

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

ДЗЮБЕНКО Герман Анатолійович

**ФОРМО-ЗБЕРІГАЮЧЕ НАВЛИЖЕННЯ
КУСКОВО-МОНОТОННИХ
І КУСКОВО-ПОЗИТИВНИХ ФУНКЦІЙ**

01.01.01 – математичний аналіз

А в т о р е ф е р а т
дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Київ – 1994

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук
ШЕВЧУК І.О.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук
ШВЕДОВ О.С.

кандидат фізико-математичних наук
БУСЛАЄВ В.І.

Провідна установа: Київський університет імені
Тараса Шевченка

Захист відбудеться "14" березня 1995 р. о 15⁰⁰ год. на засіданні спеціалізованої ради Д 01.66.01 при Інституті математики НАН України за адресою: 252601, Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись в бібліотеці інституту.

Автореферат розісланий "9" лютого 1995 р.

ЛНБ України ім.В.Стефаніка



00777344 (W)

Вчений секретар
спеціалізованої ради
доктор фізико-математичних наук

ГУСАК Д.В.

ЛНБ ім. В. Стефаніка
АН України

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

В запропонованій роботі побудовано алгебраїчні многочлени, які "добре" наближають на відрізку функцію і при цьому успадковують такі її властивості як к у с к о в а-позитивність, або к у с к о в а-монотонність (тобто, змінюють знак або, відповідно, змінюють знак монотонності в наперед заданому наборі із s точок відрізка, подібно до функції). Обмеження такого вигляду, накладені на наближаючі елементи, називають вимушеною (constrained), або формозберігаючою (shape-preserving) апроксимацією.

Актуальність теми. Ще П.Л.Чебишев побудував два зростаючі на $I := [-1, 1]$ многочлени з найменшою на I рівномірною нормою серед усіх зростаючих на I многочленів вигляду $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ і вигляду $P_n(x) = -x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$. Далі С.Н.Бернштейн розв'язав таку ж задачу для многочленів $P_n(x)$ з $P_n^{(q)}(x) \geq 0$, $x \in I$, $q = 2, 3, 4, \dots$.

В 1953 році Lorentz G.G. помітив, що многочлени С.Н.Бернштейна

$$B_n(x; f) = 2^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f\left(\frac{n-2j}{n}\right) (1+x)^{n-j} (1-x)^j$$

зберігають форму функції f в тому розумінні, що якщо $f^{(q)}(x) \geq 0$ на I , то і $B_n^{(q)}(x) \geq 0$ на I . Звідси, зокрема, впливає аналог теореми Вейерштрасса для формозберігаючого наближення.

Початок сучасного етапу розвитку формозберігаючого наближення пов'язаний з роботами Lorentz G.G. і Zeller K.L. (див. також Shisha O. і Roulier J.A.). Так, в 1968 р., для будь якої монотонної на I функції f і кожного $n \in \mathbb{N}$ Lorentz G.G. і Zeller K.L. побудували алгебраїчний многочлен $P_n(x)$ степеня $\leq n$, монотонний на I і такий, що

$$|f(x) - P_n(x)| \leq c\omega_1(f; \rho_n(x)), \quad x \in I, \quad (1)$$

де c — абсолютна стала,

$$\rho_n(x) := \frac{1}{n^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}, \quad x \in I, \quad n \in \mathbb{N},$$

$\omega_1(f; t)$ — (перший) модуль неперервності функції f .

Із (1) одразу випливає оцінка

$$E_n^{(1)}(f) \leq c \omega_1(f; n^{-1}), \quad (2)$$

де $E_n^{(1)}(f)$ — величина найкращого рівномірного наближення функції $f \in C(I)$ монотонними на I алгебраїчними многочленами степеня $\leq n$.

Природно виникла гіпотеза, чи не зводиться вимушена апроксимація (принаймні монотонна) до наближення без обмежень. В наступній своїй роботі Lorentz G.G. і Zeller K.L. негайно спростували цю гіпотезу. А саме, вони побудували неперервно диференційовану на I функцію f з $f'(x) \geq 0$, $x \in I$, для якої

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n^{(1)}(f)}{E_n(f)} = \infty, \quad (3)$$

де $E_n(f)$ — величина найкращого рівномірного наближення (без обмежень) функції $f \in C(I)$ (довільними) многочленами степеня $\leq n$. Більш того, для монотонного наближення не виконується навіть аналог добре відомої оцінки

$$E_n(f) < \frac{c}{n} E_{n-1}(f'),$$

а саме, І.О.Шевчуком для кожного $n \in \mathbb{N}$ побудована неперервно диференційована на I функція f з $f'(x) \geq 0$, $x \in I$, така, що

$$E_n^{(1)}(f) > \frac{1}{200} E_{n-1}(f').$$

Тому, починаючи з 1968 року, з робіт Lorentz G.G. і Zeller K.L. інтенсивно досліджується питання: в яких випадках класичні оцінки наближення без обмежень многочленами неперервних на відрізьку I функцій f зберігаються для вимушеної

апроксимації, а в яких ні? Мова іде про класичну оцінку типу С.М.Нікольського

$$|f(x) - P_n(x)| \leq c \rho_n^r(x) \omega_k(f^{(r)}; \rho_n(x)), \quad x \in I, \quad (4)$$

в якій $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N} \cap \{0\}$, $n \geq k + r - 1$, $c = c(r, k)$, $f \in C^{(r)}(I)$, $\omega_k(f^{(r)}; t)$ – k -й модуль неперервності функції $f^{(r)}$; і про наслідок оцінки (4) – нерівність

$$E_n(f) \leq c \left(\frac{1}{n}\right)^r \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right). \quad (5)$$

Нагадаємо, класична оцінка (4) доведена А.Ф.Тіманом (випадок $k = 1$), В.К.Дзядиком ($k = 2$), Freud G. ($k = 2$), Ю.А.Брудним ($k > 2$).

О.С.Шведов виявив, що оцінка

$$E_n^{(1)}(f) \leq c \omega_k(f; n^{-1}), \quad (6)$$

яка доведена Lorentz G.G. і Zeller K.L. для $k = 1$ і DeVore R.A. для $k = 2$, – не виконується для $k \geq 3$, а тим більше не виконується відповідна поточкова оцінка. Тим часом DeVore R.A. і Yu X.M. підсилили оцінку (1), замінивши в ній ω_1 на ω_2 ; а для $r \neq 0$ Lorentz G.G. (випадок $r = 1 = k$), DeVore R.A. ($r > 1 = k$) і Yu.X.M. з Ma Y.P. (для будь яких $r, k \in \mathbb{N}$) встановили нерівність

$$E_n^{(1)}(f) \leq c n^{-r} \omega_k(f^{(r)}; n^{-1}), \quad n \geq k + r - 1; \quad (7)$$

і нарешті І.О.Шевчук довів поточковий аналог оцінки (7).

Таким чином, до останнього часу повністю було досліджено лише випадок "чисто" монотонного наближення (тобто $\lambda = 0$). Що стосується "чисто" позитивного наближення, то тут рівномірні оцінки вигляду (2), (6), (7) є тривіальним наслідком оцінки (5), а поточкові оцінки до цього часу не досліджувались.

Мета роботи. Встановлення поточкових оцінок наближення неперервних на I кусково-монотонних та диференційованих на I кусково-монотонних, а також кусково-позитивних функцій алгебраїчними многочленами, які локально успадковують вказані властивості функцій.

Методика дослідження. В роботі використані методи теорії інтерполювання функцій та методи теорії наближення, зокрема поліноміальні ядра типу Джексона, Дзядика, нерівності Уїтні, Маршу, Дзядика, апарат скінченних і розділених різниць, класичні прямі та обернені теореми, теореми спільного наближення функції та її похідних.

Наукова новизна результатів та їх наукова цінність. Основні результати дисертації є новими. Їх зміст полягає в наступному:

- доведено, що класичні оцінки поточкового (а отже і рівномірного) наближення многочленами неперервних на відрізку функцій зберігаються для кусково-монотонного наближення у випадках, коли гладкість функції характеризується: а) першим або другим модулем неперервності (м. н.), б) першим, другим або третім м. н. похідної, в) будь-яким м. н. будь-якої (починаючи з другої) похідної; у решті випадків класичні оцінки не зберігаються для кусково-монотонного наближення;
- таке ж повне дослідження проведено для кусково-позитивного і "чисто" позитивного наближення многочленами;
- як наслідок встановлено конструктивну характеристику кусково-монотонного і кусково-позитивного наближення функцій класів С.М.Нікольського і отримані оцінки формо-зберігаючого наближення через оцінки наближення без обмежень.

Результати дисертації мають теоретичний характер, але

можуть бути використані як в задачах теорії функцій, так і в обчислювальній математиці.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідались на республіканській науковій конференції "Экстремальные задачи теории приближения и их приложения" (м. Київ, 1990 р.), на школі "Теория функций. Дифференциальные уравнения в математическом моделировании" (м. Воронеж, 1993 р.), на наукових семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник професор О.І.Степанець).

Публікації. По темі дисертації опубліковано 4 роботи, список яких наведено в кінці автореферату. Результати робіт [2] і [3] отримані в процесі спільної праці, при рівному вкладі співавторів і в рівній мірі належать кожному співавтору; їх не можна розглядати як механічне об'єднання окремих тверджень, що належали б кожному з співавторів окремо.

Структура та об'єм роботи. Дисертація обсягом 81 сторінка машинопису. Складається із вступу, додатку до вступу, двох розділів, переліку цитованої літератури, що налічує 52 найменування, та додаткового переліку літератури, що налічує 25 найменувань.

ЗМІСТ РОБОТИ

Викладемо зміст роботи в чотирьох пунктах: п. 1⁰ і 2⁰ – кусково-монотонне наближення (історія питання і отримані результати), п. 3⁰ і 4⁰ – кусково-позитивне наближення. Об'єм автореферату не дозволяє зробити огляд результатів, присвячених опуклій, q -монотонній, багатовимірній, L_p , сплайн вимушеним апроксимаціям, вимушеному наближенню в термінах модуля З.Діціана і В.Тотіка, вимушеним поперечникам. У додатковому переліку літератури наведені роботи Beatson R.K., Van Wickeren E., Wu X., Gilewicz J., DeVore R.A., Ditzian Z., Iliev G.L., Коновалова В.М., Копотуна К.А., Leviatan D., Листопада В.В., Lorentz G.G., Lorentz

R.A., Ma Y.P., Manія С.П., Nessel R.J., Newman D.J., Павлика А.В., Passow E., Raymon L., Roulier J.A., Totik V., Hu Y., Zhou S.P., Шведова О.С., Шевчука І.О., Shisha O., Szabados J., Yu X.M., Jiang D. з цих питань.

1°. Нехай C – простір неперервних на I функцій $f : I \rightarrow R$, з рівномірною нормою

$$\|f\| := \max_{x \in I} |f(x)|;$$

$$C^{(r)} := \{f : f^{(r)} \in C\}, r \in \mathbb{N}; C^{(0)} := C.$$

Нехай $s \in \mathbb{N}$, $Y = Y_s$ – фіксований набір з $s + 2$ -х точок y_i , занумерованих справа наліво:

$$-1 = y_{s+1} < y_s < \dots < y_1 < y_0 = 1. \quad (8)$$

Через $\Delta^{(1)}(Y)$ позначимо множину функцій $f \in C$ таких, що f не спадає на відрізку $[y_{i+1}, y_i]$ при i парному; f не зростає на $[y_{i+1}, y_i]$ при i непарному. Функції $f \in \Delta^{(1)}(Y)$ називають комонотонними між собою (за набором Y). Позначимо \mathcal{P}_n – простір алгебраїчних многочленів степеня $\leq n$, $n \in \mathbb{N}$;

$$E_n^{(1)}(f; Y) := \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)} \|f - P_n\|$$

– величину найкращого рівномірного наближення функції $f \in \Delta^{(1)}(Y)$ многочленами $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$.

Нагадаємо, що k -м модулем неперервності функції $f \in C$ називається функція

$$\omega_k(f; t) := \omega_k(f; t, I) := \sup_{h \in [0, t]} \sup_{x \in [-1, 1 - kh]} |\sigma_h^k(f; x)|$$

при $t \in [0, \frac{2}{k}]$; $\omega_k(f; t) \equiv \omega_k(f; \frac{2}{k})$ при $t \geq \frac{2}{k}$; де

$$\sigma_h^k(f; x) := \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + ih)$$

- k -а різниця функції f в точці x з кроком h .

Скрізь надалі N_α , B_α і $N_{\alpha,\beta}$, $B_{\alpha,\beta}$ позначають, взагалі кажучи, різні додатні сталі (константи), які залежать тільки від α і, відповідно, тільки від α, β .

Відомі наступні результати наближення функції $f \in \Delta^{(1)}(Y)$ многочленами $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$. Роботи Newman D.J., Passow E., Raymon L. і Roulier J.A. містять перші оцінки такого наближення (див. зокрема, далі, (13), (14)).

Илев G.L. і незалежно Newman D.J. довели оцінку

$$E_n^{(1)}(f; Y) \leq B_s \omega_1(f; n^{-1}), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

О.С.Шведов (див. також Yu X.M.) підсилив оцінку (9), замінивши в ній перший модуль неперервності $\omega_1(f; t)$ другим модулем неперервності $\omega_2(f; t)$; а саме, ним доведена оцінка

$$E_n^{(1)}(f; Y) \leq B_Y \omega_2(f; n^{-1}), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

При цьому, він же довів, що сталу B_Y в (10) неможливо замінити на B_s . Оцінка (10) тягне оцінку

$$E_n^{(1)}(f; Y) \leq \frac{B_Y}{n} \omega_1(f'; n^{-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (11)$$

для $f \in C^{(1)} \cap \Delta^{(1)}(Y)$. Аналогічно (9), сталу B_Y в (11) можна замінити сталою B_s (див. Beatson R.K. і Leviatan D.). Із (9) і (10) для $f \in C^{(r)} \cap \Delta^{(1)}(Y)$, $r = 1 \vee 2$, випливає оцінка

$$E_n^{(1)}(f; Y) \leq B_Y \frac{\|f^{(r)}\|}{n^r}, \quad (12)$$

причому, як було сказано, Илев G.L., Newman D.J. ($r = 1$), Beatson R.K. і Leviatan D. ($r = 2$) довели (12) зі сталою B_s .

Для гладкості більше двох відомі оцінки Passow E., Raymon L. і Roulier J.A.: якщо $f \in C^{(r)} \cap \Delta^{(1)}(Y)$ то

$$E_n^{(1)}(f; Y) \leq B_{r-s} (2n)^s \frac{\|f^{(r)}\|}{n^r}, \quad n > 2(r-1), \quad (13)$$

$$E_n^{(1)}(f; Y) \leq B_{Y, r-s} n^2 \frac{\|f^{(r)}\|}{n^r}, \quad n > 4(r+1). \quad (14)$$

Наслідком основних теорем 2.1, 3.1, 4.1 розділу I (див. їх формулювання в п. 2^о) є

Теорема 0.1. *Нехай $r \in \mathbb{N}$. Якщо $f \in C^{(r)} \cap \Delta^{(1)}(Y)$, то при кожному натуральному $n \geq r-1$ існує многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$ такий, що*

$$\left\| \frac{f - P_n}{\rho_n^r} \right\| \leq B_{Y, r} \|f^{(r)}\|, \quad (15)$$

зокрема,

$$E_n^{(1)}(f; Y) \leq B_{Y, r} \frac{\|f^{(r)}\|}{n^r}. \quad (16)$$

Оцінка (16) при $r = 1, 2$ співпадає з (12), а при $r > 2$ суттєво уточнює оцінку (14). Оцінка (15) у випадку кусково-монотонного наближення є новою для всіх $r \in \mathbb{N}$. Нещодавно Gilewicz J. і I.O.Шевчуком (в друці) доведено, що в (16) $B_{Y, r}$ можна замінити на $B_{s, r}$ при всіх $r \in \mathbb{N}$, а не тільки при $r = 1, 2$. Це ж стосується оцінки (15), але тільки для випадку $s = 1$. Якщо $s > 1$, то, як свідчить приклад 5.1 з §5, в оцінці (15) замінити $B_{Y, r}$ на $B_{s, r}$, взагалі кажучи, неможливо. Оскільки в дисертації вивчаються насамперед оцінки вигляду (15), а оцінки вигляду (16) виводяться лише як тривіальні наслідки поточкових оцінок, то, з врахуванням прикладу 5.1, питання про можливість заміни $B_{Y, r}$ на $B_{s, r}$ в дисертації не досліджується.

2^о. Сформулюємо основні в розділі I теореми 2.1, 3.1, теорему 4.1 та їх наслідки – теореми 0.2 і 0.3. Відзначимо, що теорема 2.1 доведена автором у роботі [1], теорема 3.1 – спільно з I.O.Шевчуком і Gilewicz J. [3], теорема 4.1 – спільно з I.O.Шевчуком і В.В.Листопадом [2]. Доведення теореми 4.1 з роботи [2] в дисертацію не включено, а теорема 4.1 доведена у §4 як простий наслідок твердження 1 з §3.

Теорема 2.1. Якщо $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, то при кожному $n \in \mathbb{N}$ існує многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$ такий, що

$$|f(x) - P_n(x)| \leq B_Y \omega_2(f; \rho_n(x)), \quad x \in I. \quad (17)$$

Теорема 3.1. Якщо $f \in C^{(1)} \cap \Delta^{(1)}(Y)$, то при кожному натуральному $n \geq 3$ існує многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$ такий, що

$$|f(x) - P_n(x)| \leq B_Y \rho_n(x) \omega_3(f'; \rho_n(x)), \quad x \in I. \quad (18)$$

Теорема 4.1. Нехай $k \in \mathbb{N}$. Якщо $f \in C^{(2)} \cap \Delta^{(1)}(Y)$, то при кожному натуральному $n \geq k + 1$ існує многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$ такий, що

$$|f(x) - P_n(x)| \leq B_{Y,k} \rho_n^2(x) \omega_k(f''; \rho_n(x)), \quad x \in I. \quad (19)$$

Wu X. і Zhou S.P. довели, що в нерівності (10) (а отже, і в (17)) другий модуль неперервності ω_2 , взагалі кажучи, не можна замінити k -м модулем неперервності ω_k з $k \geq 3$. Аналогічно в (18) третій модуль неперервності ω_3 не можна замінити на ω_k з $k \geq 4$, про що свідчить приклад 5.2 з §5 (приклади з §5 опубліковані в [3]). Таким чином, для всіх $s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ і $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ з'ясовані всі випадки, коли вірні або хибні наступні судження 0.1 і 0.2. А саме, обидва судження хибні у випадку $r = 0 < k - 2$ і у випадку $r = 1 < k - 2$. У решті випадків обидва судження вірні.

Судження 0.1. Якщо $f \in C^{(r)} \cap \Delta^{(1)}(Y)$, то при кожному натуральному $n \geq k + r - 1$ вірна оцінка

$$E_n^{(1)}(f; Y) \leq B_{Y,k,r} \left(\frac{1}{n}\right)^r \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right), \quad (20)$$

де $B_{Y,k,r} = \text{const}$ залежить тільки від Y , k і r .

Судження 0.2. Якщо $f \in C^{(r)} \cap \Delta^{(1)}(Y)$, то при кожному натуральному $n \geq k+r-1$ існує многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$ такий, що

$$|f(x) - P_n(x)| \leq B_{Y,k,r} \rho_n^r(x) \omega_k(f^{(r)}; \rho_n(x)), \quad x \in I, \quad (21)$$

де $B_{Y,k,r} = \text{const}$ залежить тільки від Y , k і r .

Крім теореми 0.1 та теорем 2.1, 3.1 і 4.1 впливають також теореми 0.2 і 0.3.

Нехай $\alpha = r + \beta$, де $0 < \beta \leq 1$, $(r+1) \in \mathbb{N}$; H_α^r - клас функцій $f \in C^{(r)}$, для яких $\omega_2(f^{(r)}; t) = O(t^\beta)$, $t \rightarrow 0+$.

Теорема 0.2. Нехай $\alpha > 0$. Функція $f \in H_\alpha^r \cap \Delta^{(1)}(Y)$ тоді і тільки тоді, коли існує послідовність многочленів $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)$ така, що

$$\left\| \frac{f - P_n}{\rho_n^\alpha} \right\| = O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Достатність в теоремі 0.2 впливає із класичної оберненої теореми В.К.Дзядика.

Для $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ і $f \in C$ позначимо

$$G_{n,\alpha}(f) := \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \left\| \frac{f - P_n}{\rho_n^\alpha} \right\|, \quad G_{n,\alpha}^{(1)}(f; Y) := \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(1)}(Y)} \left\| \frac{f - P_n}{\rho_n^\alpha} \right\|.$$

Для $n = 0$ позначимо $G_{0,\alpha}(f) = G_{0,\alpha}^{(1)}(f; Y) := \|f(0) - f\|$.

Очевидно $G_{n,\alpha}(f) \leq G_{n,\alpha}^{(1)}(f; Y)$. Разом з тим має місце

Теорема 0.3. Нехай $\alpha > 0$ - фіксоване число. Якщо $f \in \Delta^{(1)}(Y)$, то

$$\sup_{n > \alpha - 1} G_{n,\alpha}^{(1)}(f; Y) \leq B_{Y,\alpha} \sup_{n > \alpha - 1} G_{n,\alpha}(f).$$

Теорема 0.3 є наслідком класичної оберненої теореми В.К.Дзядика, а також теореми 2.1 (випадок $\alpha < 2$), теореми 3.1 ($1 < \alpha < 4$) і теореми 4.1 ($\alpha > 2$).

Доведення теореми 2.1 суттєво спирається на специфіку другого модуля неперервності і пов'язаний з "виправленням" многочлена $Q_n^* \in \mathcal{P}_n$, який побудували DeVore R.A. і Yu X.M. для конаближення скрізь неспадної на I функції $f \in C$ (тобто, для випадку $s = 0$). Доведення теорем 3.1 і 4.1 пов'язані з перенесенням складної нелінійної техніки І.О.Шевчука з випадку монотонного наближення на випадок кусково-монотонної апроксимації. Здійснення такого перенесення і, скажімо, сам характер техніки дозволяє автору відзначити її універсальність для отримання прямих оцінок формозберігаючого наближення. Наприклад, за допомогою цієї техніки І.О.Шевчуком, В.В.Листопадом і автором (див. дисертацію В.В.Листопада, а також УМЖ, 1993, 45, 1, 38-43), для випадку $r > 2$ була доведена і наступна теорема (випадок $r = 1, 2$ належить Leviatan D.)

Теорема. Нехай $r \in \mathbb{N}$. Якщо неспадна на I функція $f \in C$ має на $(-1, 1)$ локально абсолютно неперервну $(r - 1)$ -у похідну і $|f^{(r)}(x)(1 - x^2)^{r/2}| \leq 1$ майже скрізь на I , то для кожного натурального $n \geq r - 1$ існує неспадний на I многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n$ такий, що

$$|f(x) - P_n(x)| \leq c n^{-r}, \quad c = c(r) = \text{const}, \quad x \in I.$$

3°. Нагадаємо,

$$s \in \mathbb{N}, \quad Y = Y_s = \{y_i : -1 = y_{s+1} < y_s < \dots < y_1 < y_0 = 1\}.$$

Через $\Delta^{(0)}(Y)$ позначимо множину функцій $f \in C$ таких, що f не від'ємна на відрізку $[y_{i+1}, y_i]$ при i парному; f не додатна на $[y_{i+1}, y_i]$ при i непарному. Функції $f \in \Delta^{(0)}(Y)$ називають копозитивними між собою (за набором Y). Позначимо

$$E_n^{(0)}(f; Y) := \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)} \|f - P_n\|$$

– величину найкращого рівномірного наближення функції $f \in \Delta^{(0)}(Y)$ многочленами $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)$. Нагадаємо,

$$E_n(f) := \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \|f - P_n\|.$$

Очевидно

$$E_n(f) \leq E_n^{(0)}(f; \{-1, 1\}) \leq 2 E_n(f). \quad (22)$$

Відомі наступні результати наближення функції $f \in \Delta^{(0)}(Y)$ многочленами $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)$. Перші оцінки такого наближення належать Passow E., Raymon L. і Roulier J.A..

Leviatan D. довів оцінку

$$E_n^{(0)}(f; Y) \leq B \omega_1(f; n^{-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (23)$$

де B – абсолютна стала. Ну Y., Leviatan D. і Yu X.M. підсилюють (23) і встановили

$$E_n^{(0)}(f; Y) \leq B_Y \omega_2(f; n^{-1}), \quad n > N_Y. \quad (24)$$

Нещодавно К.А.Копотун, для кожного $n > N_Y$, довів нерівність

$$|f(x) - P_n(x)| \leq B_s \omega_3(f; \rho_n(x)), \quad x \in I. \quad (25)$$

Із (25) випливає оцінка

$$E_n^{(0)}(f; Y) \leq B_Y \omega_3(f; n^{-1}), \quad n > N_Y, \quad (26)$$

яку довели також Ну Y. і Yu X.M., як наслідок аналогічного результату для сплайнів. Оцінка (26) (а отже, і (25)) є остаточною в тому розумінні, що існує функція $f \in C^{(1)} \cap \Delta^{(0)}(Y)$, для якої

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n^{(0)}(f; Y)}{\omega_4(f; n^{-1})} = \infty; \quad (27)$$

цей результат належить Zhou S.P.

Для класів диференційованих функцій Leviatan D. (для $r \leq 2$) і Yu X.M. (для $r > 2$) показали: якщо $f \in C^{(r)} \cap \Delta^{(0)}(Y)$ і n достатньо велике, то існує многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)$ такий, що

$$E_n^{(0)}(f; Y) \leq B_{Y,r} n^{-r} \omega_1(f^{(r)}; n^{-1}). \quad (28)$$

Оцінка (28) була підсилена Hu Y., Leviatan D. і Yu X.M.. А саме, для $f \in C^{(1)} \cap \Delta^{(0)}(Y)$, $k \in \mathbb{N}$ і кожного $n > N_{Y,k}$ вони побудували многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)$ такий, що

$$E_n^{(0)}(f; Y) \leq B_{Y,k} n^{-1} \omega_k(f'; n^{-1}). \quad (29)$$

Таким чином, враховуючи результати І.О.Шевчука (для $n = k + r - 1$, див. далі (34)) при всіх $s \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ і $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ були з'ясовані всі випадки, коли вірне або хибне наступне судження 0.3. А саме, судження 0.3 хибне у випадку $r = 0 < k - 3$, а в решті випадків воно вірне.

Судження 0.3. Якщо $f \in C^{(r)} \cap \Delta^{(0)}(Y)$, то при кожному натуральному $n \geq k + r - 1$ вірна оцінка

$$E_n^{(0)}(f; Y) \leq B_{Y,k,r} \left(\frac{1}{n}\right)^r \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right), \quad (30)$$

де $B_{Y,k,r} = \text{const}$ залежить тільки від Y , k і r .

Зазначимо, що при $s = 0$ судження 0.3 вірне для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, що тривіально випливає з (22).

Із результату К.А.Копотуна (див. (25)) випливає вірність наступного судження 0.4 для випадку $r = 0 \geq k - 3$, а з результату Zhou S.P. (див. (27)) - хибність цього судження для випадку $r = 0 < k - 3$. В § 6 розділу II доводиться вірність судження 0.4 для решти випадків, тобто для всіх $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$ і $s \in \mathbb{N}$.

Судження 0.4. Якщо $f \in C^{(r)} \cap \Delta^{(0)}(Y)$, то при кожному натуральному $n \geq k + r - 1$ існує многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)$

такий, що

$$|f(x) - P_n(x)| \leq B_{Y,k,r} \rho_n^r(x) \omega_k(f^{(r)}; \rho_n(x)), \quad x \in I, \quad (31)$$

де $B_{Y,k,r} = \text{const}$ залежить тільки від Y , k і r .

На відміну від судження 0.3, судження 0.4 не є тривіальним для "чисто" позитивного наближення, тобто для $s = 0$. Тим не менш неважко довести, що і у випадку $s = 0$ судження 0.4 вірне для всіх $k \in \mathbf{N}$, $r \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ (див. в кінці автореферату теорему 7.1).

4°. Основним результатом розділу II є теорема 6.1. Позначимо

$$\Pi(x) := \Pi(x; Y) := \prod_{i=1}^s (x - y_i).$$

Теорема 6.1. Нехай $k \in \mathbf{N}$. Якщо $f \in C^{(1)}$ і $f(x)\Pi(x) \geq 0$, $x \in I$, то для кожного натурального $n > N_{Y,k}$ знайдеться алгебраїчний многочлен $P_n = P_n(x)$ степеня $\leq n$ такий, що

$$P_n(x)\Pi(x) \geq 0, \quad x \in I, \quad (32)$$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq B_{s,k} \rho_n(x) \omega_k(f'; \rho_n(x)), \quad x \in I. \quad (33)$$

При $k = 1, 2$ теорема 6.1 впливає в (25). Теорема 6.1 доведена шляхом "виправлення" многочлена, який без обмеження (32) наближає функцію $f \in \Delta^{(0)}(Y)$ зі швидкістю (33).

Із теореми 6.1 і нерівності

$$E_k^{(0)}(f; Y) \leq B_{Y,k} \omega_k(f'; k^{-1}) \quad (34)$$

впливає

Теорема 0.4. Нехай $k \in \mathbf{N}$. Якщо $f \in C^{(1)} \cap \Delta^{(0)}(Y)$, то при кожному натуральному $n \geq k$ існує многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)$ такий, що

$$|f(x) - P_n(x)| \leq B_{Y,k} \rho_n(x) \omega_k(f'; \rho_n(x)), \quad x \in I. \quad (35)$$

Сформулюємо три наслідки теореми 6.1, 0.4 і, відповідно, класичної оберненої теореми В.К.Дзядика.

Теорема 0.5. Нехай $r \in \mathbb{N}$. Якщо $f \in C^{(r)} \cap \Delta^{(0)}(Y)$, то при кожному натуральному $n \geq r - 1$ існує многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)$ такий, що

$$\left\| \frac{f - P_n}{\rho_n^r} \right\| \leq B_{Y,r} \|f^{(r)}\|,$$

зокрема,

$$E_n^{(0)}(f; Y) \leq B_{Y,r} \frac{\|f^{(r)}\|}{n^r}.$$

Теорема 0.6. Нехай $\alpha > 0$. Функція $f \in H_\alpha \cap \Delta^{(0)}(Y)$ тоді і тільки тоді, коли існує послідовність многочленів $P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)$ така, що

$$\left\| \frac{f - P_n}{\rho_n^\alpha} \right\| = O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Для $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ і $f \in \Delta^{(0)}(Y)$ позначимо

$$G_{n,\alpha}^{(0)}(f; Y) := \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^{(0)}(Y)} \left\| \frac{f - P_n}{\rho_n^\alpha} \right\|; \quad G_{0,\alpha}^{(0)}(f; Y) := \|f(0) - f\|.$$

Очевидно $G_{n,\alpha}(f) \leq G_{n,\alpha}^{(0)}(f; Y)$. Разом з тим має місце

Теорема 0.7. Нехай $\alpha > 0$ — фіксоване число. Якщо $f \in \Delta^{(0)}(Y)$, то

$$\sup_{n > \alpha - 1} G_{n,\alpha}^{(0)}(f; Y) \leq B_{Y,\alpha} \sup_{n > \alpha - 1} G_{n,\alpha}(f).$$

Насамкінець, сформулюємо теорему 7.1 із § 7.

Теорема 7.1. Нехай $k \in \mathbb{N}$. Якщо $f \in C$ і $f(x) \geq 0$, $x \in I$, то при кожному натуральному $n \geq k - 1$ знайдеться невід'ємний на I многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n$ такий, що

$$|f(x) - P_n(x)| \leq B_k \omega_k(f; \rho_n(x)), \quad x \in I.$$

Результати розділу II опубліковані в [4].

Автор висловлює щирю вдячність науковому керівнику Ігорю Олександровичу Шевчуку за постановку задач, постійну увагу і підтримку в роботі.

Основні результати дисертації
опубліковані в наступних роботах:

- [1] Дзюбенко Г.А. *Поточечная оценка комонотонного приближения* // Укр. мат. журн. – 1994. – 46, N 11. – С. 1467-1472.
- [2] Dzyubenko H.A., Listopad V.V., Shevchuk I.A. *Comonotone approximation pointwise estimates for twice differentiable functions*. Preprint. CPT-94/P.3067. CNRS Lumini, Marseille, France.
- [3] Dzyubenko G.A., Gilewicz J., Shevchuk I.A. *Piecewise monotone pointwise approximation*, Preprint. CPT-94/P.3121. CNRS Lumini, Marseille, France.
- [4] Dzyubenko G.A. *Copositive and positive pointwise approximation* Preprint series. – Київ, 1994. – 14 с. – (Препр./ НАН України Ін-т математики; 94.38).

Дзюбенко Г.А.

Формо-сохраняющее приближение кусочно-монотонных и кусочно-положительных функций. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ. Институт математики НАН Украины, Киев, 1994.

Установлены оценки приближения на отрезке кусочно-монотонных (а также кусочно-положительных) функций алгебраическими многочленами, которые локально наследуют монотонность (соответственно, знак) функции.

Dzyubenko G.A.

Shape-preserving approximation of piecewise monotone and piecewise positive functions. Thesis for a degree of Candidate of Science (Ph.D.) in Physics and Mathematics, speciality 01.01.01 – Mathematical Analysis. Institute of Mathematics, National Academy of sciences of Ukraine, Kyiv, 1994.

The estimates of approximation on a closed interval of piecewise monotone (piecewise positive as well) functions by an algebraic polynomials having the same local nonotonicity (respectively, sign) as a function are established.

Ключові слова:

наближення многочленами, кусково-монотонне наближення, кусково-позитивне наближення.

Підп. до друку 01.02.95. Формат 60 x 84/16. Папір друк. Офс. друк. Ум. друк. арк. 0.93. Обл.-вид. арк. 0.8. Тираж 100 пр. Зам. N 23. Безкоштовно.

Віддруковано в Інституті математики НАН України.
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3.

456225

AB 31.918