

На правах рукопису

МАМЧИЧ Тетяна Іванівна

Т. Мамчич

УДК 519.21

ДЯКІ УТОЧНЕННЯ ЦЕНТРАЛЬНОЇ ГРАНИЧНОЇ ТЕОРЕМИ
ДЛЯ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА

01.01.05. - теорія ймовірностей
та математична статистика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

дисертації на здобуття вченого ступеня
кандидата фізико-математичних наук

ЛНБ України ім. В. Стефаника
00777384 (-)

Робота виконана на кафедрі теорії ймовірностей та математичної статистики механіко-математичного факультету Київського університету ім. Тараса Шевченка.

Науковий керівник - доктор фізико-математичних наук,
професор КАРТАШОВ М. В.

Офіційні опоненти - доктор фізико-математичних наук,
професор АНІСІМОВ В. В.

кандидат фізико-математичних наук,
КОЗАРОВИЦЬКИЙ Є. Л.

Провідна установа - Львівський державний університет
ім. Івана Франка

Захист дисертації відбудеться "27" Березня 1995р.
о 14 год. на засіданні спеціалізованої ради № 01.01.21
у Київському університеті ім. Тараса Шевченка за адресою:
252127, Київ-127, пр. акад. Глушкова, 6, корпус механіко-математичного факультету, ауд. 42.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотечі Київського університету.

Автореферат розіслано "25" лютого 1995р.

Вчений секретар
спеціалізованої ради

КУРЧЕНКО О.О.

ЛНБ ім. В. Стефаника

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Проблеми перенесення класичних результатів теорії ймовірностей на модель ланцюга Маркова знаходяться в полі зору дослідників з початку нашого століття, але не є остаточно вирішеними і до цього часу.

В даній дисертаційній роботі розглядається гранична поведінка суми $(\sum_{k=1}^N f(x_k))/\sqrt{N}$ на однорідному ланцюзі Маркова $X=\{x_t, t>0\}$ з дискретним часом $t=1,2,\dots$ і зліченим фазовим простором.

Дослідження цієї проблеми проводились В.І.Романовським, А.Н.Колмогоровим, В.Дьобліном, С.Х.Сираждиновим, С.В.Нараєвим, Ш.К.Формановим, Б.А.Ліфшицем, С.Н.Бернштейном, Ю.В.Літніком, Н.А.Сапоговым, Т.А.Саримсаковим, а пізніше В.В.Анісімовим, П.Гудинасом, В.М.Шуренковим, В.К.Малиновським.

Ними було встановлено не тільки факт збіжності нормованої суми до нормального розподілу, але й знайдено порядок оцінок швидкості збіжності.

Але зазначимо, що наявні на даний час результати стосовно швидкості збіжності мають переважно якісний характер (встановлено лише порядок і відсутні явні оцінки).

Мета роботи. Основною метою проведених досліджень є уточнення області застосовності цгт та вивчення швидкості збіжності.

Наукова новизна. У дисертаційній роботі:

- розроблено новий метод доведення центральної граничної

теорему для ланцюгів Маркова.

- знайдено явні оцінки швидкості збіжності в ЦГТ для рівномірно ергодичних ланцюгів, виражені в термінах норми оператора узагальненого потенціалу ланцюга.

- знайдено явні оцінки швидкості збіжності в ЦГТ для однорідних ланцюгів.

Теоретична та практична цінність. Отримані результати можуть бути застосовані в теорії ланцюгів Маркова. Дисертація виконана у відповідності з планом наукових досліджень кафедри теорії ймовірностей та математичної статистики Київського університету за темою "Розробка методів розв'язання проблем статистики випадкових процесів і полів" (номер державної реєстрації І860089770).

Апробація роботи. Основні результати дисертаційної роботи були викладені й обговорені

- на Міжнародній конференції, присвяченій пам'яті академіка М.П.Кравчука (22-28 вересня 1992р.), Київ-Луцьк, 1992, с.123.

- на XXXIII науковій конференції професорсько-викладацького складу Луцького державного педагогічного інституту ім. Лесі Українки, Луцьк, 1992.

- на VI-ій Міжнародній конференції з теорії ймовірностей та математичної статистики, м.Вільнюс, 28 червня-3 липня 1993 р.

- на III Донецькій Міжнародній конференції "Ймовірнісні моделі процесів в управлінні та надійності", м.Маріуполь, 6-11 вересня 1993 р.

- на XL наукової конференції професорсько-викладацького складу і студентів Волинського державного університету, Луцьк, 1994.

Публікації. Зміст дисертації відображено в трьох публікаціях, список яких наведено в кінці автореферату.

Структура та об'єм роботи. Дисертація складається зі вступу, двох розділів та списку літератури, який містить 40 найменувань. Дисертація викладена на 68 сторінках машинописного тексту.

Автор виражає вдячність своєму науковому керівнику за допомогу та постійну увагу до цієї роботи.

КОРОТКИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі дана загальна характеристика роботи: обґрунтовані актуальність теми, мета, теоретичне значення проведених досліджень, викладені основні положення дисертації.

У першому розділі розглядається ЦГТ для рівномірно ергодичних ланцюгів.

В § 1.1 наводяться деякі допоміжні дані з теорії потенціалу ланцюгів Маркова.

§ 1.2 містить ЦГТ для випадку рівномірно ергодичного ланцюга і заданої на ньому обмеженої функції.

Нехай $(E, *)$ - вимірний простір. $X = \{X_t, t \geq 0\}$ - однорідний ланцюг Маркова зі значеннями в просторі $(E, *)$ з дискретним часом $t=1, 2, \dots$ та перехідним ядром $P(x, A)$, $x \in E$, $A \in \mathfrak{B}$. \mathfrak{B} - простір обмежених $*$ -вимірних функцій на E з нормою $\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$. m^* - простір скінченних мір на $*$. Нехай $\mu \in m^*$ -

банахів підпростір.

Позначимо через $P^t(x, A)$ ймовірність переходу ланцюга X за t кроків. Ядро P^t є t -кратною степінню P .

Позначимо $P(t) = t^{-1} \sum_{s=0}^{t-1} P^s$, де $P(0) = P^0 = I$ - одиничний оператор в \mathfrak{M} .

Означення 1. Ланцюг X рівномірно ергодичний по відношенню до норми $\|\cdot\|$, якщо знайдеться стохастичне ядро p таке, що $\|P(t) - p\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ в індукованій операторній нормі.

Означення 2. Нехай P - стохастичне ядро на (E, \mathfrak{A}) . Стаціонарним проектором P назовемо стохастичне ядро p таке, що $p^2 = p = pP = Pp$ і з $\mu = \mu P$, $\mu \in \mathfrak{M}$, слідує, що $\mu = \mu p$.

Зауважимо, що, якщо P має єдину інваріантну міру π , то P має стаціонарний проектор виду $p = 1 \cdot \pi$ (т.т. $p(x, A) = \pi(A)$, $x \in E$, $A \in \mathfrak{A}$).

Означення 3. Нехай ядро P має стаціонарний проектор p . Міра $\mu \in \mathfrak{M}$ є значенням $\mu = \nu R$ узагальненого потенціалу R ланцюга X , якщо μ є розв'язком системи

$$\mu(I - P) = \nu(I - p), \quad \mu p = 0$$

Зауважимо, що рівномірна ергодичність марківського ланцюга рівносильна обмеженості оператора узагальненого потенціалу.

Теорема 1.1

Припустимо, що виконуються умови:

1. Ланцюг X рівномірно ергодичний.
2. Функція f обмежена і задовольняє умову

$$\int_E \pi(dx) f(x) = 0.$$

Тоді при довільному початковому розподілі $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N f(x_k)$

слабо збігається до нормального $N(0, \sigma^2)$ розподілу, де

$$\sigma^2 = 2\pi f R f - \pi f^2.$$

При доведенні теореми 1.1 використано методи поліноміального наближення дійсних функцій.

Серед використовуваних лем варто зазначити лему I.I, в якій пропонується представлення для резольвенти характеристичного ядра:

Лема I.I.

Для $0 < u < 1$ оператор $I - uP$ має обмежений обернений, причому виконується рівність:

$$(I - uP)^{-1} = RT + \frac{PT - RTBP}{\pi T B_1},$$

де $B = P - uP$.

Тут $T = (I + BR)^{-1}$, а оператор P визначається як

$$P(x, A) = \int P(x, dy) \exp\left\{i\lambda f(y) / \sqrt{N}\right\}, \quad x \in E, \quad A \in \mathcal{E}, \quad f \in B.$$

Наслідок.

$$(I - x_w^k P)^{-1} \mathbf{1} = \frac{1 - RTB_1}{\pi T B_1} \quad (I.IO)$$

Явні оцінки швидкості збіжності в цгт містяться в §1.3:

Теорема 1.2.

Нехай виконуються умови теореми 1.1. Тоді

$$\sup_z |F_N(z) - \mathfrak{F}(z)| = O((\ln N)^{-1/32})$$

де $F_N(z) = P\left(\sum_{k=1}^N f(x_k)/\sqrt{N} < z\right)$, $\mathfrak{F}(z)$ - функція розподілу $N(0, \sigma^2)$.

В II розділі розглядаються загальні однорідні ланцюги Маркова, які не обов'язково є рівномірно ергодичними. Такі ланцюги вивчалися за умови зворотності за Харисом (Малиновський В.К.), або ж при еквівалентних умовах (Нагаєв С.В., Ліфшиц Б.А., Гудинас П.).

Зазначимо, що обмеження накладаються авторами, як правило, на ланцюг і функцію окремо. В даній роботі застосовність цгт пов'язується не з властивостями окремо розглядуваних ланцюга та функції, а з комбінацією ланцюга та функції. Умовам, що стосується тільки ланцюга, є існування єдиної інваріантної міри ланцюга. Суттєвою є умова, яка пов'язує оператор узагальненого потенціалу R і розглядувану на ланцюгу функцію f .

Зауважимо, що, хоча доведення цгт проведене (теорема 2.1) в просторі обмежених функцій, та вибір метричного простору для даного методу не принциповий. Аналогічне доведення буде мати місце в будь-якому просторі, де $\|R\| < 1$.

В § 2.1. міститься центральна гранична теорема.

Теорема 2.1

Нехай існує єдина інваріантна міра π ланцюга X .

Для функції f виконуються умови:

f - обмежена; $\pi f = 0$.

Також виконуються умови для узагальненого потенціалу R та функції f :

Rf - обмежена функція;

$$\|R(1 + \epsilon f - \exp(\epsilon f))\| = O(\epsilon^2);$$

$$\|I(1 - \exp(\epsilon f))R\| < \epsilon.$$

Тоді при довільному початковому розподілі $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N f(x_k)$

слабо збігається до нормального $N(0, \sigma^2)$ розподілу, де

$$\sigma^2 = 2\pi f R f - \pi f^2.$$

Останні три умови поєднують в собі властивості ланцюга і заданої на ньому функції.

Як і у випадку рівномірно ергодичних ланцюгів, при виконанні вказаних умов отримано представлення характеристичного ядра \mathcal{F} :

Лема 2.2 В умовах теореми 2.1 оператор $(I - u\mathcal{F})^{-1}$ ($0 \leq u \leq 1$) існує і

$$(I - u\mathcal{F})^{-1} 1 =$$

$$= (1 + O(\lambda/\sqrt{N})) / (1 - u + \lambda^2 \sigma^2 / (2N) + O(\lambda/(N\sqrt{N}) + O((1-u)\lambda/\sqrt{N})))$$

В §2.2 отримано оцінку:

Теорема 2.2.

Нехай виконуються умови теореми 2.1. Тоді

$$\sup_z |F_N(z) - \eta(z)| = O((\ln N)^{-1/32})$$

де $F_N(z) = P\left[\sum_{k=1}^N f(x_k)/\sqrt{N} < z\right]$, $\eta(z)$ - функція розподілу $N(0, \sigma^2)$.

Основні результати дисертації опубліковані в наступних роботах:

1. Мамчич Т.І. Про одне уточнення центральної граничної теореми для сум на ланцюзі Маркова // Вісник Київського університету. Фіз.- мат. науки. 1992. Вип.7, с.85-90.
2. Мамчич Т.И. Операторный метод доказательства центральной предельной теоремы для сумм на цепях Маркова, К., 1991, 17с., Деп. в УкрНИИТИ 16.05.91, № 701.
3. Мамчич Т.І. До питання сумування на ланцюзі Маркова // Волинський державний університет ім. Лесі Українки. Матеріали ХІ наукової конференції професорсько-викладацького складу і студентів університету (серія математична), Луцьк, 1994, с.29

Мамчиц Т.И.

Некоторые уточнения центральной предельной теоремы для цепей Маркова. Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05. - теория вероятностей и математическая статистика. Киевский университет им. Тараса Шевченко, Киев, 1994.

В диссертации предложен новый метод доказательства ц.п.т. для однородных цепей Маркова. Получены в явном виде оценки скорости сходимости, выраженные в терминах обобщенного потенциала цепи.

Tetjana I. Mamohych

The Some Refinements of The Central Limit Theorem for Markov chains. Manuscript. Thesis for a degree of Candidate of Science (Ph.D.) in Physics and Mathematics, speciality 01.01.05. - Probability Theory and Mathematical Statistics. Kiev Taras Shevchenko University, Kiev, 1994.

The thesis proposes a new method of proving the c.l.t. for the homogeneous Markov chains. There have been obtained explicitly the estimates of speed of convergence., expressed in terms of the generalized potential of the chain.

КЛЮЧОВІ СЛОВА

ланцюг Маркова,

узгальнений потенціал

Друк ПМ 1994
к.с. 100 экз.
1994

центральна гранична теорема,

В 2.2 отделе науки:

В работе «...» рассмотрены вопросы теории и практики применения методов математического моделирования в исследовании процессов распространения радиоволн в неоднородных средах. В работе дано определение понятия «математическая модель» и рассмотрены основные типы математических моделей. Приведены примеры построения математических моделей для различных физических процессов. Рассмотрены методы решения задач математического моделирования. В работе даны рекомендации по применению методов математического моделирования в исследовании процессов распространения радиоволн в неоднородных средах.

работы:

1. Мамин Т.И. Про одне питання центральної граничної теореми для сум на лінійці Маркова // Вісник Київського державного університету імені Шевченка. Серія фізико-математичні науки. 1994. № 1. С. 1-4.

3. Мамин Т.И. ...

Друк МП "ЗОРЯ"
тираж 100 экз.
м. Луцьк 1995 р.

Мамин Т.И.