклова, В.М.Тихомірова і П.Л.Ульянова в МДУ.

Крім цього, з результатами досліджень автор виступав з доповідями і лекціями

- на міжнародних, всесоюзних і республіканських школах і конференціях (Саратов, 1986,1992 рр.,Луцьк, 1989 р.,Одеса,1991, 1992 рр., Київ, 1990 р.,Дніпропетровськ, 1986,1990,1993 рр., Кам'янець-Подільський, Воронеж, 1992,1993 р.);

– в Міжнародному математичному центрі ім.С.Банаха, Варшава, 1989 р.

<u>Публікації.</u> По темі дисертації опубліковано 18 робіт, 9 з них склали основу дисертації. Список цих робіт приведений в кінці автореферату.

<u>Структура і об'єм роботи.</u> Робота складається із вступу, трьох глав і списку цитованої літератури. Об'єм роботи – 190 сторінок машинопису.

ОГЛЯД ЗМІСТУ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі приведені постановки задач, сформульовані основні результати і вказані зв'язки з дослідженнями інших авторів.

Перша глава складається із вступу, 8 параграфів і присвячена константам Юнга L_p -просторів та суміжним екстремальним задачам.

В § I доводяться деякі точні L_p -нерівності, які є аналітичною основою подальших результатів. Далі для числа $p\in[1,\infty)$ позначимо $p'=p(p-1)^{-1}$, $t=\min\{p,p'\}$.

Теорема I.I Нехай x_i, y_j, z_{ij} $(i=1,\dots,k;\ j=1,\dots,l)$ – елементи комплексного простору $L_p = L_p(\Omega,\Sigma,\mu)$, $1\le p<\infty$,

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=\sum_{j=1}^{l}\beta_j=1,\quad \alpha_i\ge 0,\ \beta_j\ge 0,\quad \bar{x}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i,\quad \bar{y}=\sum_{j=1}^{l}\beta_j y_j.$$

Тоді мають місце нерівності

$$\Big(\sum_{i_1,i_2=1}^{k}\sum_{j_1,j_2=1}^{l}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\beta_{j_1}\beta_{j_2}\|z_{i_1j_1}-z_{i_2j_2}\|_p^{t'}\Big)^{1/t'}\le$$

$$\le 2^{1/t}\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\alpha_i\beta_j\|z_{ij}\|_p^{t'}\Big)^{1/t'};$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\alpha_i\beta_j\|(x_i-\bar{x})-(y_j-\bar{y})\|_p^{t}\Big)^{1/t}\le$$

$$\leq 2^{-1/2'}\Big(\sum_{i_1,i_2=1}^{k}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\|x_{i_1}-x_{i_2}\|_p^2+\sum_{j_1,j_2=1}^{l}\beta_{j_1}\beta_{j_2}\|y_{j_1}-y_{j_2}\|_p^2\Big)^{1/2}.$$

У випадку $p\in[1,2]$ для нескінченного набору значень k і l можливо так вибрати числа α_i, β_j і елементи з L_p, що в цих нерівностях буде виконуватись знак рівності.

Вперше нерівності такого типу досліджував Шенберг.

Доведення цих нерівностей ґрунтується на інтерполяційній теоремі Ріса-Торіна.

В § 2 вивчаються достатні умови строгої відокремленості двох множин площиною в скінченновимірному просторі L_p, а в § 3 – ця ж задача для нескінченновимірних L_p просторів, $p\geq 1$.

Теорема 2.1. Нехай в n-вимірному підпросторі дійсного простору L_p дані множини A і B такі, що для їх діаметрів $d(A)_p$ і $d(B)_p$ виконані умови $d(A)_p\leq d_1$, $d(B)_p\leq d_2$. Тоді, якщо для довільних $x\in$ A і $z\in$ B для віддалі між ними $d(x,z)_p$ виконується нерівність

$$d^2(x,z)_p > \frac{1}{2^{2'-1}}\max_{1\leq k\leq n+1}\Big(\frac{k-1}{k}d_1^2+\frac{n+1-k}{n+2-k}d_2^2\Big),$$

то існує гіперплощина, котра строго відокремлює множини A і B, і

$$d(\operatorname{conv}A,\operatorname{conv}B)_p > \frac{1}{2^{1/2'}}\max_{1\leq k\leq n+1}\Big(\frac{k-1}{k}d_1^2+\frac{n+1-k}{n+2-k}d_2^2\Big)^{1/2}-$$

$$-\frac{1}{2^{1/2'}}\max_{1\leq k\leq n}\Big(\frac{k-1}{k}d_1^2+\frac{n-k}{n+1-k}d_2^2\Big)^{1/2}>0.$$

При цьому показано, що у випадку $p\leq 2$ ця умова відокремленості є найкращою можливою у тому розумінні, що для нескінченного набору значень n константу $2^{-(2'-1)}$ зменшити неможливо.

Теорема 3.1. Нехай в нескінченновимірному дійсному просторі L_p дані множини A і B. Тоді, якщо для будь яких

$x \in A$ і $z \in B$ виконується нерівність

$$d^{2}(x,z)_{p} > \frac{1}{2^{2-1}}\left(d^{2}(A)_{p}+d^{2}(B)_{p}\right),$$

то

$$d(\operatorname{conv} A, \operatorname{conv} B)_{p} > 0,$$

і існує гіперплощина, яка строго відокремлює A і B. Якщо

$$d^{2}(A,B)_{p} \geq \frac{1}{2^{2-1}}\left(d^{2}(A)_{p}+d^{2}(B)_{p}\right) > 0,$$

то $\operatorname{conv} A \cap \operatorname{conv} B = \emptyset$.

Існують такі множини A і B в $L_p[0,1]$, що

$$\overline{\operatorname{conv} A} \cap \overline{\operatorname{conv} B} \neq \emptyset \quad \text{і}$$

$$d^{2}(A,B)_{p} = \frac{1}{2^{2-1}}\left(d^{2}(A)_{p}+d^{2}(B)_{p}\right) > 0.$$

Раніше у випадку $p=2$ ці результати були отримані В.Л.Дольніковим.

В § 4 аналогічна задача розглядається для довільних скінченновимірних нормованих просторів.

Теорема 4.І. Нехай A і B – множини з дійсного нормованого простору X^n, $\dim X^n = n$, такі що $d(A) \leq d_1$, $d(B) \leq d_2$. Тоді якщо для будь яких $x \in A$ і $z \in B$ виконується нерівність

$$d(x,z) > \max_{1 \leq k \leq n+1}\left(\frac{k-1}{k} d_1 + \frac{n+1-k}{n+2-k} d_2\right),$$

то існує гіперплощина, яка строго відокремлює множини A і B. Якщо ж виконується рівність

$$d(A,B) = \max_{1 \leq k \leq n+1}\left(\frac{k-1}{k} d_1 + \frac{n+1-k}{n+2-k} d_2\right),$$

то це, взагалі кажучи, не гарантує строгої відокремленості множин A і B.

Основні результати першої глави пов'язані з обчисленням констант Юнга L_p -просторів.

Для обмеженої множини A нормованого простору X величину $r(A) = \inf_{m \in X} \sup_{a \in A} \|a - m\|$

називають чебишовським радіусом множини A;

$$r_s(A) = \inf_{m \in A} \sup_{a \in A} \|a - m\|$$

– відносним чебишовським радіусом A.

$$J(A) = \frac{r(A)}{d(A)} \quad \left(J_s(A) = \frac{r_s(A)}{d(A)} \right)$$

– константою Юнга (відносною константою Юнга) множини A в просторі X.

$$J(X) = \sup \{ J(A);\ A\text{ - обмежена} \},$$

$$J_s(X) = \sup (J_s(A);\ A\text{ - обмежена і опукла})$$

– відповідно константою Юнга і відносною константою Юнга простору X.

В § 5 глави I ми для скінченновимірних просторів ℓ_p^n доводимо оцінки зверху констант Юнга $J(\ell_p^n)$ і $J_s(\ell_p^n)$, які у випадку $p \in [1,2)$ для деяких вимірностей n співпадають з точними значеннями відповідних констант.

Теорема 5.1 Для констант Юнга дійсних просторів ℓ_p^n, $1 \le p < \infty$, виконуються нерівності

$$J(\ell_p^n) \le J_s(\ell_p^n) \le \frac{1}{2^{1/p'}} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{1/p}$$

У випадку n таких, що існує матриця Адамара порядку $n+1$, при $p \in [1,2)$ мають місце рівності

$$J(\ell_p^n) = J_s(\ell_p^n) = \frac{1}{2^{1/p'}} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{1/p}$$

В § 6 досліджується задача: як отримати оцінку зверху константи Юнга нескінченновимірного простору, якщо відомі константи для його скінченновимірних підпросторів. Основним результатом є теорема 6.3, в якій для дійсних просторів ℓ_p і $L_p[0,1]$, $1 \le p < \infty$, обчислені константи Юнга:

$$J(l_p) = J_s(l_p) = J(L_p[0,1]) = J_s(L_p[0,1]) = \max\{2^{\frac{1-p}{p}};\ 2^{-\frac{1}{p}}\}.$$

Слід відзначити, що ці значення співпадають з оцінками знизу В.І.Бердишева, саме тому нашою основною метою буде створення методу оцінок цих констант зверху.

В § 7 для метричних просторів 2π -періодичних функцій

$$\omega(L) \equiv \omega(L)(T^1) = \{f;\ \|f\|_\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega(|f(x)|)dx < \infty\},$$

де ω -функція типу модуля неперервності, отримана точна константа в теоремі Джексона для наближення функцій константами:

$$\sup_{\substack{f\in\omega(L)\\ f\not\equiv const}} \frac{E_0(f)}{\omega(f,\pi)} = 1.$$

За допомогою цього факту в теоремі 7.2 обчислена константа Юнга цих просторів:

$$J(\omega(L)) = 1.$$

Запропонований в главі I метод розв'язування деяких екстремальних геометричних задач в L_p , який грунтується на спеціальних точних нерівностях, отриманих за допомогою теорії інтерполяції, виявився корисним і в задачах теорії апроксимації функцій. Так, в § 8 ми використовуємо ці ж ідеї в задачі наближення періодичних функцій двох змінних сумою функцій від однієї змінної.

В теоремі 8.1, зокрема, доведена нерівність

$$\inf_{\varphi,\psi\in L_p(T^1)} \|f(x,y)-\varphi(x)-\psi(y)\|_{L_{pp}(T^2)} \le \frac{1}{2^{2/p'}}\,\omega(f;\pi,\pi)_{L_{pp}(T^2)},$$

в котрій константу $2^{-2/p'}$ одразу для всіх $f(x,y)$ зменшити неможливо.

Тут $\omega(f;\pi,\pi)$ -значення змішаного модуля неперервності функції $f(x,y)$ в точці (π,π) .

В главі II досліджуються послідовності обмежених за мірою операторів.

Послідовність операторів (T_n), діючих з банахового простору X в простір $L_0 \equiv L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ вимірних функцій на імовірносному просторі (Ω, Σ, μ) з топологією збіжності за мірою, назвемо поточково обмеженою за мірою, якщо $\forall f \in X$ множина $\{T_n f ; n = 1,2,...\}$ обмежена в L_0.
Якщо при цьому оператори T_n ще є лінійними і обмеженими, то будемо говорити, що послідовність (T_n) належить класу $BM_0(X)$ $((T_n) \in BM(X))$.

Якщо $\{T_n f ; n = 1,2,...\}$ збігається за мірою на тотальній в X множині елементів f і $(T_n) \in BM(X)$, то тоді для будь якого $f \in X$ послідовність $\{T_n f\}$ збігається за мірою. Тому дослідження збіжності за мірою послідовностей значень операторів зводиться до вивчення класу $BM(X)$. Наша мета є дослідження умов належності цьому класу.

В § I за допомогою стандартних міркувань, заснованих на теоремі Бера про категорії, доводиться принцип рівномірної обмеженості для (T_n) у випадку, коли оператори діють в простір L_0.

Лема I.I (Принцип Банаха для послідовності поточково обмежених за мірою опуклих операторів). Нехай X - банаховий простір, $T_n : X \to L_0$ $(n = 1,2,...)$ - опуклі обмежені оператори. Послідовність (T_n) буде поточково обмеженою за мірою тоді і тільки тоді, коли знайдеться невід'ємна спадна функція $C(x) \in L_0[0,1]$, така що

$$\forall n \quad \forall f \in X \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\rho(T_n f, x) \le C(x) \|f\|_X ,$$

де $\rho(T_n f, x)$ - значення спадного переставлення функції $|T_n f|$ в точці x.

В § 2 отриманий критерій належності (T_n) класу $BM(X_p)$, де X_p - простір типу p, $p \in [1,2]$.

Теорема 2.I Послідовність (T_n) належить класу $BM(X_p)$ тоді і тільки тоді, коли для будь якого $\varepsilon > 0$ знайдуться константа $C(\varepsilon)$ і для усіх n вагові функції $\varphi_{n,\varepsilon}$, які задовольняють умови

$$0 \le \psi_{n,\varepsilon}(u) \le 1, \quad \int_{\Omega} \psi_{n,\varepsilon}(u)\,d\mu > 1-\varepsilon,$$

такі, що $\forall f \in X_p, \ \forall y > 0$ виконуються нерівності

$$\int_{\{u \in \Omega:\ |T_n f(u)|^p > y\}} \psi_{n,\varepsilon}(u)\,d\mu \le \frac{C(\varepsilon)}{y} \|f\|^p_{X_p}.$$

У випадку $T_n \equiv T$, тобто для індивідуального оператора, ця теорема дає критерій його неперервності за мірою і доведена Е.М.Нікішиним. При доведенні ми значною мірою використовуємо як ідеї Нікішина, так і принцип равномірної обмеженості.

Побудовано приклад, який показує, що взагалі кажучи неможливо побудувати єдину вагову функцію ψ_ε одразу для усіх n.

Застосування теореми 2.I в конкретних задачах може бути складним тому, що ми маємо мало інформації про вагові функції. Тому ми вилучаємо важливий окремий випадок, коли вагові функції приймають лише два значення: нуль та одиниця.

Наслідок 2.I Нехай для кожного n =I,2,... $\|T_n : X_p \to L_{\infty}\| < \infty$. Тоді $(T_n) \in BH(X_p)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists C(\varepsilon) \ \ \forall n \ \ \exists \ \Phi_n = \Phi_n(\varepsilon) \subset \Omega, \ \mu\,\Phi_n > 1-\varepsilon,$$

$$\forall f \in X_p \ \ \forall x \in (0,1)$$

$$\rho(\chi_{\Phi_n} T_n f, x)\, x^{1/p} \le C(\varepsilon) \|f\|_{X_p}.$$

Тут χ_{Φ_n} -оператор множення на характеристичну функцію множини Φ_n.

Наслідок 2.I показує, що при зроблених припущеннях для кожного фіксованого ε слабкі L_p -норми операторів $\chi_{\Phi_n} T_n$ равномірно по n обмежені.

В той же час можливо навести приклад, що для операторів T_n їх слабкі L_p -норми при цих же умовах можуть зростати, причому як завгодно швидко.

Наслідок 2.І дає можливість при дослідженні класу $BH(X)$ застосувати теорію інтерполяції операторів. В § 3 ми застосовуємо теорію інтерполяції для операторів, діючих в симетричних просторах.

Теорема 3.1 Нехай для деякого $p \in [1,2)$

$$(T_n) \in BH(L_p)$$

і $\| T_n : L_p \to L_\infty \| < \infty$ при кожному n. Тоді:

а) $\forall r \in (p,2)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists C_r(\varepsilon)$ $\exists \Phi_n \subset \Omega$, $\mu \Phi_n > 1-\varepsilon$, $\forall n$

$$\| \chi_{\Phi_n} T_n : L_r \to L_r \| < C_r(\varepsilon);$$

б) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists C(\varepsilon)$ $\exists \Phi_n \subset \Omega$, $\mu \Phi_n > 1-\varepsilon$, $\forall n$

$$\| \chi_{\Phi_n} T_n : L_p \to L_p \| < C(\varepsilon) \left(1 + (\ln^+ \| T_n \|_{p \to \infty})^{1/p}\right).$$

Таким чином, в шкалі просторів L_p маємо слідуючу сукупність властивостей: якщо $(T_n) \in BH(L_p)$ для деякого $p \in [1,2)$ і $\| T_n : L_p \to L_\infty \| < \infty$, то для будь якого $\varepsilon > 0$ норми відповідних операторів $\chi_{\Phi_n} T_n$, по-перше, равномірно обмежені в ситуації $L_r \to L_r$ для $r \in (p,2)$, по-друге, равномірно обмежені в ситуації $L_p \to L_r$ для $r \in (0,p)$, і по-трете, у випадку $L_p \to L_p$ є оцінка зверху можливої швідкості зростання норм.

Тепер нехай E-довільний симетричний простір вимірних функцій з фундаментальною функцією φ_E. Слідуючий результат отримано за допомогою К-інтерполяції операторів.

Теорема 3.2 Нехай $(T_n) \in BH(L_1)$ і $\forall n$ $\| T_n : L_1 \to L_\infty \| < \infty$.

Тоді $\forall \varepsilon > 0$ $\exists C(\varepsilon)$ $\exists \Phi_n$, $\mu \Phi_n > 1-\varepsilon$, $\forall f \in E$

$\forall x \in (0, 1/2)$

$$P(\chi_{\phi_n} T_n f, 2x)\, x^{1/2} \le C(\varepsilon)\left(\int_x^1 (f^{**}(s))^2 ds\right)^{1/2},$$

$$P(\chi_{\phi_n} T_n f, 2x)\, x^{1/2} \le C(\varepsilon)\left(\int_x^1 \frac{ds}{\varphi_\varepsilon^2(s)}\right)^{1/2} \|f\|_E,$$

де

$$f^{**}(s) = \frac{1}{s}\int_0^s P(f, x)\,dx, \quad s > 0.$$

В § 4 глави II ми розглядаємо ситуацію, коли оператори T_n наділені додатковими властивостями відносно деяких перетворень $\tau : \Omega \to \Omega$, що створюють ергодичну сім'ю F. Тобто нехай:

1) простір X_p складається з вимірних на (Ω, Σ, μ) функцій,

2) $\forall \tau \in F \;\; \forall f \in X_p \;\; \|f\tau\|_{X_p} \le \|f\|_{X_p}$,

3) оператори $T_n : X_p \to L_0$ задовольняють умову:

$\forall \tau \in F \;\; \forall f \in X_p \;\; \forall n$ для майже всіх $u \in \Omega$

$$|(T_n f)(\tau u)| \le |(T_n (f\tau))(u)|.$$

Ці умови виконуються, наприклад, для операторів згортки на просторах $L_p(T^m)$ періодичних функцій, заданих на m-вимірному торі T^m.

При цих умовах доведені слідуючі три теореми:

Теорема 4.1 Якщо $(T_n) \in BH(X_p)$, то $\exists C \;\; \forall n \;\; \forall f \in X_p \;\; \forall x \in (0,1]$

$$P(T_n f, x)\, x^{1/p} \le C \|f\|_{X_p}.$$

Теорема 4.2 Якщо для деякого $p \in (1,2)$ $(T_n) \in BH(L_p)$, то: 1) $\forall z \in (p,2) \;\; \exists C_z \;\; \forall n \;\; \|T_n : L_z \to L_z\| \le C_z$;

2) якщо $\|T_n : L_p \to L_\infty\| < \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то $\exists C \;\; \forall n$

$$\|T_n : L_p \to L_p\| \le C\left(1 + \ln^+ \|T_n\|_{p,\infty}\right)^{1/p}$$

Теорема 4.3 Якщо $(T_n) \in BH(L_1)$, то $\forall f \in E$ $\forall x \in (0, 1/2)$

$$P(T_n f, 2x)\, x^{1/2} \le A \left(\int_x^1 (f^{**}(s))^2 ds \right)^{1/2},$$

$$P(T_n f, 2x)\, x^{1/2} \le B \left(\int_x^1 \frac{ds}{\varphi_E^2(s)} \right)^{1/2} \|f\|_E,$$

де константи A і B не залежать від n, f, x.

В § 5 ми показуємо, як з доведених критеріїв можна вивести відомі результати Р.Д.Гецадзе і С.В.Конягіна про розбіжність за мірою кратних рядів Фур'є.

В § 6 ми застосовуємо отримані результати для дослідження збіжності за мірою середніх Бохнера-Ріса рядів по власних функціях оператора Лапласа. Збіжність майже скрізь цих середніх раніше досліджували Е.Стейн, Е.М.Нікішин, К.І.Бабенко та інші.

Нехай $\{u_k(x)\}$ -система власних функцій оператора Лапласа з будь якою з трьох класичних крайових умов в області $\mathcal{D}$ з R^m $(m>1)$, $\{\lambda_k\}$ -відповідні власні значення,

$$f_k = \int_{\mathcal{D}} f(x)\, u_k(x)\, dx,$$

$$\sigma_R^\alpha(f, x) = \sum_{\lambda_k < R^2} \left(1 - \frac{\lambda_k}{R^2}\right)^\alpha f_k\, u_k(x)$$

- середні Бохнера-Ріса порядку α.

Теорема 6.І Нехай $\mathcal{D}$ - m -вимірна область з обмеженою поверхневою мірою Мінковського. Тоді для будь яких $p \in [1, \frac{2m}{m+1})$ і $\alpha \in (0, m(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2})$ знайдеться функція з $L_p(\mathcal{D})$, для якої середні Бохнера-Ріса розбігаються за мірою.

В § 7 для функцій, визначених на компактній абелевій групі G з мірою Хаара μ, розглядаються простори Орліча $L_M(G) = \{f \in L_0(G);\ \int_G M(|f|)\, d\mu < \infty\}$, де, як звичайно, $M(y)$, $y \in R^+$ -опукла і ненульова при $y>0$ функція, $M(0)=0$, яка задовольняє Δ_2 -умову. Ми вводимо ще одну умову: $M(y^{1/2})$ є опукла вгору функція змінної y. Прикладом такої функції є функція

$$M(y)=y^p\log^{\alpha}(y+c),\ \alpha\geq 0,\ 1\leq p<2,\ c\geq c_p,$$

яка породжує простір $L_p(\log^+L+c)^{\alpha}$.

Теорема 7.I Нехай $T_n: L_M(G)\to L_0(G),\ n=1,2,\ldots$ -лінійні неперервні оператори, які переставні зі зсувами на групі G. Тоді $(T_n)\in BH(L_M(G))$ тоді і тільки тоді, коли $\exists B>0\ \forall n\ \forall f\in L_M(G)\ \forall y\in(0,1)$

$$y\leq B\int_G M\left(\frac{|f(\omega)|}{P(T_nf,y)}\right)d\mu_u. \tag{I}$$

Дослідження Л.В.Жіжіашвілі, Р.Д.Гецадзе, С.В.Конягіна збіжності за мірою кратних рядів Фур'є по тригонометричній системі зі спектром у кубі для функцій з просторів $L(\log^+L+c)^{\alpha}(T^m)$ показали, що відповідь суттєво залежить від показника α. Тому виникає потреба в критеріях належності класу $BH(L_M)$, які б враховували специфіку метрики. Теорема 7.I дає відповідь на це питання.

Оскільки перевірка умови (I) для просторів Орліча в конкретній ситуації може завдати великі труднощі, ми виводимо з теореми 7.I необхідні умови поточкової обмеженості за мірою для випадку просторів $L_p(\log^+L+c)^{\alpha}(T^m)$ і операторів T_n виду

$$(T_nf)(u)=\int_{T^m}K_n(u-v)f(v)\,d\mu_v.$$

Нехай $\omega(K_n,\delta)_p=\sup\{\|K_n(\cdot+u)-K_n(\cdot)\|_p;\ |u|\leq\delta\}$ -значення модуля неперервності в метриці $L_p(T^m)$ ядра K_n в точці δ.

Теорема 7.2 Нехай $p\in[1,2)$, $\alpha\geq 0$, $(T_n)\in BM(L_p(\log^+L+c)^{\alpha}(T^m))$, де T_n -оператор згортки з ядром K_n : $K_n\in L_\infty(T^m)$. Тоді знайдеться константа A, яка не залежить від n і δ, така, що для будь якого $\delta\in(0,1)$, що задовольняє умову $\delta^{-m}>\|K_n\|_\infty$, і довільного n виконується нерівності

$$\|K_n\|_p \le A\left(1+\omega(K_n,\delta)_p + \delta^{-\frac{m}{p'}}|\ln\delta|^{\frac{\alpha+1}{p}}\right).$$

Для конкретних ядер є можливість параметр δ вибрати оптимально. Наприклад, нехай T_R -лінійний метод підсумовування рядів Фур'є по тригонометричній системі зі спектром в $R\mathcal{D}$, де $\mathcal{D}$ -обмежена центрально-симетрична область в R^m :

$$(T_R f)(u) = \int_{\mathbb{T}^m} K_R(u-v)f(v)\,d\mu_v = \sum_{k\in R\mathcal{D}\cap\mathbb{Z}^m} c_{k,R}\hat{f}_k e^{iku},$$

$$\mathcal{K}_R(u) = \sum_{k\in R\mathcal{D}\cap\mathbb{Z}^m} c_{k,R}\, e^{iku},$$

і множники підсумовування $c_{k,R}$ равномірно обмежені по модулю.

Наслідок 7.1 Якщо $(T_R)\in BH(L_p(\log^+L+c)^{\alpha}(\mathbb{T}^m))$, $p\in[1,2)$, $\alpha\ge 0$, то ядра $\mathcal{K}_R$ при довільних $R>0$ повинні задовольняти умову

$$\|\mathcal{K}_R\|_p \le C\,R^{\frac{m}{p'}}(\ln R)^{\frac{\alpha+1}{p}},$$

де константа C не залежить від R .

В заключному § 8 глави II розглядаються оператори зі значеннями в метричних просторах $\omega(L)(G)$, де ω - функція типу модуля неперервності, G - компактна абелева група. Шкала цих просторів включає $L_p(G)$ при $p\in(0,1]$ і $L_0(G)$.

Теорема 8.I Нехай $p\in(0,1)$, функція ω задовільняє умову

$$\int_1^\infty \frac{\omega(x)}{x^{p+1}}\,dx<\infty,$$

$T: L_p \to \omega(L)$ -лінійний, переставний зі зсувами оператор. Тоді T буде неперервним тоді і тільки тоді, коли $\exists C\ \ \forall f\in L_p\ \ \forall x\in(0,1]$

$$P(Tf,x)x^{1/p} \le C\,\|f\|_p^{1/p}.$$

Теорема 8.2 Нехай $T_\alpha : L_p \to \omega(L), \alpha\in A$, A -спрямована множина індексів, $p\in(0,1)$ -узагальнена послідовність неперервних операторів, переставних зі зсувами, і

$$\int_1^\infty \frac{\omega(x)}{x^{p+1}}\,dx<\infty.$$

Тоді послідовність (T_α) буде поточково обмеженою тоді і тільки тоді, коли $\exists C\ \forall f\in L_p\ \forall x\in(0,1]\ \forall \alpha\in A$

$$P(T_\alpha f,x)x^{1/p} \le C\,\|f\|_p^{1/p}.$$

Далі розглядаються оператори T_α, які діють з простору типу p $X_p(G)$ в $\omega(L)(G)$, і простір $X_p(G)$ складається з деякої сукупності вимірних на G функцій та норма інваріантна відносно зсуву на групі G.

Теорема 8.3 Нехай в випадку $p>1$ ω -довільна функція типу модуля неперервності, а при $p=1$ -така, що збігається інтеграл $\int_1^\infty \omega(x)x^{-2}dx$. Нехай, далі, T : $X_p \to \omega(L)$ -лінійний оператор, переставний зі зсувами. Тоді оператор T буде неперервним тоді і тільки тоді, коли $\exists C\ \forall f\in X_p\ \forall x\in(0,1]$

$$P(Tf,x)x^{1/p} \le C\,\|f\|_{X_p}.$$

Теорема 8.4 Нехай p і ω задовольняють умови теореми 8.3, $T_\alpha : X_p\to\omega(L)$, $\alpha\in A$, - узагальнена послідовність неперервних, переставних зі зсувами операторів. Тоді (T_α) буде поточково обмеженою тоді і тільки тоді, коли $\exists C$ $\forall \alpha\in A\ \forall f\in X_p\ \forall x\in(0,1]$

$$P(T_\alpha f,x)x^{1/p} \le C\,\|f\|_X.$$

Третя глава присв'ячена K-інтерполяції в задачах рівномірного наближення функцій.

§ I носить допоміжний характер. В ньому вивчаються модулі неперервності функцій з $C(Q)$, де (Q,ρ) -метричний компакт:

$$\omega_f(t) = \sup\{|f(x)-f(y)|;\ x,y\in Q,\ \rho(x,y)\le t\}.$$

В теоремі І.І доведено, що множина таких модулів неперервності співпадає з множиною функцій типу модуля неперервності таких, що $\omega(h)=\omega(\operatorname{diam} Q)$ $\forall h \ge \operatorname{diam} Q$, тоді і тільки тоді, коли компакт Q є метрично опуклим. Цей результат був одержаний сумісно з В.Ф.Бабенком.

Для даного модуля неперервності ω розглянемо простори C^ω :

$$C^\omega \equiv C^\omega(Q) = \{f\in C(Q);\ \|f\|_\omega = \sup_h \frac{\omega_f(h)}{\omega(h)} < \infty\}.$$

Зокрема, якщо $\omega(h) = h^\alpha$, $\alpha\in(0,1]$, то маємо

$$\|f\|_\alpha = \sup_h (\omega_f(h)\, h^{-\alpha}),\quad C^\omega = C^\alpha$$

-відповідно ліпшицеву норму та простори функцій, які задовольняють умову Ліпшиця порядку α.

Нехай $\overline{\omega_f}(\cdot)$ -найменша опукла вгору мажоранта функції $\omega_f(\cdot)$,

$$K(f,t;C,C^\omega) = \inf_\varphi (\|f-\varphi\|_C + t\|\varphi\|_{C^\omega})$$

-значення К-функціоналу Петре на функції f в точці $t>0$ для пари просторів $(C(Q), C^\omega(Q))$.

В §2 обчислено значення К-функціоналу для цієї пари.

Теорема 2.І Нехай Q -довільний метричний компакт, ω -такий модуль неперервності, що для деякого $\xi\in(0,\operatorname{diam} Q]$ $\omega(h)$ -строго зростає при $h\in[0,\xi)$ і $\omega(h)=\omega(\xi)$ при $h\in[\xi,\operatorname{diam} Q]$, функція $f\in C(Q)$ така, що $\omega_f(h)=\omega_f(\xi)$ для всіх $h\in[\xi,\operatorname{diam} Q]$. Тоді мають місце рівності:

$$K(f,t;C,C^\omega) = \begin{cases} \tfrac12\, \overline{(\omega_f\circ\omega^{-1})}(2t), & 2t<\omega(\xi);\\ \tfrac12\, \omega_f(\xi), & 2t\ge\omega(\xi). \end{cases}$$

У випадку $Q=[-\pi,\pi]$ цей факт довів Я.Петре, для довільного Q і $\omega(t)=t$ - Ю.А.Брудний.

Цей результат використовується для вивчення норм сублінійних (тобто напівадитивних та однорідних) операторів $T: C^{\omega} \to C$. Нехай H^{ω} -одинична куля простору C^{ω}. Для скінченності норми $\|T\|_{\omega \to c} = \sup \{ \|Tf\|_c \} \; f \in H^{\omega} \}$ необхідно, щоб для будь якої $f \equiv const$ виконувалась умова $Tf = 0$. Далі вважаємо, що ця умова для операторів T виконана.

Теорема 2.2 Нехай Q -довільний метричний компакт, а функції ω і f задовольняють умови теореми 2.I. Тоді для довільного сублінійного обмеженого оператора $T: C(Q) \to C(Q)$ виконується нерівність

$$\|Tf\|_c \leq \frac{1}{2} \|T\|_{c \to c} \; (\omega_f \circ \omega^{-1}) \left(\frac{2 \|T\|_{\omega \to c}}{\|T\|_{c \to c}} \right)$$

Для кожного оператора T ця нерівність є точною. Це означає, що в правої частині ні константу $1/2$, ні агрумент $2 \|T\|_{\omega \to c} \|T\|_{c \to c}^{-1}$ функції $\omega_f \circ \omega^{-1}$ одразу для всіх $f \in C$ зменшити неможливо.

Наступна інтерполяційна теорема є корисною для розв'язку деяких типових задач теорії наближень.

Теорема 3.I Нехай Q -довільний метричний компакт, і для довільних $f \in C(Q)$ і $\forall h \in (\xi, diam Q]$ $\omega_f(h) = \omega_f(\xi)$. Нехай далі модулі неперервності $\omega_1(h)$ і $\omega_2(h)$ строго зростають при $h \in [0, \xi]$ і постійні при $h \in (\xi, diam Q]$, а функція $\omega_1 \circ \omega_2^{-1}$ опукла вгору. Тоді для обмеженого сублінійного оператора $T: C(Q) \to C(Q)$ виконується нерівність

$$\omega_1^{-1} \left(\frac{2 \|T\|_{\omega_1 \to c}}{\|T\|_{c \to c}} \right) \leq \omega_2^{-1} \left(\frac{2 \|T\|_{\omega_2 \to c}}{\|T\|_{c \to c}} \right).$$

Якщо Q -метрично опуклий компакт, то ця нерівність є точною, тобто існують оператори T, для котрих вона перетворюється на рівність.

Відзначимо наслідок для просторів Ліпшиця: якщо $0 < \alpha < \beta \leq 1$, то

$$\|T\|_{\alpha\to C} \le \left(\frac{1}{2}\|T\|_{C\to C}\right)^{1-\frac{1}{\beta}} \|T\|_{\beta\to C}^{\frac{1}{\beta}}$$

В § 4 ці результати застосовуються до задач наближення функцій. Ці застосування грунтуються на тому, що замість оператора T можна взяти оператор $J-P_A$, де P_A -оператор метричної проекції на підпростір A, чи оператор $J-\mathcal{L}$, де $\mathcal{L}$ -лінійний метод наближення функцій підпростором A з $C(Q)$.

Нехай $E(f,A)$ -найкраще наближення елемента f підпростором A, $E(H^\omega,A)$ і $\mathcal{L}(H^\omega;A)$ -відповідно найкраще і лінійне (методом $\mathcal{L}$) наближення класу H^ω підпростором A. Тоді виконуються точні на просторі $C(Q)$ нерівності:

$$E(f,A) \le \frac{1}{2}\,\overline{\omega}_f\,(2E(H^1;A)),$$

$$\|f-\mathcal{L}f\|_C \le \frac{1}{2}\|J-\mathcal{L}\|_{C\to C}\,\omega_f\left(\frac{2\mathcal{L}(H^1;A)}{\|J-\mathcal{L}\|_{C\to C}}\right).$$

Якщо Q є метрично опуклим, то для будь якого $k\ge 1$

$$E(f,A) \le \frac{k+1}{2}\,\omega_f\left(\frac{2E(H^1;A)}{k}\right),$$

$$\|f-\mathcal{L}f\|_C \le \frac{k+1}{2}\|J-\mathcal{L}\|_{C\to C}\,\omega_f\left(\frac{2\mathcal{L}(H^1;A)}{k\,\|J-\mathcal{L}\|_{C\to C}}\right).$$

Такі точні нерівності вперше були одержані М.П.Корнійчуком у випадку найкращого наближення тригонометричними поліномами періодичних функцій.

Далі, якщо ω_1 і ω_2 задовольняють умови теореми 3.I, а Q -довільний метричний компакт, то

$$\omega_1^{-1}(2E(H^{\omega_1};A)) \le \omega_2^{-1}(2E(H^{\omega_2};A)),$$

$$\omega_1^{-1}\left(\frac{2\mathcal{L}(H^{\omega_1};A)}{\|J-\mathcal{L}\|_{C\to C}}\right) \le \omega_2^{-1}\left(\frac{2\mathcal{L}(H^{\omega_2};A)}{\|J-\mathcal{L}\|_{C\to C}}\right).$$

Ці співвідношення дозволяють порівняти наближення даним підпростором різних класів H^{ω}. Для періодичних функцій однієї змінної ця задача досліджувалась М.П.Корнійчуком, А.О.Лігуном та іншими.

В заключному § 5 наведені оцінки К-функціоналу пари $(C[-\pi,\pi]; C^2[-\pi,\pi])$, де $\|f\|_{C^2} = \|f''\|_C$, і за їх допомогою одержані оцінки зверху для $\|Tf\|_C$ в термінах модуля гладкості $\omega_2(f,\cdot)$.

Теорема 5.2 Якщо T-обмежений сублінійний оператор, то $\forall f \in C[-\pi,\pi]$

$$\|Tf\|_C \le \|T\|_{C\to C}\, \omega_2\left(f, \sqrt{\frac{2\|T\|_{C^2\to C}}{\|T\|_{C\to C}}}\right).$$

Для будь якого $\varepsilon > 0$ знайдуться T і f такі, що

$$\|Tf\|_C > (\|T\|_{C\to C} - \varepsilon)\, \omega_2\left(f, \sqrt{\frac{2\|T\|_{C^2\to C}}{\|T\|_{C\to C}}}\right).$$

Основні положення дисертації опубліковані
в таких роботах:

1. Пичугов С.А. Константа Юнга пространства L_p //Мат.заметки.-1988.-43,№ 5.-С.604-614.
2. Пичугов С.А. Точные оценки приближения в L_p функциями вида $\varphi(x)+\psi(y)$ //Укр.матжурн.-1989.-41,№ 6.-С.815-818.
3. Пичугов С.А. Относительная константа Юнга пространства L_p //Укр.матжурн.-1990.-42,№ 1.-С.122-125.
4. Пичугов С.А. Об отделимости множеств гиперплоскостью в L_p // Analysis Mathematica .-1991.-17,№ 1.-С.21-33.
5. Пичугов С.А. Оценки норм операторов, непрерывных по мере// Мат.заметки.-1991.-50,№ 1.-С.146-148.
6. Pichugov S.A. Translation invariant operators in linear metric spaces // Analysis Mathematica.-1992.-18, № 3.-P. 237-248.

7. Пичугов С.А. К-интерполяция в задачах равномерного приближения функций//Укр.мат.журн.-1992.-44,№ 4.-С.523-533.
8. Пичугов С.А. Последовательности ограниченных по мере операторов//Докл. РАН.-1994.-334,№ 6.-С.696-698.
9. Пичугов С.А. Последовательности ограниченных по мере операторов//Мат.Сб.-1994.-185,№ I.-С.43-72

Стечкин

Підп. до друку 15.03.94. Формат 60х84/16. Папір друк. офс. друк.
Ум. друк. арк. 1,39. Ум фарбо-відб. 1,39. Обл.-вид. арк. 1,0
Тираж 100 пр. Зам. 210 Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики АН України
252601 Київ 4, ГСП, вул. Терещенківська, 3